1re spécialité / Signe du trinôme et inéquations — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels : racines et forme factorisée*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : calculer un discriminant**

(a) $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 > 0$: deux racines.

(b) $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 4 + 96 = 100 > 0$: deux racines
($c < 0$, donc $-4ac$ s'ajoute).

(c) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 36 - 36 = 0$: une seule racine.

(d) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 4 - 48 = -44 < 0$: aucune racine.

(e) $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 > 0$: deux racines.

(f) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 16 + 20 = 36 > 0$: deux racines.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : factoriser sans discriminant**

(a) $x^2 + 6x = x(x + 6)$.

(b) $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x - 4)(3x + 4)$.

(c) $-3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$.

(d) $2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x - 5)(x + 5)$: on garde le facteur 2.

(e) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.

(f) $49 - x^2 = (7 - x)(7 + x)$, soit $-(x - 7)(x + 7)$.

Ex. 3 ★☆☆ **Factoriser avec le discriminant**

(a) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64$, racines $\frac{-2-8}{2} = -5$ et $\frac{-2+8}{2} = 3$.
Donc $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$.

(b) $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$, racines $\frac{-7-5}{4} = -3$ et $\frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$.
Donc $2x^2 + 7x + 3 = 2(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 3)(2x + 1)$.

(c) $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 20 = 1 + 80 = 81$, racines $\frac{-1+9}{-2} = -4$ et $\frac{-1-9}{-2} = 5$.
Donc $-x^2 + x + 20 = -(x + 4)(x - 5)$: on n'oublie pas $a = -1$.

Ex. 3 (suite)

(d) $\Delta = 8^2 - 4 \times 16 \times 1 = 64 - 64 = 0$, $x_0 = -\frac{8}{2 \times 16} = -\frac{1}{4}$.
Donc $16x^2 + 8x + 1 = 16\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = (4x + 1)^2$.

(e) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$: pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

(f) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64$, racines $\frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}$.
Donc $4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x + 1)(2x - 3)$.

Ex. 4 ★★☆ **Racine évidente**

(a) $3 - 10 + 7 = 0$, donc $f(1) = 0$: 1 est une racine évidente de f.

(b) $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 100 - 84 = 16$. Les racines sont $\frac{10-4}{6} = 1$ et $\frac{10+4}{6} = \frac{7}{3}$. L'autre racine est donc $\frac{7}{3}$.

(c) $f(x) = 3(x - 1)\left(x - \frac{7}{3}\right) = (x - 1)(3x - 7)$. Contrôle : $(x - 1)(3x - 7) = 3x^2 - 7x - 3x + 7 = 3x^2 - 10x + 7$.

(d) $g(1) = -4 + 7 - 3 = 0$, donc 1 est racine. Le terme constant de $-4(x - 1)(x - r)$ vaut $-4 \times (-1) \times (-r) = -4r$. Il doit valoir -3, donc $r = \frac{3}{4}$.
Conclusion : $g(x) = -4(x - 1)\left(x - \frac{3}{4}\right) = -(x - 1)(4x - 3)$.

Ex. 5 ★★☆ **Repérer les erreurs d'Inès**

(a) Comme $c = -2 < 0$, $-4 \times 5 \times (-2) = +40$.
Donc $\Delta = 9 + 40 = 49$, et non -31.

(b) Elle divise par 2 au lieu de $2a = 10$. Les bonnes racines sont $x_1 = \frac{-3-7}{10} = -1$ et $x_2 = \frac{-3+7}{10} = \frac{2}{5}$.

(c) Elle oublie le coefficient $a = 5$ devant. On a donc $f(x) = 5(x + 1)\left(x - \frac{2}{5}\right) = (x + 1)(5x - 2)$. Attention : la racine -1 donne le facteur $x + 1$.

(d) $(x + 1)(5x - 2) = 5x^2 - 2x + 5x - 2 = 5x^2 + 3x - 2$.
On retrouve bien $f(x)$, donc la forme factorisée est correcte.

Ex. 6 ★★★ **Simplifier un quotient de trinômes**

(a) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 > 0$ et $\sqrt{49} = 7$. Les racines sont $x_1 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$.
Donc $f(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (2x + 1)(3x - 2)$. On contrôle en développant : $6x^2 - 4x + 3x - 2 = 6x^2 - x - 2$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 25 - 24 = 1 > 0$. Les racines sont $\frac{-5-1}{-6} = 1$ et $\frac{-5+1}{-6} = \frac{2}{3}$. Contrôle : $a + b + c = -3 + 5 - 2 = 0$, donc 1 est bien une racine. On garde $a = -3$ devant : $g(x) = -3(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = -(x-1)(3x-2) = (1-x)(3x-2)$.

(c) $h(x)$ existe si et seulement si $g(x) \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq 1$ et $x \neq \frac{2}{3}$.
Donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\,;1\right\}$.

(d) Pour $x \in \mathcal{D}_h$, on a $h(x) = \frac{(2x+1)(3x-2)}{(1-x)(3x-2)}$. Comme $3x - 2 \neq 0$ sur $\mathcal{D}_h$, on peut simplifier : $h(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

(e) Non. Sur $\mathcal{D}_h$, $h(x) = 0$ équivaut à $2x + 1 = 0$, c'est-à-dire à $x = -\frac{1}{2}$, qui est bien autorisé. L'autre racine de f, $\frac{2}{3}$, est une valeur interdite : on l'élimine. L'équation n'a donc qu'une seule solution : $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Tom a tort.

Ex. 7 ★★★ **Retrouver un trinôme à racines irrationnelles**

(a) On reconnaît $(A+B)(A-B)$ avec $A = x - 2$ et $B = \sqrt{3}$: $(x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$.

(b) f a deux racines distinctes, $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, donc $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) = a(x^2 - 4x + 1)$. Comme $f(0) = a \times 1 = a$ et $f(0) = -2$, on a $a = -2$.
Donc $f(x) = -2x^2 + 8x - 2$.

(c) $\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 64 - 16 = 48 > 0$ et $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Les racines sont $\frac{-8-4\sqrt{3}}{-4} = 2 + \sqrt{3}$ et $\frac{-8+4\sqrt{3}}{-4} = 2 - \sqrt{3}$. On retrouve bien les racines de l'énoncé.

(d) Le nouveau trinôme est $-2x^2 + 8x + m$. Son discriminant vaut $\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times m = 64 + 8m$. Il a une seule racine si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $m = -8$. Alors $x_0 = -\frac{8}{2 \times (-2)} = 2$, et $-2x^2 + 8x - 8 = -2(x-2)^2$.

(e) Il n'est pas factorisable si et seulement si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $64 + 8m < 0$, soit $m < -8$. Pour $m \in]-\infty\,;-8[$, le trinôme n'a pas de racine : il n'y a pas de factorisation en produit de facteurs du premier degré.

Ex. 8 ★★★ **Vrai ou faux sur la factorisation**

(a) Faux. Il manque les parenthèses : $(-12)^2 = 144$. Alors $\Delta = 144 - 4 \times (-4) \times (-9) = 144 - 144 = 0$. Le trinôme a une seule racine, $x_0 = -\frac{-12}{2 \times (-4)} = -\frac{3}{2}$.
Donc $-4x^2 - 12x - 9 = -4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -(2x+3)^2$.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Faux. Pour $x = 0$, le membre de gauche vaut -4 et celui de droite vaut $(-4) \times 2 = -8$. Ici $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0{,}5 \times (-4) = 1 + 8 = 9$, et les racines sont $\frac{1-3}{1} = -2$ et $\frac{1+3}{1} = 4$. Il manque le coefficient a : la bonne égalité est $0{,}5x^2 - x - 4 = 0{,}5(x-4)(x+2)$.

(c) Vrai. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 4 + 24 = 28 > 0$ et $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Les racines sont $\frac{2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{2+2\sqrt{7}}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$.

(d) Vrai. Si a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$. Comme $b^2 \geqslant 0$, on obtient $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: le trinôme a deux racines distinctes.

(e) Faux. Contre-exemple : $k = 4$. Pour $x^2 + 4$, on a $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 < 0$: aucune racine, donc pas de factorisation. La propriété n'est vraie que si $k \leqslant 0$, par exemple $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

2. *Signe d'un trinôme*

Ex. 9 ★☆☆ **Lire le signe sur une forme factorisée**

(a) Racines -5 et 2, $a = 4 > 0$: le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines. Il est strictement positif sur $]-\infty\,;-5[\cup]2\,;+\infty[$.

(b) Racines -6 et 1, $a = -3 < 0$: il est négatif à l'extérieur et du signe de $-a$, donc positif, entre les racines. Il est strictement positif sur $]-6\,;1[$.

(c) $(5-x)(x+2) = -(x-5)(x+2) = -x^2 + 3x + 10$, donc $a = -1 < 0$. Racines -2 et 5 : il est positif entre les racines, sur $]-2\,;5[$.

(d) $a = 2 > 0$ et racine double 3 : le trinôme est positif sur $\mathbb{R}$ et nul seulement en 3. Il est strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(e) $a = -1 < 0$ et racine double -4 : le trinôme est négatif ou nul pour tout réel. Il n'est jamais strictement positif : $S = \varnothing$.

(f) $\frac{1}{2}(2x-1)(x+3) = (x - \frac{1}{2})(x+3)$, donc $a = 1 > 0$. Racines -3 et $\frac{1}{2}$: il est positif à l'extérieur, sur $]-\infty\,;-3[\cup]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

Ex. 10 ★☆☆ **Δ négatif ou nul : signe sur $\mathbb{R}$**

(a) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12 < 0$ et $a = 1 > 0$: le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Il ne s'annule jamais.

(b) $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 - 40 = -31 < 0$ et $a = -2 < 0$: le trinôme est strictement négatif sur $\mathbb{R}$. Il ne s'annule jamais.

Ex. 10 **(suite)**

(c) $\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$, $x_0 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ et $a = 4 > 0$: le trinôme est positif sur $\mathbb{R}$, nul seulement en $-\frac{3}{2}$.

(d) $\Delta = 6^2 - 4 \times (-9) \times (-1) = 36 - 36 = 0$, $x_0 = -\frac{6}{-18} = \frac{1}{3}$ et $a = -9 < 0$: le trinôme est négatif sur $\mathbb{R}$, nul seulement en $\frac{1}{3}$.

(e) On ordonne : $x^2 - 6x + 10$, donc $a = 1$, $b = -6$, $c = 10$. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 36 - 40 = -4 < 0$ et $a > 0$: strictement positif sur $\mathbb{R}$, jamais nul.

(f) On ordonne : $-3x^2 + 2x - 1$, donc $a = -3$, $b = 2$, $c = -1$. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 4 - 12 = -8 < 0$ et $a < 0$: strictement négatif sur $\mathbb{R}$, jamais nul.

Ex. 11 ★★☆ **Ranger les racines quand a < 0**

(a) $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$. $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 > 0$: f a deux racines.

(b) $\frac{-5-7}{-4} = 3$ et $\frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$. Comme $a < 0$, la formule avec « $-\sqrt{\Delta}$ » donne la plus grande racine.
Donc $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$. Contrôle : $f(x) = -2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$.

(c) $a = -2 < 0$: f est négatif à l'extérieur des racines et positif entre.

x	-∞	$-\frac{1}{2}$	3	+∞	
f(x)	−	0	+	0	−

Contrôle : $f(0) = 3 > 0$.

(d) $a = -2 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas. Elle est strictement au-dessus de l'axe des abscisses quand $f(x) > 0$, c'est-à-dire sur $]-\frac{1}{2}\,;3[$.

Ex. 12 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) On ordonne : $g(x) = -x^2 - 2x + 8$, donc $a = -1$, $b = -2$, $c = 8$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 4 + 32 = 36$. Racines : $\frac{2-6}{-2} = 2$ et $\frac{2+6}{-2} = -4$. Son discriminant et ses racines sont justes.

(b) $g(3) = 8 - 6 - 9 = -7 < 0$, alors que 3 appartient à $]2\,;+\infty[$. Inès a donc tort : g n'est pas positif sur cet intervalle.

(c) Inès a dit « positif à l'extérieur » au lieu de « signe de a à l'extérieur ». Ici $a = -1 < 0$: g est négatif à l'extérieur des racines et positif entre.

x	-∞	-4	2	+∞	
g(x)	−	0	+	0	−

Contrôle : $g(0) = 8 > 0$.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux sur le signe**

(a) Faux. Contre-exemple : $x^2 - x - 2$ a $a = 1 > 0$, mais en 0 il vaut $-2 < 0$. Ce trinôme a deux racines, -1 et 2, et il est négatif entre elles.

(b) Faux. Si $1 < x < 5$, alors $x - 1 > 0$ et $x - 5 < 0$: le produit $(x - 1)(x - 5)$ est négatif. Comme $3 > 0$, on a $h(x) < 0$ sur $]1\,;5[$. Par exemple, $h(2) = -9$.

(c) Faux. $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$ et $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, qui est nul en 5. Le trinôme est positif, mais pas strictement en 5.

(d) Vrai. $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = -1 < 0$: le trinôme est strictement négatif sur $\mathbb{R}$. La parabole est donc toujours sous l'axe des abscisses.

Ex. 14 ★★★ **Justifier la règle quand a < 0**

(a) On range les termes dans l'ordre : $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$, donc $a = -3$, $b = 5$ et $c = -2$. $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 25 - 24 = 1 > 0$. Il y a deux racines : $\frac{-5-1}{2\times(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$ et $\frac{-5+1}{-6} = \frac{2}{3}$. Comme $a < 0$, la formule $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ donne la plus grande racine. Donc $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.

(b) $f(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1)$.

(c) Le facteur -3 est toujours négatif. $x - \frac{2}{3}$ s'annule en $\frac{2}{3}$ et $x - 1$ s'annule en 1. On applique la règle des signes à chaque ligne :

x	-∞	$\frac{2}{3}$	1	+∞	
-3	−	−	−		
$x - \frac{2}{3}$	−	0	+	+	
$x - 1$	−	−	0	+	
f(x)	−	0	+	0	−

f est donc négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.

(d) Si $x_1 < x < x_2$: $x - x_1 > 0$ et $x - x_2 < 0$, donc le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est négatif. Multiplié par $a < 0$, il devient positif. Si $x < x_1$: les deux facteurs sont négatifs, leur produit est positif, et le trinôme a le signe de a, donc il est négatif. Si $x > x_2$: les deux facteurs sont positifs et le trinôme est encore négatif. Le trinôme a donc le signe de a à l'extérieur des racines et le signe de $-a$ entre elles.

(e) $3x^2 - 5x + 2 = -(-3x^2 + 5x - 2) = -f(x)$.
Donc $3x^2 - 5x + 2 > 0$ équivaut à $f(x) < 0$. D'après le tableau de signes de f, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty\,;\frac{2}{3}[\,\cup\,]1\,;+\infty[$
(crochets ouverts, car les racines annulent le trinôme).

Ex. 15 ★★★ **Des racines avec radicaux**

(a) $a = 2$, $b = -4$ et $c = -1$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 16 + 8 = 24 > 0$, et $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. On obtient $x_1 = \frac{4-2\sqrt{6}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(b) $4 < 6 < 9$, donc $2 < \sqrt{6} < 3$, puis $1 < \frac{\sqrt{6}}{2} < 1{,}5$. On en déduit $-0{,}5 < x_1 < 0$, donc $-1 < x_1 < 0$. De même, $2 < x_2 < 2{,}5$, donc $2 < x_2 < 3$.

(c) $a = 2 > 0$: g est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	-∞	x_1	x_2	+∞	
g(x)	+	0	−	0	+

Ici, $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(d) $g(n) < 0$ quand $x_1 < n < x_2$. Comme $-1 < x_1 < 0$ et $2 < x_2 < 3$, les entiers qui conviennent sont $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

(e) $g(x) < 0$ exactement sur $]x_1\,;x_2[$. Il suffit donc que $x_1 < -0{,}2$ et $x_2 > 2{,}2$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{6}}{2} > 1{,}2$, soit $\sqrt{6} > 2{,}4$. Or $2{,}4^2 = 5{,}76 < 6$ et les deux nombres sont positifs, donc $\sqrt{6} > 2{,}4$. Ainsi $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < 1 - 1{,}2 = -0{,}2$ et $x_2 > 1 + 1{,}2 = 2{,}2$.
Donc $[-0{,}2\,;2{,}2]$ est inclus dans $]x_1\,;x_2[$: Lina a raison.

Ex. 16 ★★★ **Le bénéfice d'un atelier de céramique**

(a) $B(x) = -x^2 + 14x - 40$, donc $a = -1$, $b = 14$ et $c = -40$. $\Delta = 14^2 - 4 \times (-1) \times (-40) = 196 - 160 = 36 > 0$. Les racines sont $\frac{-14-6}{-2} = 10$ et $\frac{-14+6}{-2} = 4$. Dans l'ordre croissant : $x_1 = 4$ et $x_2 = 10$.

(b) $a = -1 < 0$: B est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

x	0	4	10	20	
B(x)	−	0	+	0	−

(c) $B(x) > 0$ pour $x \in]4\,;10[$: il faut produire strictement entre 400 et 1 000 bols. Malo a tort. Par exemple, $B(15) = -225 + 210 - 40 = -55 < 0$: au-delà de 1 000 bols, l'atelier est en perte.

(d) $C(x) = -x^2 + 14x - 50$. $\Delta = 14^2 - 4 \times (-1) \times (-50) = 196 - 200 = -4 < 0$. $C(x)$ n'a donc pas de racine et garde le signe de $a = -1$: $C(x) < 0$ pour tout x. L'atelier est en perte quelle que soit la quantité produite.

Ex. 16 (suite)

(e) Le bénéfice devient $-x^2 + 14x - 40 - m$. $\Delta = 14^2 - 4 \times (-1) \times (-40 - m) = 196 - 160 - 4m = 36 - 4m$. Si $m \geqslant 9$, alors $\Delta \leqslant 0$ et le trinôme garde le signe de $a = -1$: il est négatif ou nul partout, donc il n'y a jamais de bénéfice strictement positif. Pour $m = 9$, on obtient $-(x-7)^2$, qui ne dépasse jamais 0. Si $0 < m < 9$, alors $\Delta > 0$: les racines $7 \pm \sqrt{9-m}$ sont dans $[4\,;10]$, donc dans $[0\,;20]$, et le bénéfice est positif entre elles. Conclusion : il faut $0 < m < 9$.

3. *Inéquations du second degré*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : lire les solutions**

(a) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64$. Les racines sont $\frac{2-8}{2} = -3$ et $\frac{2+8}{2} = 5$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre les racines. L'inégalité est stricte, donc les racines sont exclues : $S =]-3\,;5[$.

(b) $\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 49 - 24 = 25$. Les racines sont $\frac{-7-5}{-4} = 3$ et $\frac{-7+5}{-4} = \frac{1}{2}$. Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est positif entre les racines. L'inégalité est large, donc les racines sont incluses : $S = \left[\frac{1}{2}\,;3\right]$.

(c) $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$. Les racines sont $\frac{-1-5}{6} = -1$ et $\frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$. Comme $a = 3 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines. Les racines sont incluses et les crochets sont ouverts en $\pm\infty$: $S =]-\infty\,;-1] \cup \left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

(d) $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$, donc $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Un carré est strictement positif sauf là où il s'annule, c'est-à-dire en -3 : $S = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

(e) $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$, donc $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$. Un carré est négatif ou nul seulement quand il est nul, donc seulement si $2x - 3 = 0$: $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(f) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23 < 0$ et $a = 2 > 0$. Le trinôme est donc toujours strictement positif et il n'est jamais négatif : $S = \varnothing$.

(g) $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 16 - 28 = -12 < 0$ et $a = -1 < 0$. Le trinôme est donc toujours strictement négatif : $S = \mathbb{R}$.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : tout dans un membre d'abord**

(a) $x^2 - x - 12 \leqslant 0$. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49$. Les racines sont $\frac{1-7}{2} = -3$ et $\frac{1+7}{2} = 4$. Comme $a > 0$, le trinôme est négatif entre les racines, racines incluses : $S = [-3\,;4]$.

Ex. 18 **(suite)**

(b) $x^2 - 6x > 0 \iff x(x-6) > 0$. Les racines sont 0 et 6. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines : $S =]-\infty\,;0[\cup]6\,;+\infty[$. Diviser par x ferait perdre les solutions négatives : par exemple, -1 est solution.

(c) $x^2 - 49 < 0 \iff (x-7)(x+7) < 0$. Les racines sont -7 et 7. Comme $a > 0$, le trinôme est négatif entre les racines, racines exclues : $S =]-7\,;7[$. Écrire « $x < 7$ » serait faux : -8 n'est pas solution.

(d) $3x^2 + 5x \geqslant 0 \iff x(3x+5) \geqslant 0$. Les racines sont $-\frac{5}{3}$ et 0. Comme $a = 3 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines, racines incluses : $S = \left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right] \cup [0\,;+\infty[$.

(e) Je développe : $x^2 + 3x - 10 < 8 \iff x^2 + 3x - 18 < 0$. $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-18) = 81$. Les racines sont $\frac{-3-9}{2} = -6$ et $\frac{-3+9}{2} = 3$. Comme $a > 0$, le trinôme est négatif entre les racines, racines exclues : $S =]-6\,;3[$.

(f) $2x^2 - 11x + 5 \geqslant 0$. $\Delta = (-11)^2 - 4\times 2\times 5 = 121 - 40 = 81$. Les racines sont $\frac{11-9}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{11+9}{4} = 5$. Comme $a > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines : $S = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup [5\,;+\infty[$.

Ex. 19 ★★☆ **Cinq élèves, cinq erreurs**

(a) $(-1)^2 = 1$ et $5\times(-1) = -5$. Comme $1 < -5$ est faux, -1 n'est pas solution, alors que $-1 < 5$. La réponse de Léa est donc fausse : elle a divisé par x sans connaître son signe. Je corrige : $x^2 - 5x < 0 \iff x(x-5) < 0$. Les racines sont 0 et 5, et $a > 0$, donc le trinôme est négatif entre les racines. Conclusion : $S =]0\,;5[$.

(b) $\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 6 = 25$ et les racines sont bien -2 et 3. Mais $a = -1 < 0$, donc le trinôme est positif entre les racines : Hugo a inversé les signes.

x	-∞	-2	3	+∞	
trinôme	−	0	+	0	−

Conclusion : $S = [-2\,;3]$. Vérification : en $x = 0$, on obtient $6 \geqslant 0$, ce qui est vrai.

(c) $(-7)^2 = 49 \geqslant 36$, donc -7 est solution alors que $-7 < 6$. On ne prend pas la racine des deux membres : $x^2 - 36 \geqslant 0 \iff (x-6)(x+6) \geqslant 0$. Comme $a > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines, racines incluses. Conclusion : $S =]-\infty\,;-6] \cup [6\,;+\infty[$.

Ex. 19 **(suite)**

(d) En $x = 1$: $1^2 - 4\times 1 + 3 = 0$ et $0 \leqslant 0$ est vrai, donc 1 est solution alors que $1 \notin]1\,;3[$. Malik a exclu les racines alors que l'inégalité est large. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre les racines, racines incluses. Conclusion : $S = [1\,;3]$.

(e) $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-20) = 81$. Les racines sont $\frac{-1-9}{2} = -5$ et $\frac{-1+9}{2} = 4$. Comme $a > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines. Mais aucun nombre n'est à la fois inférieur à -5 et supérieur à 4 : il faut une union. Conclusion : $S =]-\infty\,;-5[\cup]4\,;+\infty[$.

Ex. 20 ★★☆ **Où une racine carrée est-elle définie ?**

(a) $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times(-2) = 9 + 16 = 25$. Les racines sont $\frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{3+5}{4} = 2$. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est positif ou nul à l'extérieur des racines, racines comprises.
Donc f est définie sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;+\infty[$.

(b) $\Delta = 6^2 - 4\times(-1)\times(-9) = 0$ et $-x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$. Cette expression est négative ou nulle, et elle vaut 0 seulement en 3.
Donc g est définie sur $\{3\}$: un seul nombre.

(c) $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$ et $a = 1 > 0$. Le trinôme est donc strictement positif pour tout réel x.
Donc h est définie sur $\mathbb{R}$.

(d) Il faut $14 + 5x - x^2 \geqslant 0$ pour la racine et $\sqrt{14 + 5x - x^2} \neq 0$ pour le quotient, donc $-x^2 + 5x + 14 > 0$ (inégalité stricte). $\Delta = 5^2 - 4\times(-1)\times 14 = 25 + 56 = 81$. Les racines sont $\frac{-5-9}{-2} = 7$ et $\frac{-5+9}{-2} = -2$. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est strictement positif entre les racines, racines exclues.
Donc k est définie sur $]-2\,;7[$.

Ex. 21 ★★☆ **Une inéquation bicarrée**

(a) Comme $x^4 = (x^2)^2 = X^2$, (I) s'écrit $X^2 + 5X - 36 \geqslant 0$.

(b) $\Delta = 5^2 - 4\times 1\times(-36) = 25 + 144 = 169$. Les racines sont $\frac{-5-13}{2} = -9$ et $\frac{-5+13}{2} = 4$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif ou nul à l'extérieur des racines.
Donc $X \in]-\infty\,;-9] \cup [4\,;+\infty[$.

(c) Un carré est toujours positif ou nul, donc $X = x^2 \geqslant 0$. Les solutions $X \leqslant -9$ sont impossibles et il faut les écarter. On garde seulement $X \geqslant 4$.

(d) Il reste $x^2 \geqslant 4 \iff x^2 - 4 \geqslant 0 \iff (x-2)(x+2) \geqslant 0$. Les racines sont -2 et 2, et $a > 0$, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines, racines incluses.
Conclusion : $S =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$.

Ex. 21 **(suite)**

(e) En $x = 0$: $0 + 0 - 36 = -36$ et $-36 \geqslant 0$ est faux. On retrouve bien que $0 \notin S$. En $x = -3$: $81 + 45 - 36 = 90 \geqslant 0$ est vrai. On retrouve bien que $-3 \in S$. Le résultat est cohérent.

Ex. 22 ★★★ **Développer avant de résoudre**

(a) $(x+3)(x-1) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$. Donc (I) $\iff x^2 + 2x - 3 - 2x - 5 \geqslant 0 \iff x^2 - 8 \geqslant 0$.

(b) Pour $x = -3$: $(-3+3)(-3-1) = 0$ et $2 \times (-3) + 5 = -1$. Comme $0 \geqslant -1$, -3 est une solution négative de (I) : Tom a tort. (I) équivaut à $x^2 \geqslant 8$, et « prendre la racine » donne seulement $x \geqslant 2\sqrt{2}$: on perd toutes les solutions négatives.

(c) $x^2 - 8 = (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$ car $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Racines $-2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$, $a = 1 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

x	-∞	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 8$	$+$	0	$-$	0	$+$

Inégalité large, donc racines incluses : $S_I =]-\infty\,;-2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}\,;+\infty[$.

(d) $(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 5x - 3$, donc (J) $\iff 2x^2 - 5x - 3 - x + 4 < 0 \iff 2x^2 - 6x + 1 < 0$. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 36 - 8 = 28 > 0$ et $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Racines : $x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est strictement négatif entre ses racines, qui sont exclues (inégalité stricte) : $S_J = \left]\frac{3-\sqrt{7}}{2}\,;\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right[$.

(e) $x_1 \approx 0{,}18$ et $x_2 \approx 2{,}82$: les entiers solutions de (J) sont 1 et 2. Contrôle : $2 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = -3 < 0$ et $2 \times 2^2 - 6 \times 2 + 1 = -3 < 0$, alors que pour 0 et 3 on trouve $1 > 0$. Dans (I) : $1^2 - 8 = -7 < 0$ et $2^2 - 8 = -4 < 0$.
Donc ni 1 ni 2 n'est solution de (I).

Ex. 23 ★★★ **La fusée à eau**

(a) $h(t) > 25 \iff -5t^2 + 30t - 25 > 0$. $\Delta = 30^2 - 4 \times (-5) \times (-25) = 900 - 500 = 400 > 0$, $\sqrt{400} = 20$. Racines : $t_1 = \frac{-30-20}{-10} = 5$ et $t_2 = \frac{-30+20}{-10} = 1$. Comme $a = -5 < 0$, le trinôme est strictement positif entre ses racines (exclues) : $S =]1\,;5[$, inclus dans $[0\,;6]$. La fusée est à plus de 25 m pendant $5 - 1 = 4$ secondes.

Ex. 23 **(suite)**

(b) $h(t) \geqslant 50 \iff -5t^2 + 30t - 50 \geqslant 0$. $\Delta = 30^2 - 4 \times (-5) \times (-50) = 900 - 1000 = -100 < 0$: pas de racine. Comme $a = -5 < 0$, le trinôme est strictement négatif sur $\mathbb{R}$, donc $S = \varnothing$. Mehdi a tort : la fusée n'atteint jamais 50 m.

(c) $h(t) \geqslant 45 \iff -5t^2 + 30t - 45 \geqslant 0$. $\Delta = 30^2 - 4 \times (-5) \times (-45) = 900 - 900 = 0$: racine double $t_0 = \frac{-30}{2 \times (-5)} = 3$.
Donc $-5t^2 + 30t - 45 = -5(t-3)^2$, et l'inéquation équivaut à $(t-3)^2 \leqslant 0$, soit $t = 3$: $S = \{3\}$. Pour tout $t \neq 3$, on a $h(t) < 45$. La hauteur maximale est donc $h(3) = 45$ m, atteinte à $t = 3$ s.

(d) $h(t) < 40 \iff -5t^2 + 30t - 40 < 0$. $\Delta = 30^2 - 4 \times (-5) \times (-40) = 900 - 800 = 100$. Racines : $\frac{-30-10}{-10} = 4$ et $\frac{-30+10}{-10} = 2$. Comme $a = -5 < 0$, le trinôme est strictement négatif à l'extérieur des racines : $h(t) < 40$ pour $t \in [0\,;2[\cup]4\,;6]$. Avec la question 1, on a $25 < h(t) < 40$ pour $t \in]1\,;2[\cup]4\,;5[$. Cela dure $(2-1) + (5-4) = 2$ secondes au total : une fois à la montée, une fois à la descente.

Ex. 24 ★★★ **Une inéquation qui dépend de m**

(a) Pour $m = -3$: $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$. Racines : $\frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{2+4}{2} = 3$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines, qui sont incluses (inégalité large) : $S = [-1\,;3]$.

(b) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m$.

(c) Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $4 - 4m < 0 \iff m > 1$: pas de racine et $a = 1 > 0$, donc le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $S = \varnothing$. Si $\Delta \geqslant 0$ ($m \leqslant 1$), une racine annule le trinôme, donc elle est solution (inégalité large). Conclusion : (I_m) n'a aucune solution si et seulement si $m > 1$.

(d) Si $m < 1$, il y a deux racines distinctes et tout l'intervalle entre elles est solution : une infinité de solutions. Il faut donc $\Delta = 0$, soit $m = 1$. Alors $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et $(x-1)^2 \leqslant 0 \iff x = 1$. Pour $m = 1$, la seule solution est $x = 1$: $S = \{1\}$.

(e) Pour $m < 1$: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(1-m)} = 2\sqrt{1-m}$, donc les racines sont $\frac{2 \pm 2\sqrt{1-m}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-m}$ et $S = [1 - \sqrt{1-m}\,;1 + \sqrt{1-m}]$. Sa longueur vaut $2\sqrt{1-m}$. On veut $2\sqrt{1-m} = 6 \iff \sqrt{1-m} = 3 \iff 1 - m = 9 \iff m = -8$. Contrôle : $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$, donc $S = [-2\,;4]$, de longueur 6. Il faut $m = -8$.

4. *Inéquations produit et quotient*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : le signe d'un facteur**

(a) $3x - 12 = 0$ pour $x = 4$. Comme $m = 3 > 0$, l'expression est positive à droite de 4 : sur $]4\,;+\infty[$.

(b) $-2x + 10 = 0$ pour $x = 5$. Comme $m = -2 < 0$, elle est positive à GAUCHE de 5 : sur $]-\infty\,;5[$.

(c) $7 - 2x = 0$ pour $x = \frac{7}{2}$. Ici $m = -2 < 0$: elle est positive sur $]-\infty\,;\frac{7}{2}[$.

(d) $4x + 6 = 0$ pour $x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. Comme $m = 4 > 0$, elle est positive sur $]-\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

(e) $-3x - 9 = 0$ pour $x = -3$. Comme $m = -3 < 0$, elle est positive sur $]-\infty\,;-3[$.

(f) Un carré est positif ou nul, donc $(x-5)^2 + 2 \geqslant 2 > 0$: elle ne s'annule jamais et elle est positive sur $\mathbb{R}$. Dans un tableau de signes, on peut écarter ce facteur en le disant.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : résoudre en deux lignes**

(a) Les facteurs s'annulent en -5 et 2. Le produit est un trinôme avec $a = 1 > 0$, donc il est négatif entre ses racines : $S =]-5\,;2[$.

(b) Valeur interdite : 4. $x + 1$ change de signe en -1, $x - 4$ en 4. Le quotient est négatif entre -1 et 4 et positif ailleurs : $S =]-\infty\,;-1] \cup]4\,;+\infty[$. Le crochet est ouvert en 4
(valeur interdite).

(c) $3 - x$ est positif à gauche de 3 et $x + 2$ à droite de -2. Entre -2 et 3, les deux sont positifs, et ils s'annulent aux bornes. Ailleurs, ils sont de signes contraires. Donc $S = [-2\,;3]$.

(d) $(x-6)^2 \geqslant 0$ ne change pas le signe, mais il s'annule en 6. Le produit est $\leqslant 0$ si $x + 1 \leqslant 0$ ou si $x = 6$: $S =]-\infty\,;-1] \cup \{6\}$.

(e) Valeur interdite : $\frac{1}{2}$. $x^2 + 4 > 0$ sur $\mathbb{R}$: on l'écarte. Le quotient a le signe de $2x - 1$: $S =]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

(f) Valeur interdite : -2. Le numérateur -4 est négatif, donc le quotient est positif quand $x + 2 < 0$: $S =]-\infty\,;-2[$.

Ex. 27 ★★☆ **Un tableau à compléter, puis à exploiter**

(a) $6 - 3x$ s'annule en 2 ; comme $m = -3 < 0$, il est positif à gauche de 2. $x + 4$ s'annule en -4 et il est positif à droite. Sur chaque colonne, on compte les signes « $-$ ».

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$6 - 3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f(x)	$-$	‖	$+$	0	$-$

(b) D'après le tableau, $S =]-4\,;2]$: il y a un crochet ouvert en -4 (valeur interdite, double barre) et un crochet fermé en 2 ($f(2) = 0$ et l'inégalité est large).

(c) $S =]-\infty\,;-4[\cup]2\,;+\infty[$, avec des crochets ouverts partout
(inégalité stricte et valeur interdite).

(d) $f(x) + 3 = \frac{6-3x+3(x+4)}{x+4} = \frac{18}{x+4}$. L'inéquation équivaut à $\frac{18}{x+4} \geqslant 0$. Comme $18 > 0$, il faut $x + 4 > 0$.
Donc $S =]-4\,;+\infty[$.

Ex. 28 ★★☆ **Quatre élèves, quatre erreurs**

(a) Léna a multiplié par x, dont elle ne connaît pas le signe. Contre-exemple : -1 est dans son ensemble, mais $\frac{2}{-1} = -2$ n'est pas > 5. Correction : la valeur interdite est 0 et $\frac{2}{x} - 5 = \frac{2-5x}{x}$. $2 - 5x$ est positif à gauche de $\frac{2}{5}$, x est positif à droite de 0. Le quotient est positif seulement entre les deux, donc $S =]0\,;\frac{2}{5}[$.

(b) -2 annule le dénominateur : c'est une valeur interdite, donc le crochet est toujours ouvert, même si l'inégalité est large. Le reste est juste : $S =]-\infty\,;-2[\cup [5\,;+\infty[$.

(c) $x^2 + 1 > 0$: on peut l'écarter. Pour le trinôme, $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4$, et ses racines sont $\frac{-4-2}{-2} = 3$ et $\frac{-4+2}{-2} = 1$. L'erreur d'Inès : ici $a = -1 < 0$, donc le trinôme est positif ENTRE les racines. On a donc $S = [1\,;3]$.

(d) La simplification n'est valable que pour $x \neq 3$, et Tom a oublié la valeur interdite 3. Pour $x \neq 3$, $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$, qui est $\geqslant 0$ pour $x \geqslant -3$. On a donc $S = [-3\,;3[\cup]3\,;+\infty[$
(crochet ouvert en 3 : valeur interdite).

Ex. 29 ★★☆ **Trois valeurs à ranger**

(a) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$. Les racines sont $\frac{-2-8}{2} = -5$ et $\frac{-2+8}{2} = 3$.

(b) Le dénominateur $4 - x$ s'annule en 4 : c'est la valeur interdite. Dans l'ordre : $-5 < 3 < 4$.

Ex. 29 **(suite)**

(c) Le numérateur a $a = 1 > 0$: il est positif à l'extérieur de -5 et 3, négatif entre les deux. $4 - x$ ($m = -1 < 0$) est positif à gauche de 4, négatif à droite.

x	$-\infty$	-5	3	4	$+\infty$		
$x^2 + 2x - 15$	+	0	−	0	+	+	+
$4 - x$	+	+	+	+	+	0	−
q(x)	+	0	−	0	+	‖	−

(d) On a $S =]-\infty\,;-5] \cup [3\,;4[$. Les crochets sont fermés en -5 et en 3 (q s'annule et l'inégalité est large). Le crochet est ouvert en 4, car c'est une valeur interdite.

Ex. 30 ★★★ **Un dénominateur qui change de signe**

(a) Pour $x = 4$: $\frac{5\times4-1}{3-4} = \frac{19}{-1} = -19$ et $-19 \leqslant 4$, donc 4 est solution de (I). Dans l'inéquation de Malik : $5 \times 4 - 1 = 19$ et $3 \times 4 - 4^2 = -4$, or $19 \leqslant -4$ est faux. Malik a multiplié par $3 - x$ sans connaître son signe. Pour $x > 3$, $3 - x < 0$: l'inégalité aurait dû changer de sens. On ne multiplie pas par un dénominateur de signe inconnu.

(b) $3 - x = 0$ pour $x = 3$: la valeur interdite est 3. Pour $x \neq 3$: $\frac{5x-1}{3-x} - x = \frac{5x-1-x(3-x)}{3-x} = \frac{5x-1-3x+x^2}{3-x} = \frac{x^2+2x-1}{3-x}$. Donc (I) équivaut à $\frac{x^2+2x-1}{3-x} \leqslant 0$.

(c) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Les racines sont $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$. On a $x_1 < x_2$, et $x_2 < 3$ car $\sqrt{2} < 4$. Donc $-1 - \sqrt{2} < -1 + \sqrt{2} < 3$
(environ $-2{,}41$; $0{,}41$; 3).

(d) Le trinôme $x^2 + 2x - 1$ est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur de ses racines. Le facteur $3 - x$ s'annule en 3. Il est du signe de $m = -1$, donc négatif, à droite de 3 et positif à gauche.

x	$-\infty$	x_1	x_2	3	$+\infty$		
$x^2 + 2x - 1$	+	0	−	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	+	+	0	−
quotient	+	0	−	0	+	‖	−

Le quotient est négatif ou nul sur $[x_1\,;x_2]$ (crochets fermés : inégalité large) et sur $]3\,;+\infty[$ (crochet ouvert en 3 : valeur interdite). Conclusion : $S = [-1 - \sqrt{2}\,;-1 + \sqrt{2}] \cup]3\,;+\infty[$. On retrouve $4 \in S$, alors que Malik avait oublié tout l'intervalle $]3\,;+\infty[$.

Ex. 31 ★★★ **Une racine commune en haut et en bas**

(a) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0$: le trinôme n'a pas de racine. Il est toujours du signe de $a = 1 > 0$, donc $x^2 + x + 3 > 0$ pour tout réel x. Ce facteur ne change jamais le signe : on l'écarte du tableau en le disant.

(b) $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Les racines sont $\frac{5-1}{2} = 2$ et $\frac{5+1}{2} = 3$, donc $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Les valeurs interdites sont 2 et 3 : q est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{2\,;3\}$.

(c) On écrit $q(x) = \frac{(x-2)^2(x^2+x+3)}{(x-2)(x-3)}$ et on écarte $x^2 + x + 3 > 0$. Le carré $(x - 2)^2$ est positif et s'annule en 2.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$(x - 2)^2$	+	0	+	+	+
$x - 2$	−	0	+	+	+
$x - 3$	−	−	−	0	+
q(x)	+	‖	−	‖	+

En 2, le numérateur s'annule, mais 2 reste une valeur interdite : on met une double barre.

(d) Non. Après simplification par $x - 2$, l'expression vaut 0 en 2 : c'est ce qui trompe Juliette. Mais 2 annule le dénominateur de départ : c'est une valeur interdite, et une simplification ne la supprime pas. D'après le tableau, $q(x) > 0$ sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]3\,;+\infty[$, et $q(x)$ ne s'annule jamais.
Donc $S =]-\infty\,;2[\cup]3\,;+\infty[$, avec des crochets ouverts en 2 et en 3
(valeurs interdites).

(e) $p(x) = (x - 2)^2(x^2 + x + 3)(x - 2)(x - 3)$ a les mêmes facteurs que $q(x)$, donc le même signe sur chaque intervalle : +, puis − sur $]2\,;3[$, puis +. Mais p est un produit sans dénominateur : il n'y a aucune valeur interdite, et $p(2) = p(3) = 0$. Avec l'inégalité large, 2 et 3 sont solutions : $S =]-\infty\,;2] \cup [3\,;+\infty[$. Les crochets se ferment car 2 et 3 ne sont plus interdits.

Ex. 32 ★★★ **Le coût moyen d'un atelier de confitures**

(a) Oui. Ici $q \in]0\,;20]$, donc $q > 0$: le signe de q est connu et positif. Multiplier par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité. L'interdiction ne concerne que les expressions dont on ne connaît pas le signe.

Ex. 32 **(suite)**

(b) Pour $q > 0$: $CM(q) \leqslant 35 \iff q^2 + 10q + 144 \leqslant 35q \iff q^2 - 25q + 144 \leqslant 0$. $\Delta = (-25)^2 - 4 \times 1 \times 144 = 625 - 576 = 49$, donc les racines sont $\frac{25-7}{2} = 9$ et $\frac{25+7}{2} = 16$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif ou nul entre ses racines (crochets fermés : inégalité large). Conclusion : $S = [9\,;16]$, inclus dans $]0\,;20]$.

(c) $u(q) = 50 - q - \frac{q^2+10q+144}{q} = \frac{50q-q^2-q^2-10q-144}{q} = \frac{-2q^2+40q-144}{q}$.

(d) Le dénominateur q est strictement positif : $u(q)$ a le signe de $-2q^2 + 40q - 144$. $\Delta = 40^2 - 4 \times (-2) \times (-144) = 1600 - 1152 = 448 = 64 \times 7$, $\sqrt{448} = 8\sqrt{7}$. Les racines sont $\frac{-40+8\sqrt{7}}{-4} = 10 - 2\sqrt{7}$ et $\frac{-40-8\sqrt{7}}{-4} = 10 + 2\sqrt{7}$. Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est positif entre ses racines (crochets ouverts : inégalité stricte). Conclusion : $S =]10 - 2\sqrt{7}\,;10 + 2\sqrt{7}[$, soit environ $]4{,}71\,;15{,}29[$, inclus dans $]0\,;20]$.

(e) On cherche les q qui sont à la fois dans $[9\,;16]$ et dans $]10 - 2\sqrt{7}\,;10 + 2\sqrt{7}[$. On a $10 - 2\sqrt{7} < 9$ car $2\sqrt{7} > 1$. On a aussi $10 + 2\sqrt{7} < 16$ car $2\sqrt{7} < 6$, c'est-à-dire $\sqrt{7} < 3$ (vrai car $7 < 9$).
Donc les quantités cherchées forment l'intervalle $[9\,;10 + 2\sqrt{7}[$, soit de 9 tonnes jusqu'à environ 15,29 tonnes
(exclu).

5. *Position relative de deux courbes*

Ex. 33 ★☆☆ **Réduire la différence f(x) − g(x)**

(a) $d(x) = x^2 + 2x - 1 - 4x + 5 = x^2 - 2x + 4$.

(b) $d(x) = 2x^2 - x + 3 + 3x - 7 = 2x^2 + 2x - 4$.

(c) Le signe $-$ porte sur tout $g(x)$: $-(3x - 2) = -3x + 2$.
Donc $d(x) = x^2 + 5x - 3x + 2 = x^2 + 2x + 2$.

(d) $d(x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 - x + 6 = -4x + 8$. Les x^2 s'éliminent : d est une fonction affine, ce n'est pas un trinôme.

(e) $f(x) - g(x) = 3x^2 + 2x - 3x^2 + 4x - 9 = 6x - 9$. Or $6x - 9 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$.
Donc $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(f) $g(x) - f(x) = -2x^2 + x - 1 + x^2 - 5 = -x^2 + x - 6$ et $d(x) = x^2 - x + 6$. Les deux expressions sont opposées : changer l'ordre de la soustraction change tous les signes, donc inverse la conclusion.

Ex. 34 ★★☆ **Traduire un signe en position**

(a) $f(x) - g(x) > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]2\,;+\infty[$.

(b) Attention à l'ordre : c'est $g(x) - f(x)$ qui est positif. Donc $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $]-1\,;4[$.

(c) Trinôme de racines 1 et 5, avec $a = 1 > 0$: il est négatif entre les racines (par exemple $(3-1)(3-5) = -4$). Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous : c'est $\mathcal{C}_g$ qui est au-dessus sur $]1\,;5[$.

(d) $-2(x+3)^2 \leqslant 0$ et ne s'annule que pour $x = -3$. Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ et la touche en un seul point. $g(-3) = -6 + 1 = -5$: le point commun est $(-3\,;-5)$.

(e) La position par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de $f(x)$. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4$, racines $\frac{6-2}{2} = 2$ et $\frac{6+2}{2} = 4$. Comme $a = 1 > 0$, $f(x) < 0$ entre les racines : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'axe sur $]2\,;4[$.

(f) Un point a deux coordonnées. Son ordonnée vaut $g(3) = 5 - 3 = 2$ (c'est la même valeur que $f(3)$). Le point commun est $(3\,;2)$.

Ex. 35 ★☆☆ **Compter les points communs**

(a) $d(x) = x^2 + 3x + 1 - x + 2 = x^2 + 2x + 3$. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$: aucun point commun. $d(x)$ a le signe de $a = 1 > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

(b) $d(x) = x^2 - x + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1$. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$: un seul point commun, d'abscisse $\frac{-2}{2} = -1$. $f(-1) = 1 + 1 = 2$ (et $g(-1) = 3 - 1 = 2$) : la droite touche la parabole au point $(-1\,;2)$.

(c) $d(x) = -x^2 + 2x + 3 - x - 1 = -x^2 + x + 2$. $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$: deux points communs, d'abscisses $\frac{-1+3}{-2} = -1$ et $\frac{-1-3}{-2} = 2$.

(d) $d(x) = 2x^2 + 1 - x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$: un seul point commun, d'abscisse $\frac{4}{2} = 2$. $f(2) = 8 + 1 = 9$: le point commun est $(2\,;9)$.

(e) $d(x) = -x^2 + x - 2 - 3x = -x^2 - 2x - 2$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = -4 < 0$: aucun point commun. $d(x)$ a le signe de $a = -1 < 0$: $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous, donc $\mathcal{C}_g$ est toujours au-dessus.

Ex. 36 ★★☆ **L'erreur de Lina**

(a) Lina n'a pas distribué le signe $-$ sur tout $g(x)$: $-(x+5) = -x-5$.
Donc $d(x) = 2x^2 - 3x - 1 - x - 5 = 2x^2 - 4x - 6$.

(b) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64 > 0$.
Racines : $x_1 = \frac{4-8}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{4+8}{4} = 3$.
Donc $d(x) = 2(x+1)(x-3)$.

(c) $a = 2 > 0$: $d(x)$ est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	-∞	-1	3	+∞	
d(x)	+	0	−	0	+

(d) $d(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]3\,;+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur ces intervalles. $d(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

(e) $g(-1) = -1 + 5 = 4$ et $g(3) = 3 + 5 = 8$ (on retrouve $f(-1) = 4$ et $f(3) = 8$). Les courbes se coupent aux points $(-1\,;4)$ et $(3\,;8)$.

Ex. 37 ★★☆ **Une droite connue par un tableau de valeurs**

(a) $g(x) = px + q$ avec $q = g(0) = 5$ et $p = \frac{1-5}{2-0} = -2$.
Donc $g(x) = -2x + 5$ (on vérifie : $g(4) = -8 + 5 = -3$).

(b) Le signe $-$ porte sur tout $g(x)$: $d(x) = x^2 - 4x + 6 + 2x - 5 = x^2 - 2x + 1$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$.

(c) $\Delta = 0$, donc $d(x) = (x-1)^2 \geqslant 0$, nul seulement pour $x = 1$. $f(1) = 1 - 4 + 6 = 3$ (et $g(1) = -2 + 5 = 3$). Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ et la droite touche la parabole en un seul point, $(1\,;3)$.

(d) On étudie le signe de $f(x)$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -8 < 0$ et $a = 1 > 0$, donc $f(x) > 0$ pour tout réel x. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

Ex. 38 ★★★ **Une parabole face à l'axe et à trois droites**

(a) La position par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de $f(x)$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les racines sont $x_1 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Comme $a = 1 > 0$, $f(x)$ est positif à l'extérieur des racines. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}\,;+\infty[$ et en dessous sur $]2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}[$. Elle coupe l'axe aux points $(2-\sqrt{3}\,;0)$ et $(2+\sqrt{3}\,;0)$.

Ex. 38 (suite)

(b) $f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 1 - 2x + 8 = x^2 - 6x + 9$.
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$, donc il y a une racine double $x_0 = 3$ et $f(x) - g(x) = (x-3)^2 \geqslant 0$.
Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ et la droite touche la parabole en un seul point, d'abscisse 3. Comme $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$ (et $g(3) = 6 - 8 = -2$), ce point est $(3\,;-2)$.

(c) $f(x) - k(x) = x^2 - 4x + 1 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 2$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$: l'équation $f(x) = k(x)$ n'a pas de solution, donc les courbes n'ont aucun point commun. Comme $a = 1 > 0$, on a $f(x) - k(x) > 0$ pour tout réel x. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est toujours strictement au-dessus de $\mathcal{C}_k$.

(d) $f(x) - (x+1) = x^2 - 5x = x(x-5)$, de racines 0 et 5 avec $a = 1 > 0$: elle est strictement négative sur $]0\,;5[$. Il faut donc $x \in]0\,;5[$ et, d'après la question 1, $x < 2 - \sqrt{3}$ ou $x > 2 + \sqrt{3}$. Comme $1 < \sqrt{3} < 2$, on a $0 < 2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3} < 5$. Conclusion : l'ensemble cherché est $]0\,;2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}\,;5[$.

Ex. 39 ★★★ **Des droites qui pivotent autour d'un point**

(a) Pour $x = 0$, on a $y = m \times 0 - 1 = -1$ quel que soit m : toutes les droites passent par $A(0\,;-1)$. On distribue le signe $-$: $d_m(x) = x^2 + 2x + 3 - mx + 1 = x^2 + (2-m)x + 4$.

(b) $\Delta = (2-m)^2 - 4 \times 1 \times 4 = m^2 - 4m + 4 - 16 = m^2 - 4m - 12$. C'est un trinôme en m de discriminant $16 + 48 = 64$, de racines $\frac{4-8}{2} = -2$ et $\frac{4+8}{2} = 6$.
Donc $\Delta = (m-6)(m+2)$.

(c) Il y a un seul point commun quand $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m = 6$ ou $m = -2$. Pour $m = 6$: $d_6(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, abscisse 2, et $f(2) = 11$: le point est $(2\,;11)$. Pour $m = -2$: $d_{-2}(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, abscisse -2, et $f(-2) = 3$: le point est $(-2\,;3)$. Dans ces deux cas, $d_m(x) \geqslant 0$: la droite touche la parabole sans la traverser.

(d) $\mathcal{P}$ est strictement au-dessus de D_m sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $d_m(x) > 0$ pour tout réel x. Comme le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$, il faut et il suffit que $\Delta < 0$. Or $\Delta = (m-6)(m+2)$ est un trinôme en m de coefficient $1 > 0$, négatif strictement entre ses racines.
Conclusion : $m \in]-2\,;6[$
(crochets ouverts car pour $m = -2$ ou $m = 6$ il y a un point commun).

Ex. 39 **(suite)**

(e) $d_7(x) = x^2 - 5x + 4$. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, racines $\frac{5-3}{2} = 1$ et $\frac{5+3}{2} = 4$. Comme $a = 1 > 0$, $d_7(x) > 0$ à l'extérieur des racines. Conclusion : $\mathcal{P}$ est au-dessus de D_7 sur $]-\infty\,;1[\cup]4\,;+\infty[$ et en dessous sur $]1\,;4[$. Comme $f(1) = 6$ et $f(4) = 27$ (et $7 \times 1 - 1 = 6$, $7 \times 4 - 1 = 27$), les points d'intersection sont $(1\,;6)$ et $(4\,;27)$.

Ex. 40 ★★★ **Une parabole connue par un tableau de valeurs**

(a) $f(0) = c = -2$. $f(1) = a + b + c = -3$ donc $a + b = -1$. $f(-1) = a - b + c = 3$ donc $a - b = 5$. En additionnant : $2a = 4$, donc $a = 2$, puis $b = -3$. Ainsi $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ (on vérifie $f(2) = 8 - 6 - 2 = 0$, conforme au tableau).

(b) On étudie le signe de $f(x) - (-2) = 2x^2 - 3x - 2 + 2 = 2x^2 - 3x = x(2x - 3)$, de racines 0 et $\frac{3}{2}$. Comme $a = 2 > 0$, ce trinôme est positif à l'extérieur des racines. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;0[\cup]\frac{3}{2}\,;+\infty[$ et en dessous sur $]0\,;\frac{3}{2}[$. Elles se coupent en $(0\,;-2)$ et $\left(\frac{3}{2}\,;-2\right)$.

(c) $f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x - 2 - 2x^2 - x + 6 = -4x + 4$: les termes en x^2 s'éliminent, la différence est affine. $-4x + 4 > 0 \iff x < 1$. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;1[$ et en dessous sur $]1\,;+\infty[$. Elles ont un seul point commun : $f(1) = -3$ (et $g(1) = 2 + 1 - 6 = -3$), c'est le point $(1\,;-3)$.

(d) $h(x) - f(x) = -x^2 + x + 2 - 2x^2 + 3x + 2 = -3x^2 + 4x + 4$. $\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 64$, racines $\frac{-4-8}{-6} = 2$ et $\frac{-4+8}{-6} = -\frac{2}{3}$. Comme $a = -3 < 0$, la différence est bien positive entre les racines : le signe de Tom est juste. Mais $h(x) - f(x) > 0$ signifie que c'est $\mathcal{C}_h$ qui est au-dessus. Tom a tort : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_h$ sur $]-\frac{2}{3}\,;2[$ et au-dessus sur $]-\infty\,;-\frac{2}{3}[\cup]2\,;+\infty[$. Comme $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$ et $f(2) = 0$, les points communs sont $\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{8}{9}\right)$ et $(2\,;0)$.

6. *Problèmes : signe constant, paramètre, situations concrètes*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : signe constant ou non ?**

(a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -31 < 0$ et $a = 2 > 0$. Donc $f(x) > 0$ pour tout réel x : signe constant, strictement positif.

Ex. 41 **(suite)**

(b) $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = -12 < 0$ et $a = -1 < 0$. Donc $g(x) < 0$ pour tout réel x : signe constant, strictement négatif.

(c) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$. On a $h(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geqslant 0$, avec $h(x) = 0$ seulement en $\frac{1}{3}$: h est positif au sens large.

(d) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$. Il y a deux racines, -2 et 3, et $k(x) = (x + 2)(x - 3)$ est négatif entre elles. Le signe n'est pas constant.

(e) $\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = -11 < 0$ et $a = -3 < 0$. Donc $p(x) < 0$ pour tout réel x : signe constant, strictement négatif.

(f) $\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-9) = 0$. On a $q(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0$, avec $q(x) = 0$ seulement en $\frac{3}{2}$: q est négatif au sens large.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : condition sur m**

(a) $a = 1 > 0$, donc il faut $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 25 = m^2 - 100 < 0$. Le trinôme en m vaut $(m - 10)(m + 10)$ et il est négatif entre ses racines : $m \in]-10\,;10[$.

(b) $a = 1 > 0$, et l'inégalité est large : il faut $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times 4m = 4m(m - 4) \leqslant 0$. Ce trinôme en m est négatif entre ses racines 0 et 4, bornes comprises : $m \in [0\,;4]$.

(c) $a = -1 < 0$: c'est le bon signe. Il faut $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times m = 36 + 4m < 0$, soit $m < -9$: $m \in]-\infty\,;-9[$.

(d) $a = 3 > 0$, donc il faut $\Delta = m^2 - 4 \times 3 \times m = m^2 - 12m = m(m - 12) < 0$. Ce trinôme en m est négatif strictement entre ses racines 0 et 12 : $m \in]0\,;12[$.

(e) $a = -2 < 0$, et l'inégalité est large : il faut $\Delta = m^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = m^2 - 64 = (m - 8)(m + 8) \leqslant 0$, soit $m \in [-8\,;8]$.

(f) Aucune valeur de m ne convient : $a = 1 > 0$. Si $\Delta = 9 - 4m < 0$, le trinôme est positif sur tout $\mathbb{R}$; sinon, il est positif ou nul hors de ses racines. $\Delta < 0$ ne suffit pas : il faut aussi $a < 0$. L'ensemble cherché est $\varnothing$.

Ex. 43 ★★☆ **Quand le coefficient a dépend de m**

(a) Pour $m = 2$, $P(x) = 4x + 3$: ce n'est plus un trinôme. Comme $P(-1) = -1 < 0$, on n'a pas $P(x) > 0$ pour tout x. On écarte donc $m = 2$.

Ex. 43 **(suite)**

(b) $\Delta = 4^2 - 4(m-2)(m+1) = 16 - 4(m^2 - m - 2) = -4m^2 + 4m + 24 = -4(m^2 - m - 6)$, d'où $\Delta = -4(m-3)(m+2)$.

(c) Δ est un trinôme en m, de racines -2 et 3, avec un coefficient $-4 < 0$: il est positif entre ses racines.

m	-∞	-2	3	+∞	
Δ	−	0	+	0	−

(d) Il faut $m - 2 > 0$ et $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m > 2$ et ($m < -2$ ou $m > 3$), soit $m > 3$. Conclusion : $P(x) > 0$ pour tout réel x si et seulement si $m \in]3\,;+\infty[$. Exemple : pour $m = 4$, $\Delta = -24 < 0$ et $a = 2 > 0$.

Ex. 44 ★★☆ **Nombre de solutions selon m**

(a) $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 4 = m^2 - 16 = (m-4)(m+4)$.

(b)

m	-∞	-4	4	+∞	
m + 4	−	0	+	+	
m − 4	−	−	0	+	
Δ	+	0	−	0	+

(c) Si $m < -4$ ou $m > 4$: $\Delta > 0$, donc deux solutions. Si $m = -4$ ou $m = 4$: $\Delta = 0$, donc une seule solution. Si $-4 < m < 4$: $\Delta < 0$, donc aucune solution.

(d) Pour $m = 4$: $x_0 = -\frac{4}{2\times 1} = -2$. Pour $m = -4$: $x_0 = -\frac{-4}{2\times 1} = 2$.

(e) Un point commun vérifie $x^2 + 4 = -mx$, c'est-à-dire $x^2 + mx + 4 = 0$, soit (E). Il n'y a aucun point commun quand (E) n'a pas de solution, donc pour $m \in]-4\,;4[$.

Ex. 45 ★★☆ **Trois situations concrètes**

(a) $B(q) > 0$. $\Delta = 40^2 - 4 \times (-1) \times (-300) = 400$, et les racines sont $\frac{-40\pm 20}{-2}$, soit 10 et 30. Comme $a = -1 < 0$, B est positif strictement entre ses racines : $q \in]10\,;30[$, inclus dans $[0\,;50]$. Le bénéfice est strictement positif pour une vente comprise strictement entre 10 et 30 objets.

(b) Les côtés mesurent x et $12 - x$ (demi-périmètre 12 m). Donc $A(x) = x(12-x) = -x^2 + 12x$, en m², avec $x \in]0\,;12[$ (longueurs strictement positives).

Ex. 45 **(suite)**

(c) $-x^2 + 12x \geqslant 27 \iff -x^2 + 12x - 27 \geqslant 0$. $\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-27) = 36$, et les racines sont 3 et 9. Comme $a < 0$, le trinôme est positif entre ses racines, bornes comprises : $x \in [3\,;9]$, inclus dans $]0\,;12[$. L'aire vaut au moins 27 m² quand le côté mesure entre 3 m et 9 m.

(d) $h(t) > 5 \iff -5t^2 + 10t + 15 > 0$. $\Delta = 10^2 - 4 \times (-5) \times 15 = 400$, et les racines sont $\frac{-10\pm 20}{-10}$, soit -1 et 3. Comme $a < 0$, on obtient $t \in]-1\,;3[$. Le domaine $[0\,;3{,}2]$ coupe cet intervalle : $S = [0\,;3[$. La balle est à plus de 5 m pendant ses 3 premières secondes.

Ex. 46 ★★★ **Un trinôme à paramètre de signe constant**

(a) Pour $m = 0$: $P(x) = 0 \times x^2 + 3x + 0 = 3x$. Ce n'est plus un trinôme. Or $P(1) = 3 > 0$.
Donc on n'a pas $P(x) < 0$ pour tout réel x : la valeur $m = 0$ ne convient pas.

(b) $a = m$, $b = m + 3$, $c = m$. $\Delta = (m+3)^2 - 4 \times m \times m = m^2 + 6m + 9 - 4m^2 = -3m^2 + 6m + 9 = -3(m^2 - 2m - 3) = -3(m-3)(m+1)$. C'est un trinôme en m de racines -1 et 3. Son coefficient de m^2 vaut $-3 < 0$, donc il est négatif à l'extérieur des racines :

m	-∞	-1	3	+∞	
Δ	−	0	+	0	−

(c) Pour $m \neq 0$, on a $P(x) < 0$ pour tout réel x si et seulement si $a = m < 0$ ET $\Delta < 0$. D'après le tableau, $\Delta < 0 \iff m \in]-\infty\,;-1[\cup]3\,;+\infty[$. Avec $m < 0$, il reste $m \in]-\infty\,;-1[$. Le cas $m = 0$ est exclu d'après la question 1. Conclusion : $P(x) < 0$ pour tout réel x si et seulement si $m < -1$.

(d) On a $P(x) \leqslant 0$ pour tout réel x si et seulement si $m < 0$ ET $\Delta \leqslant 0$. Or $\Delta \leqslant 0 \iff m \leqslant -1$ ou $m \geqslant 3$. Avec $m < 0$: $m \in]-\infty\,;-1]$. Vérification pour $m = -1$: $P(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leqslant 0$ pour tout réel x. Ce trinôme s'annule en $x = 1$: c'est pour cela que $m = -1$ est exclu à la question 3.

(e) Pour $m = 4$: $\Delta = 7^2 - 4 \times 4 \times 4 = 49 - 64 = -15 < 0$. Mais $a = 4 > 0$, donc $P(x) > 0$ pour tout réel x. Lucas a tort : $\Delta < 0$ donne un signe constant, et ce signe est celui de a. Pour avoir $P(x) > 0$ pour tout réel x, il faut $m > 0$ ET $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m > 3$. Conclusion : $m \in]3\,;+\infty[$.

Ex. 47 ★★★ **Une parabole et une famille de droites**

(a) Un point $M(x\,;y)$ est commun aux deux courbes si et seulement si $x^2+3x+1=mx-8$. On passe tout dans un membre : $x^2+3x-mx+1+8=0$, c'est-à-dire $x^2+(3-m)x+9=0$.

(b) $a=1$, $b=3-m$, $c=9$. $\Delta=(3-m)^2-4\times1\times9=m^2-6m+9-36=m^2-6m-27=(m+3)(m-9)$.

(c) Δ est un trinôme en m de racines -3 et 9. Son coefficient de m^2 vaut $1>0$:

m	**-∞**	**-3**	**9**	**+∞**	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

Si $m<-3$ ou $m>9$, il y a deux points communs. Si $m=-3$ ou $m=9$, il y a un seul point commun. Si $-3<m<9$, il n'y a aucun point commun.

(d) Pour $m=9$: $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ donne $x=3$, puis $y=9\times3-8=19$ (et $3^2+3\times3+1=19$). Le point est $(3\,;19)$. Pour $m=-3$: $x^2+6x+9=(x+3)^2=0$ donne $x=-3$, puis $y=-3\times(-3)-8=1$. Le point est $(-3\,;1)$.

(e) On étudie le signe de $(x^2+3x+1)-(10x-8)=x^2-7x+9$. $\Delta=(-7)^2-4\times1\times9=13>0$. Les racines sont $x_1=\frac{7-\sqrt{13}}{2}\approx1{,}70$ et $x_2=\frac{7+\sqrt{13}}{2}\approx5{,}30$. Comme $a=1>0$, la différence est négative entre les racines et positive à l'extérieur. Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessous de D_{10} sur $]x_1\,;x_2[$ et au-dessus sur $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$. Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses x_1 et x_2.

Ex. 48 ★★★ **L'enclos de Lina**

(a) Les deux côtés perpendiculaires au mur utilisent $2x$ m de grillage. Le côté parallèle mesure donc $30-2x$ m. Une longueur est strictement positive : $x>0$ et $30-2x>0$, donc $x<15$. Ainsi $x\in]0\,;15[$. L'aire vaut $A(x)=x(30-2x)=-2x^2+30x$.

(b) $A(x)\geqslant104\iff-2x^2+30x-104\geqslant0\iff x^2-15x+52\leqslant0$ (on divise par $-2<0$, donc le sens change). $\Delta=(-15)^2-4\times1\times52=17>0$. Les racines sont $\frac{15-\sqrt{17}}{2}\approx5{,}44$ et $\frac{15+\sqrt{17}}{2}\approx9{,}56$. Comme $a=1>0$, le trinôme est négatif entre ses racines, et les crochets sont fermés (inégalité large). Les deux racines sont bien dans $]0\,;15[$. $S=\left[\frac{15-\sqrt{17}}{2}\,;\frac{15+\sqrt{17}}{2}\right]$. L'aire est d'au moins 104 m² quand x est compris entre environ $5{,}44$ m et $9{,}56$ m.

Ex. 48 **(suite)**

(c) $A(x)\leqslant72\iff-2x^2+30x-72\leqslant0\iff x^2-15x+36\geqslant0$. $\Delta=(-15)^2-4\times1\times36=81$. Les racines sont $\frac{15-9}{2}=3$ et $\frac{15+9}{2}=12$. Comme $a=1>0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines : $x\leqslant3$ ou $x\geqslant12$. On garde seulement les valeurs du domaine $]0\,;15[$: $S=]0\,;3]\cup[12\,;15[$. L'aire est d'au plus 72 m² quand x est compris entre 0 m (exclu) et 3 m, ou entre 12 m et 15 m (exclu).

(d) $A(x)\geqslant120\iff x^2-15x+60\leqslant0$. $\Delta=(-15)^2-4\times1\times60=-15<0$ et $a=1>0$, donc $x^2-15x+60>0$ pour tout réel x. L'inéquation n'a aucune solution : $S=\varnothing$. Hugo a tort : on ne peut pas obtenir 120 m².

(e) $A(x)\geqslant k\iff2x^2-30x+k\leqslant0$. Ici $a=2>0$ et $\Delta=(-30)^2-4\times2\times k=900-8k$. Si $\Delta<0$, le trinôme est strictement positif pour tout réel x : pas de solution. Si $\Delta\geqslant0$, c'est-à-dire $k\leqslant112{,}5$, il est négatif ou nul entre ses racines $\frac{30\pm\sqrt{900-8k}}{4}$. Comme $0\leqslant\sqrt{900-8k}<30$, ces racines sont dans $]0\,;15[$. Donc $k\in]0\,;112{,}5]$. Pour $k=112{,}5$, on a $\Delta=0$ et une racine double $x=\frac{30}{4}=7{,}5$. L'aire maximale est donc $112{,}5$ m², obtenue pour $x=7{,}5$ m (côté parallèle au mur : 15 m).