1re spécialité / Signe du trinôme et inéquations

benprof particulier.fr

48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels : racines et forme factorisée

À retenir : $\Delta > 0$: $a(x-x_1)(x-x_2)$; $\Delta = 0$: $a(x-x_0)^2$; $\Delta < 0$: pas de factorisation. Parenthèses si $b<0$: $(-4)^2 = 16$. Garde a devant ; la racine -2 donne le facteur $x+2$. Si $a+b+c=0$, alors 1 est racine.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : calculer un discriminant** — Calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ du trinôme, puis donne son nombre de racines.

(a) $x^2-7x+10$ (b) $3x^2+2x-8$

(c) $-x^2-6x-9$ (d) $3x^2-2x+4$

(e) $-2x^2+x+3$ (f) $5x^2-4x-1$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : factoriser sans discriminant** — Factorise sans calculer Δ (facteur commun ou identité remarquable).

(a) x^2+6x (b) $9x^2-16$

(c) $-3x^2+12x$ (d) $2x^2-50$

(e) $x^2-10x+25$ (f) $49-x^2$

Ex. 3 ★☆☆ **Factoriser avec le discriminant** — Calcule Δ, puis factorise le trinôme si c'est possible.

(a) $x^2+2x-15$ (b) $2x^2+7x+3$

(c) $-x^2+x+20$ (d) $16x^2+8x+1$

(e) $2x^2-3x+5$ (f) $4x^2-4x-3$

Ex. 4 ★★☆ **Racine évidente** — On pose $f(x) = 3x^2-10x+7$ et $g(x) = -4x^2+7x-3$.

(a) Calcule $a+b+c$ pour f et déduis-en une racine évidente de f.

(b) Calcule Δ pour f, puis l'autre racine de f.

(c) Écris $f(x)$ sous forme factorisée, puis contrôle en développant.

(d) Vérifie que 1 est racine de g. Sans calculer Δ, trouve r tel que $g(x) = -4(x-1)(x-r)$ en comparant les termes constants.

Ex. 5 ★★☆ **Repérer les erreurs d'Inès** — Inès factorise $f(x) = 5x^2+3x-2$. Elle écrit : $\Delta = 3^2 - 4\times 5\times(-2) = 9-40 = -31$. Ben lui signale une erreur. Elle corrige Δ, puis utilise $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ et conclut $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)$.

(a) Trouve l'erreur dans son calcul de Δ et donne la bonne valeur.

Ex. 5 (suite)

(b) Quelle erreur contient sa formule des racines ? Calcule les deux racines correctes de f.

(c) Explique pourquoi sa conclusion est fausse, puis donne la forme factorisée correcte de $f(x)$.

(d) Contrôle ta forme factorisée en développant.

Ex. 6 ★★★ **Simplifier un quotient de trinômes** — On pose $f(x) = 6x^2-x-2$ et $g(x) = -3x^2+5x-2$, puis $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) Calcule le discriminant de f et ses racines, puis écris $f(x)$ sous forme factorisée.

(b) Factorise $g(x)$ en justifiant. Attention au signe de a.

(c) Donne l'ensemble de définition de h.

(d) Simplifie l'écriture de $h(x)$ sur cet ensemble.

(e) Tom affirme : « f a deux racines, donc l'équation $h(x)=0$ a deux solutions. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Retrouver un trinôme à racines irrationnelles** — On cherche le trinôme f dont les racines sont $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ et qui vérifie $f(0) = -2$.

(a) Développe $(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$ à l'aide d'une identité remarquable.

(b) Justifie que $f(x) = a(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$. Trouve a, puis la forme développée de $f(x)$.

(c) Contrôle ton résultat : calcule le discriminant de f et retrouve ses deux racines.

(d) On remplace le terme constant de $f(x)$ par un réel m. Pour quelle valeur de m ce trinôme a-t-il une seule racine ? Factorise-le alors.

(e) Pour quelles valeurs de m ce nouveau trinôme n'est-il pas factorisable ? Justifie.

Ex. 8 ★★★ **Vrai ou faux sur la factorisation** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse par un calcul, une preuve ou un contre-exemple.

(a) « $-4x^2-12x-9$ n'a pas de racine, car $\Delta = -12^2 - 4\times(-4)\times(-9) < 0$. »

(b) « Pour tout réel x, $0{,}5x^2 - x - 4 = (x-4)(x+2)$. »

(c) « Le trinôme $3x^2-2x-2$ a pour racines $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$. »

(d) « Si a et c sont de signes contraires, alors ax^2+bx+c a deux racines distinctes. »

(e) « Pour tout réel k, le trinôme x^2+k se factorise en produit de facteurs du premier degré. »

2. *Signe d'un trinôme*

À retenir : ax^2+bx+c est du signe de a, sauf entre ses racines $x_1 < x_2$, où il est du signe de $-a$. Si $\Delta = 0$: signe de a, nul en x_0. Si $\Delta < 0$: signe de a, jamais nul. Ex. : $-(x-1)(x-4) > 0$ sur $]1\,;4[$.

Ex. 9 ★☆☆ **Lire le signe sur une forme factorisée** — Sans calculer Δ, donne l'ensemble des réels x pour lesquels le trinôme est strictement positif.

(a) $4(x-2)(x+5)$ (b) $-3(x+6)(x-1)$ (c) $(5-x)(x+2)$

(d) $2(x-3)^2$ (e) $-(x+4)^2$ (f) $\frac{1}{2}(2x-1)(x+3)$

Ex. 10 ★☆☆ **Δ négatif ou nul : signe sur $\mathbb{R}$** — Calcule Δ, puis donne le signe du trinôme sur $\mathbb{R}$ et dis où il s'annule.

(a) x^2-4x+7 (b) $-2x^2+3x-5$ (c) $4x^2+12x+9$

(d) $-9x^2+6x-1$ (e) $-6x+x^2+10$ (f) $-1-3x^2+2x$

Ex. 11 ★★☆ **Ranger les racines quand $a<0$** — On considère le trinôme $f(x) = -2x^2+5x+3$.

(a) Calcule le discriminant Δ de f.

(b) Calcule $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Laquelle de ces deux racines est la plus petite ?

(c) Complète le tableau de signes de f :

x	-∞	?	?	+∞	
f(x)	?	0	?	0	?

(d) La parabole de f est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ? Sur quel intervalle est-elle strictement au-dessus de l'axe des abscisses ?

Ex. 12 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Inès étudie le signe de $g(x) = 8-2x-x^2$. Elle écrit : « $\Delta = 36 > 0$, racines -4 et 2, donc $g(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-4[\cup]2\,;+\infty[$. »

(a) Donne a, b et c, puis vérifie le discriminant et les racines trouvés par Inès.

(b) Calcule $g(3)$. Inès a-t-elle raison ? Justifie.

(c) Explique l'erreur d'Inès, puis dresse le tableau de signes correct de g.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux sur le signe** — Vrai ou faux ? Justifie : donne un contre-exemple si c'est faux.

(a) « Un trinôme dont le coefficient a est positif est toujours positif. »

(b) Soit $h(x) = 3(x-1)(x-5)$. « Pour $x \in]1\,;5[$, $x-1$ et $x-5$ sont de même signe, donc $h(x) > 0$. »

(c) « Le trinôme $x^2-10x+25$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. »

(d) « La parabole d'équation $y = -x^2+4x-5$ est entièrement sous l'axe des abscisses. »

Ex. 14 ★★★ **Justifier la règle quand $a<0$** — On considère le trinôme $f(x) = 5x-2-3x^2$, défini pour tout réel x.

(a) Repère a, b et c. Calcule Δ, puis les racines de f, rangées dans l'ordre $x_1 < x_2$.

(b) Écris $f(x)$ sous forme factorisée.

(c) Complète le tableau de signes ci-dessous à l'aide de la forme factorisée :

x	-∞	?	?	+∞	
-3	?	?	?		
$x-x_1$	?	?	?	?	
$x-x_2$	?	?	?	?	
f(x)	?	?	?	?	?

(d) On suppose $a<0$ et $x_1 < x_2$. À l'aide de $a(x-x_1)(x-x_2)$, justifie que ce trinôme est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur.

(e) Sans nouveau calcul de Δ, donne l'ensemble des réels x tels que $3x^2-5x+2 > 0$.

Ex. 15 ★★★ **Des racines avec radicaux** — On considère le trinôme $g(x) = 2x^2-4x-1$, défini pour tout réel x. Tu travailles sans calculatrice.

(a) Calcule Δ, puis donne les racines exactes $x_1 < x_2$ de g sous leur forme la plus simple.

(b) Encadre $\sqrt{6}$ entre deux entiers consécutifs. Déduis-en un encadrement de chaque racine entre deux entiers consécutifs.

(c) Dresse le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Sans calculer d'image, donne tous les entiers n tels que $g(n) < 0$.

(e) Lina affirme : « $g(x) < 0$ pour tout $x \in [-0{,}2\,;2{,}2]$. » A-t-elle raison ? Justifie sans valeur approchée.

Ex. 16 ★★★ **Le bénéfice d'un atelier de céramique** — Malo dirige un atelier de céramique. Il produit et vend x centaines de bols, avec $x \in [0\,;20]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = 14x-x^2-40$.

(a) Repère a, b et c. Calcule Δ, puis les racines de B, rangées dans l'ordre croissant.

(b) Dresse le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;20]$.

(c) Pour quelles quantités le bénéfice est-il strictement positif ? Malo affirme : « Plus on produit, plus on gagne. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Les charges fixes augmentent de 10 milliers d'euros, et le bénéfice devient $C(x) = B(x)-10$. Étudie le signe de $C(x)$, puis conclus pour l'atelier.

(e) Plus généralement, les charges augmentent de m milliers d'euros, avec $m > 0$. Pour quelles valeurs de m l'atelier peut-il encore faire un bénéfice strictement positif ?

3. *Inéquations du second degré*

À retenir : Tout dans un membre, puis Δ et racines : le trinôme a le signe de a sauf entre les racines. Stricte : racines exclues ; large : incluses. Jamais de division par x ni de racine des deux membres : $x^2 > 1$ donne $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : lire les solutions** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation (calcule Δ, puis donne l'ensemble des solutions S).

(a) $x^2 - 2x - 15 < 0$ (b) $-2x^2 + 7x - 3 \geqslant 0$

(c) $3x^2 + x - 2 \geqslant 0$ (d) $x^2 + 6x + 9 > 0$

(e) $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$ (f) $2x^2 - x + 3 < 0$

(g) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : tout dans un membre d'abord** — Résous dans $\mathbb{R}$ en passant d'abord tout dans un membre. Ne divise pas par x et ne prends pas la racine des deux membres.

(a) $x^2 \leqslant x + 12$ (b) $x^2 > 6x$

(c) $x^2 < 49$ (d) $3x^2 \geqslant -5x$

(e) $(x-2)(x+5) < 8$ (f) $2x^2 + 5 \geqslant 11x$

Ex. 19 ★★☆ **Cinq élèves, cinq erreurs** — Chaque élève a fait une erreur. Réponds à la question posée, puis donne l'ensemble des solutions correct.

(a) Léa résout $x^2 < 5x$ en divisant par x et trouve $x < 5$. Teste $x = -1$, puis conclus et corrige.

(b) Hugo résout $-x^2 + x + 6 \geqslant 0$, trouve les racines -2 et 3 et écrit $S =]-\infty\,;-2] \cup [3\,;+\infty[$. Explique son erreur.

(c) Inès écrit : « $x^2 \geqslant 36$ donne $x \geqslant 6$ ». Trouve un nombre négatif qui est solution, puis corrige.

(d) Malik trouve que les racines de $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3 et donne $S =]1\,;3[$ pour $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$. Teste $x = 1$, puis explique son erreur.

(e) Zoé résout $x^2 + x - 20 > 0$ et conclut : « $x < -5$ et $x > 4$ ». Explique pourquoi le mot « et » est faux.

Ex. 20 ★★☆ **Où une racine carrée est-elle définie ?** — Rappel : $\sqrt{A}$ existe si et seulement si $A \geqslant 0$. Justifie chaque réponse par le signe d'un trinôme.

(a) Détermine l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$.

(b) Détermine l'ensemble de définition de $g(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$. Combien de nombres contient-il ?

(c) Justifie que $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(d) Détermine l'ensemble de définition de $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$. Attention : k est un quotient.

Ex. 21 ★★☆ **Une inéquation bicarrée** — On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x^4 + 5x^2 - 36 \geqslant 0$.

(a) On pose $X = x^2$. Écris (I) sous la forme d'une inéquation d'inconnue X.

(b) Résous cette inéquation d'inconnue X.

(c) Sachant que $X = x^2$, quelles solutions de la question précédente faut-il écarter ? Justifie.

(d) Déduis-en l'ensemble des solutions de (I).

(e) Vérifie ton résultat en testant $x = 0$, puis $x = -3$ dans (I).

Ex. 22 ★★★ **Développer avant de résoudre** — On considère les inéquations (I) : $(x+3)(x-1) \geqslant 2x + 5$ et (J) : $(2x+1)(x-3) < x - 4$, d'inconnue réelle x.

(a) Développe, passe tout dans un membre et réduis (I) sous la forme $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

(b) Tom « prend la racine » des deux membres et affirme que (I) n'a aucune solution négative. Teste $x = -3$ dans (I), puis conclus.

(c) Résous (I) dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes.

(d) Ramène (J) à la forme $ax^2 + bx + c < 0$, puis résous-la dans $\mathbb{R}$ (racines en valeurs exactes).

(e) Détermine les nombres entiers solutions de (J). Sont-ils aussi solutions de (I) ? Justifie.

Ex. 23 ★★★ **La fusée à eau** — Au club de sciences, une fusée à eau est lancée depuis le sol. Sa hauteur, en mètres, t secondes après le lancement, est $h(t) = -5t^2 + 30t$ pour $t \in [0\,;6]$.

(a) Résous $h(t) > 25$ sur $[0\,;6]$. Pendant combien de temps la fusée est-elle à plus de 25 m ?

(b) Mehdi affirme que la fusée dépasse 50 m. Résous $h(t) \geqslant 50$. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Résous $h(t) \geqslant 45$. Déduis-en la hauteur maximale atteinte et l'instant où elle est atteinte.

(d) Détermine sur $[0\,;6]$ les instants où $25 < h(t) < 40$. Combien de temps cela dure-t-il au total ?

Ex. 24 ★★★ **Une inéquation qui dépend de m** — Soit m un nombre réel. On étudie l'inéquation (I_m) : $x^2 - 2x + m \leqslant 0$, d'inconnue réelle x.

(a) Résous (I_m) dans $\mathbb{R}$ pour $m = -3$.

(b) Calcule le discriminant Δ de $x^2 - 2x + m$ en fonction de m.

(c) Pour quelles valeurs de m l'inéquation (I_m) n'a-t-elle aucune solution ? Justifie.

(d) Pour quelle valeur de m l'inéquation (I_m) a-t-elle une seule solution ? Donne cette solution.

(e) Pour $m < 1$, exprime les racines en fonction de m, puis trouve m pour que S soit un intervalle de longueur 6.

4. *Inéquations produit et quotient*

À retenir : Valeurs interdites d'abord. Une ligne par facteur, puis celle du résultat ; $mx+p$ a le signe de m à droite de $-\frac{p}{m}$. Double barre = crochet ouvert. Ne multiplie pas par un dénominateur de signe inconnu : $\frac{1}{x} > 2 \iff \frac{1-2x}{x} > 0$.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : le signe d'un facteur** — Pour chaque expression, donne la valeur de x qui l'annule (s'il y en a une), puis l'intervalle où elle est strictement positive.

(a) $3x-12$ (b) $-2x+10$

(c) $7-2x$ (d) $4x+6$

(e) $-3x-9$ (f) $(x-5)^2+2$

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : résoudre en deux lignes** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation en deux lignes au plus. Repère d'abord les valeurs interdites.

(a) $(x-2)(x+5)<0$ (b) $\frac{x+1}{x-4}\geqslant 0$

(c) $(3-x)(x+2)\geqslant 0$ (d) $(x-6)^2(x+1)\leqslant 0$

(e) $\frac{x^2+4}{2x-1}>0$ (f) $\frac{-4}{x+2}>0$

Ex. 27 ★★☆ **Un tableau à compléter, puis à exploiter** — On pose $f(x)=\frac{6-3x}{x+4}$ pour $x\neq -4$.

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
6 − 3x	?	?	?	?	?
x + 4	?	?	?	?	?
f(x)	?	?	?	?	?

(a) Recopie et complète le tableau de signes : une ligne par facteur, puis la ligne de $f(x)$.

(b) Résous $f(x)\geqslant 0$. Justifie chaque crochet.

(c) Résous $f(x)<0$.

(d) Mets $f(x)+3$ au même dénominateur, puis résous $f(x)\geqslant -3$.

Ex. 28 ★★☆ **Quatre élèves, quatre erreurs** — Chaque élève s'est trompé. Trouve l'erreur, puis corrige la résolution.

(a) Léna résout $\frac{2}{x}>5$: « Je multiplie par x : $2>5x$, donc $S=]-\infty\,;\frac{2}{5}[$. »

(b) Hugo résout $\frac{x-5}{x+2}\geqslant 0$ et trouve $S=]-\infty\,;-2]\cup[5\,;+\infty[$.

(c) Inès résout $(-x^2+4x-3)(x^2+1)\geqslant 0$: « Le trinôme a pour racines 1 et 3, donc $S=]-\infty\,;1]\cup[3\,;+\infty[$. »

(d) Tom résout $\frac{x^2-9}{x-3}\geqslant 0$: « Je simplifie, ça donne $x+3\geqslant 0$, donc $S=[-3\,;+\infty[$. »

Ex. 29 ★★☆ **Trois valeurs à ranger** — On pose $q(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{4-x}$.

(a) Calcule le discriminant du numérateur, puis ses racines.

(b) Range dans l'ordre croissant toutes les valeurs à placer sur la ligne des x. Indique laquelle est interdite.

(c) Dresse le tableau de signes de $q(x)$: une ligne par facteur, puis la ligne du résultat.

(d) Résous $q(x)\geqslant 0$. Justifie les crochets.

Ex. 30 ★★★ **Un dénominateur qui change de signe** — On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\frac{5x-1}{3-x}\leqslant x$.

(a) Malik écrit : « Je multiplie par $3-x$, donc $5x-1\leqslant 3x-x^2$. » Vérifie que 4 est solution de (I) mais pas de l'inéquation de Malik, puis explique son erreur.

(b) Donne la valeur interdite. Passe tout dans un membre de (I) et réduis au même dénominateur pour obtenir un quotient comparé à 0.

(c) Calcule le discriminant du numérateur obtenu, puis ses racines exactes $x_1<x_2$. Range x_1, x_2 et la valeur interdite dans l'ordre croissant, en justifiant.

(d) Dresse le tableau de signes (une ligne par facteur, attention au signe de $3-x$), puis donne l'ensemble des solutions de (I).

Ex. 31 ★★★ **Une racine commune en haut et en bas** — On pose $q(x)=\dfrac{(x-2)^2(x^2+x+3)}{x^2-5x+6}$.

(a) Montre que $x^2+x+3>0$ pour tout réel x. Que peut-on faire de ce facteur dans le tableau de signes ?

(b) Factorise x^2-5x+6, puis donne les valeurs interdites de q.

(c) Dresse le tableau de signes de $q(x)$: une ligne par facteur, puis la ligne de $q(x)$.

(d) Juliette simplifie $q(x)$ et affirme que 2 est solution de $q(x)\geqslant 0$. A-t-elle raison ? Justifie, puis résous $q(x)\geqslant 0$.

(e) Résous $p(x)\geqslant 0$, où $p(x)=(x-2)^2(x^2+x+3)(x^2-5x+6)$. Compare avec la question précédente et explique la différence.

Ex. 32 ★★★ **Le coût moyen d'un atelier de confitures** — Un atelier produit q tonnes de confiture, avec $q\in]0\,;20]$. Le coût total est $C(q)=q^2+10q+144$ (en centaines d'euros). Le coût moyen est $CM(q)=\frac{C(q)}{q}$. Le prix de vente d'une tonne est $p(q)=50-q$ (en centaines d'euros).

(a) Zoé dit : « Pour résoudre $CM(q)\leqslant 35$, je peux multiplier les deux membres par q sans changer le sens. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Résous $CM(q)\leqslant 35$ sur $]0\,;20]$.

(c) On pose $u(q)=p(q)-CM(q)$, le bénéfice par tonne. Écris $u(q)$ sous la forme d'un seul quotient.

Ex. 32 **(suite)**

(d) Résous $u(q) > 0$ sur $]0\,;20]$ (valeurs exactes), puis donne les bornes arrondies au centième.

(e) Pour quelles quantités a-t-on à la fois $CM(q) \leqslant 35$ et $u(q) > 0$? Justifie le rangement des bornes sans calculatrice.

5. *Position relative de deux courbes*

À retenir : J'étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$, dans cet ordre : $d > 0$ donne $\mathcal{C}_f$ au-dessus, $d = 0$ donne un point commun $(x\,;f(x))$. Le signe $-$ porte sur tout $g(x)$: $f(x) - (2x-1) = f(x) - 2x + 1$.

Ex. 33 ★☆☆ **Réduire la différence f(x) − g(x)** — Automatismes. Dans chaque item, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et on note $d(x) = f(x) - g(x)$.

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 4x - 5$: réduis $d(x)$.

(b) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ et $g(x) = -3x + 7$: réduis $d(x)$.

(c) $f(x) = x^2 + 5x$ et $g(x) = 3x - 2$. Noé écrit $d(x) = x^2 + 5x - 3x - 2$. Corrige son erreur, puis réduis $d(x)$.

(d) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^2 + x - 6$: réduis $d(x)$. Quelle est la nature de la fonction d ?

(e) $f(x) = 3x^2 + 2x$ et $g(x) = 3x^2 - 4x + 9$: résous $f(x) = g(x)$.

(f) $f(x) = -x^2 + 5$ et $g(x) = -2x^2 + x - 1$: réduis $g(x) - f(x)$, puis $d(x)$. Quel lien vois-tu entre les deux ?

Ex. 34 ★☆☆ **Traduire un signe en position** — Automatismes. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$; leurs courbes sont $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(a) On sait que $f(x) - g(x) > 0$ sur $]2\,;+\infty[$. Quelle courbe est au-dessus sur cet intervalle ?

(b) On sait que $g(x) - f(x) > 0$ sur $]-1\,;4[$. Quelle courbe est au-dessus sur cet intervalle ?

(c) On sait que $f(x) - g(x) = (x-1)(x-5)$. Quelle courbe est au-dessus sur $]1\,;5[$?

(d) On sait que $f(x) - g(x) = -2(x+3)^2$ et $g(x) = 2x + 1$. Donne la position des courbes et leur point commun.

(e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Sur quel intervalle $\mathcal{C}_f$ est-elle en dessous de l'axe des abscisses ?

(f) On sait que $f(3) = g(3)$ et $g(x) = 5 - x$. Donne le point commun d'abscisse 3.

Ex. 35 ★☆☆ **Compter les points communs** — Pour chaque couple, calcule le discriminant de $d(x) = f(x) - g(x)$. Donne ensuite le nombre de points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = x - 2$. Quelle courbe est au-dessus ?

(b) $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = -3x - 1$. Donne le point commun.

Ex. 35 **(suite)**

(c) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = x + 1$. Donne les abscisses des points communs.

(d) $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + 4x - 3$. Donne le point commun.

(e) $f(x) = -x^2 + x - 2$ et $g(x) = 3x$. Quelle courbe est au-dessus ?

Ex. 36 ★★☆ **L'erreur de Lina** — On pose $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ et $g(x) = x + 5$. Lina écrit : « $f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x - 1 - x + 5 = 2x^2 - 4x + 4$, $\Delta = -16 < 0$, donc les courbes ne se coupent pas. »

(a) Repère l'erreur de Lina et donne la forme réduite correcte de $d(x) = f(x) - g(x)$.

(b) Calcule le discriminant de $d(x)$, puis ses racines.

(c) Complète le tableau de signes de $d(x)$:

x	-∞	?	?	+∞	
d(x)	?	0	?	0	?

(d) Déduis-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(e) Donne les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

Ex. 37 ★★☆ **Une droite connue par un tableau de valeurs** — Inès étudie la parabole $\mathcal{C}_f$ de $f(x) = x^2 - 4x + 6$ et la droite $\mathcal{C}_g$ d'une fonction affine g. Elle ne connaît g que par ce tableau de valeurs :

x	0	2	4
g(x)	5	1	-3

(a) À l'aide du tableau, détermine l'expression de $g(x)$.

(b) Réduis $d(x) = f(x) - g(x)$, puis calcule son discriminant.

(c) Déduis-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et leur(s) point(s) commun(s).

(d) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ex. 38 ★★★ **Une parabole face à l'axe et à trois droites** — Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $g(x) = 2x - 8$ et $k(x) = -2x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_k$ leurs courbes.

(a) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses. Donne les points où elle coupe cet axe.

(b) Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Donne les coordonnées de leurs points communs.

(c) Montre que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_k$ n'ont aucun point commun. Quelle courbe est au-dessus de l'autre ?

(d) Détermine l'ensemble des réels x pour lesquels $\mathcal{C}_f$ est à la fois strictement au-dessus de l'axe des abscisses et strictement en dessous de la droite d'équation $y = x + 1$.

Ex. 39 ★★★ **Des droites qui pivotent autour d'un point** — On pose $f(x) = x^2 + 2x + 3$, de courbe $\mathcal{P}$. Pour tout réel m, D_m est la droite d'équation $y = mx - 1$, et on note $d_m(x) = f(x) - (mx - 1)$.

(a) Vérifie que toutes les droites D_m passent par un même point A, puis écris $d_m(x)$ sous forme réduite.

(b) Calcule le discriminant Δ de $d_m(x)$ en fonction de m, puis factorise-le.

(c) Pour quelles valeurs de m la droite D_m touche-t-elle $\mathcal{P}$ en un seul point ? Donne à chaque fois les coordonnées de ce point.

(d) Détermine les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{P}$ est strictement au-dessus de D_m sur $\mathbb{R}$. Justifie.

(e) Dans le cas $m = 7$, étudie la position relative de $\mathcal{P}$ et D_7 et donne les coordonnées de leurs points d'intersection.

Ex. 40 ★★★ **Une parabole connue par un tableau de valeurs** — Maëlle sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme, mais elle ne le connaît que par ce tableau de valeurs. On pose aussi $g(x) = 2x^2 + x - 6$ et $h(x) = -x^2 + x + 2$.

x	−1	0	1	2
f(x)	3	−2	−3	0

(a) À l'aide de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$, détermine a, b et c.

(b) Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = -2$, puis donne leurs points communs.

(c) Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, puis donne les coordonnées de leurs points communs.

(d) Tom étudie $h(x) - f(x)$, la trouve strictement positive sur $]-\frac{2}{3}\,;2[$ et conclut que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_h$ sur cet intervalle. A-t-il raison ? Justifie, puis donne les points communs.

6. *Problèmes : signe constant, paramètre, situations concrètes*

À retenir : « Pour tout réel x » : $ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0$ et $\Delta < 0$ (pour $\geqslant 0$: $\Delta \leqslant 0$). Si a dépend de m, étudie à part la valeur qui l'annule. Ex. : $x^2 + x + m > 0$ sur $\mathbb{R} \iff 1 - 4m < 0 \iff m > \frac{1}{4}$. En contexte, garde le domaine de la variable.

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : signe constant ou non ?** — Pour chaque trinôme, calcule Δ. Est-il de signe constant sur $\mathbb{R}$? Si oui, donne ce signe (strict ou large).

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

(b) $g(x) = -x^2 + 4x - 7$

(c) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$

(d) $k(x) = x^2 - x - 6$

(e) $p(x) = -3x^2 + x - 1$

Ex. 41 (suite)

(f) $q(x) = -4x^2 + 12x - 9$

Ex. 42 ★★☆ **Automatismes : condition sur m** — Détermine l'ensemble des réels m pour lesquels la propriété est vraie (regarde le signe de a, puis écris l'inéquation en m sur Δ).

(a) $x^2 + mx + 25 > 0$ pour tout réel x.

(b) $x^2 - 2mx + 4m \geqslant 0$ pour tout réel x.

(c) $-x^2 + 6x + m < 0$ pour tout réel x.

(d) $3x^2 + mx + m > 0$ pour tout réel x.

(e) $-2x^2 + mx - 8 \leqslant 0$ pour tout réel x.

(f) $x^2 + 3x + m < 0$ pour tout réel x.

Ex. 43 ★★☆ **Quand le coefficient a dépend de m** — Pour un réel m, on pose $P(x) = (m-2)x^2 + 4x + m + 1$. On cherche les réels m tels que $P(x) > 0$ pour tout réel x.

(a) Pour $m = 2$, écris $P(x)$. A-t-on $P(x) > 0$ pour tout réel x ? Justifie.

(b) On suppose $m \neq 2$. Calcule le discriminant Δ de P en fonction de m, puis factorise-le.

(c) Dresse le tableau de signes de Δ selon les valeurs de m.

(d) Déduis-en l'ensemble des réels m tels que $P(x) > 0$ pour tout réel x.

Ex. 44 ★★☆ **Nombre de solutions selon m** — Pour un réel m, on considère l'équation $(E) : x^2 + mx + 4 = 0$.

(a) Calcule le discriminant Δ de (E) en fonction de m, puis factorise-le.

(b) Complète le tableau de signes :

m	-∞	-4	4	+∞	
m + 4	?	0	?	?	
m − 4	?	?	0	?	
Δ	?	0	?	0	?

(c) Donne le nombre de solutions de (E) selon les valeurs de m.

(d) Pour chaque valeur de m où (E) a une seule solution, calcule cette solution.

(e) Pour quels réels m la droite d'équation $y = -mx$ et la parabole d'équation $y = x^2 + 4$ n'ont-elles aucun point commun ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Trois situations concrètes** — Pour chaque situation, écris l'inéquation, résous-la en tenant compte du domaine de la variable, puis conclus par une phrase avec l'unité.

(a) Un artisan vend q objets ($0 \leqslant q \leqslant 50$). Son bénéfice, en euros, vaut $B(q) = -q^2 + 40q - 300$. Pour quels q ce bénéfice est-il strictement positif ?

Ex. 45 **(suite)**

(b) Un potager rectangulaire a un périmètre de 24 m. On note x la longueur d'un côté, en m. Exprime son aire $A(x)$ et donne le domaine de x.

(c) Pour quelles valeurs de x l'aire du potager est-elle au moins égale à 27 m² ?

(d) Nora lance une balle depuis un balcon. Sa hauteur, en m, vaut $h(t) = -5t^2 + 10t + 20$ pour $t \in [0\,;3{,}2]$, en s. Quand la balle est-elle à plus de 5 m ?

Ex. 46 ★★★ **Un trinôme à paramètre de signe constant** — Pour un réel m, on pose $P(x) = mx^2 + (m+3)x + m$.

(a) Pour $m = 0$, écris $P(x)$. A-t-on $P(x) < 0$ pour tout réel x ? Justifie.

(b) On suppose $m \neq 0$. Calcule le discriminant Δ de P en fonction de m, factorise-le et dresse son tableau de signes selon m.

(c) Détermine l'ensemble des réels m tels que $P(x) < 0$ pour tout réel x.

(d) Détermine l'ensemble des réels m tels que $P(x) \leqslant 0$ pour tout réel x. Pour la plus grande valeur obtenue, factorise $P(x)$ et vérifie.

(e) Lucas affirme : « Pour $m = 4$, on a $\Delta < 0$, donc $P(x) < 0$ pour tout réel x. » A-t-il raison ? Pour quels m a-t-on $P(x) > 0$ pour tout réel x ?

Ex. 47 ★★★ **Une parabole et une famille de droites** — Dans un repère, $\mathcal{C}$ est la parabole d'équation $y = x^2 + 3x + 1$. Pour un réel m, D_m est la droite d'équation $y = mx - 8$.

(a) Montre que les abscisses des points communs à $\mathcal{C}$ et D_m sont les solutions de l'équation $x^2 + (3-m)x + 9 = 0$.

(b) Calcule le discriminant Δ de cette équation en fonction de m, puis factorise-le.

(c) Déduis-en, selon les valeurs de m, le nombre de points communs à $\mathcal{C}$ et D_m.

(d) Pour chaque valeur de m qui donne un seul point commun, calcule les coordonnées de ce point.

(e) Pour $m = 10$, étudie la position relative de $\mathcal{C}$ et de D_{10}.

Ex. 48 ★★★ **L'enclos de Lina** — Lina a 30 m de grillage. Elle veut clôturer un enclos rectangulaire pour ses poules, appuyé contre un mur : le côté du mur n'a pas besoin de grillage. On note x la longueur, en m, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

(a) Exprime en fonction de x la longueur du côté parallèle au mur. Justifie que $x \in]0\,;15[$, puis montre que l'aire de l'enclos vaut $A(x) = -2x^2 + 30x$.

(b) Détermine les valeurs de x pour lesquelles l'aire est d'au moins 104 m².

(c) La place est limitée : Lina veut une aire d'au plus 72 m². Détermine les valeurs de x possibles.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Hugo affirme : « Avec ce grillage, on peut obtenir un enclos de 120 m². » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Soit $k > 0$. Détermine les réels k pour lesquels l'inéquation $A(x) \geqslant k$ a au moins une solution. Déduis-en l'aire maximale et la valeur de x correspondante.