40 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Reconnaître un trinôme et ses formes

À retenir : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: lis les coefficients dans l'ordre ($8 - x^2$: $a = -1$, $b = 0$, $c = 8$). Pour $ax^2 + c$: le signe de a donne le sens, $(0\,;c)$ est le sommet. $x^2 = k > 0$ donne $\pm\sqrt{k}$; $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : trinôme ou pas ?** — Dis si la fonction est une fonction polynôme du second degré. Si oui, donne a, b et c ; sinon, explique pourquoi.

(a) $f(x) = 9 - 4x^2$

(b) $g(x) = 7x - 2x^2$

(c) $h(x) = (x-2)^2 + 1$

(d) $k(x) = x^3 + 5x$

(e) $m(x) = \dfrac{3}{x^2}$

(f) $p(x) = x^2 - (x+3)^2$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : équations rappels de 2nde** — Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation.

(a) $x^2 = 49$

(b) $2x^2 + 18 = 0$

(c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(d) $x^2 = 7$

(e) $4x^2 - 12x = 0$

(f) $(x+5)(2x-3) = 0$

(g) $(x-6)^2 = 4$

Ex. 3 ★☆☆ **Développer pour obtenir la forme développée** — Développe et réduis l'expression.

(a) $(x-4)^2$

(b) $3(x-2)(x+4)$

(c) $(x-5)(x+5)$

(d) $-(x+3)(x-5)$

(e) $(3x+1)^2$

(f) $2(x-1)^2 - 7$

Ex. 4 ★★☆ **Les réponses de Léna** — Léna révise ses rappels de 2nde. Relis chacune de ses réponses.

(a) Pour $f(x) = -x^2 + 4$, Léna écrit : « $f(-3) = 9 + 4 = 13$ ». A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

(b) Léna écrit : « $(x-6)^2 = x^2 - 36$ ». Montre avec $x = 1$ qu'elle a tort, puis corrige.

(c) Pour résoudre $3x^2 = 21x$, Léna divise par x et trouve $x = 7$. Quelle solution a-t-elle perdue ? Corrige.

(d) Léna affirme : « l'équation $x^2 = 81$ a pour seule solution 9 ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Associer paraboles et expressions** $ax^2 + c$ — Soit $f_1(x) = 3x^2 - 2$, $f_2(x) = -x^2 + 16$, $f_3(x) = 0{,}2x^2 - 2$ et $f_4(x) = -3x^2$. $\mathcal{P}_A$ est tournée vers le bas, de sommet $(0\,;16)$. $\mathcal{P}_B$ passe par $(0\,;-2)$ et $(5\,;3)$. $\mathcal{P}_C$ passe par $(0\,;-2)$ et $(1\,;1)$. $\mathcal{P}_D$ a pour sommet O et passe par $(1\,;-3)$.

(a) Associe chaque parabole à sa fonction, en justifiant par le signe de a, par c ou par un point.

(b) $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ ont le même sommet. Laquelle est la plus resserrée ? Justifie.

(c) Inès affirme : « $\mathcal{P}_A$ s'obtient en décalant la parabole de $x \mapsto -x^2$ de 16 unités vers la droite ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Résous $f_2(x) = 0$, puis $f_1(x) = -6$.

Ex. 6 ★★☆ **Zoé ou Malik : quelle forme factorisée ?** — Soit $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$. Pour factoriser $f(x)$, Zoé propose $2(x-3)(x+2)$ et Malik propose $2(x+3)(x-2)$.

(a) Développe chacune des deux propositions. Qui a raison ? Justifie.

(b) Déduis-en les racines de f.

(c) Calcule $f(0)$ et $f(4)$ en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée.

(d) Résous $f(x) = -12$ en utilisant la forme développée.

Ex. 7 ★★★ **L'arche de la serre** — L'entrée d'une serre est une arche. On prend un repère dont l'unité est le mètre : l'axe des abscisses est le sol et l'axe des ordonnées est l'axe de symétrie de l'arche. L'arche est la parabole d'une fonction $f(x) = ax^2 + c$. Son sommet est à $4{,}5$ m du sol et elle passe par le point $B(2\,;2{,}5)$.

(a) Détermine c, puis a. Justifie que le signe de a est cohérent avec la forme de l'arche.

(b) Calcule les abscisses des points où l'arche touche le sol. Déduis-en la largeur de l'arche au sol.

(c) Vérifie que $f(x) - 2{,}5 = -0{,}5(x-2)(x+2)$. Résous ensuite $f(x) \geqslant 2{,}5$ sur $[-3\,;3]$ avec un tableau de signes.

(d) Un camion de $2{,}4$ m de large et $3{,}8$ m de haut passe au milieu de l'arche. Peut-il passer ? Justifie.

Ex. 8 ★★★ **Une fonction, deux formes** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+2)(x-4)$. Ilyès affirme : « Ce n'est pas une fonction polynôme du second degré, car il n'y a pas de x^2 dans l'expression ! »

(a) Ilyès a-t-il raison ? Justifie en développant $f(x)$, puis donne a, b et c.

(b) Résous $f(x) = 0$, puis $f(x) = 8$. Choisis à chaque fois la forme de $f(x)$ la plus adaptée.

Ex. 8 **(suite)**

(c) Déduis-en de deux façons l'abscisse de l'axe de symétrie de la parabole. Donne ensuite les coordonnées de son sommet.

(d) Donne le sens de la parabole en justifiant. Dresse le tableau de variations de f et donne son extremum.

(e) Dresse le tableau de signes de $f(x)$, puis résous l'inéquation $f(x) < 0$.

2. *Sommet, axe de symétrie et variations*

À retenir : Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$: racines x_1 et x_2 (signe changé : $x + 2 \to -2$), axe $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, sommet $(m\,;f(m))$. Si $a > 0$, minimum ; si $a < 0$, maximum. Ex. : $2(x + 1)(x - 3)$, axe $x = 1$, sommet $(1\,;-8)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : lire une forme factorisée** — Réponds en une ligne, avec une courte justification.

(a) Donne les racines de $f(x) = 3(x - 4)(x + 2)$.

(b) Donne les racines de $g(x) = -2(x + 4)(2x - 3)$.

(c) Donne une équation de l'axe de symétrie de la parabole de $h(x) = 5(x + 7)(x - 1)$.

(d) Donne les coordonnées du point où la parabole de $p(x) = -0{,}5(x - 2)(x - 8)$ coupe l'axe des ordonnées.

(e) Donne les coordonnées du sommet de la parabole de $q(x) = 4(x + 6)^2$.

(f) La fonction $r(x) = -3(x + 5)(x - 3)$ admet-elle un maximum ou un minimum ? Justifie.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : sommet et extremum** — Détaille le milieu des racines et, si besoin, son image.

(a) Donne les coordonnées du sommet de la parabole de $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$.

(b) Calcule le maximum de $g(x) = -(x + 4)(x - 2)$ et précise en quelle valeur il est atteint.

(c) Le sommet de la parabole de $k(x) = 4(x - 2)(x - 3)$ a pour abscisse 2,5. Calcule son ordonnée.

(d) Donne le sens de variation de $p(x) = -2(x - 5)(x + 1)$ sur $]-\infty\,;2]$. Justifie.

(e) Tom affirme : « le sommet de la parabole de $u(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ est $(3\,;24)$, car $u(0) = 24$ ». Corrige son erreur.

Ex. 11 ★★☆ **Étude complète d'une parabole** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

(a) Vérifie que $f(x) = -2(x + 3)(x - 1)$, puis déduis-en les racines de f.

(b) Sam affirme : « l'axe de symétrie de la parabole est le point $(1\,;0)$ ». Corrige-le.

Ex. 11 **(suite)**

(c) Calcule les coordonnées du sommet S de la parabole.

(d) Complète le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	…	$+\infty$
f(x)	…	…	…

(e) Donne, sans calcul, le point où la parabole coupe l'axe des ordonnées. Justifie.

Ex. 12 ★★☆ **Corriger la copie d'Inès** — Inès étudie $g(x) = 0{,}5(x + 2)(x - 6)$. Elle écrit : « Racines : -6 et 2. Axe : $x = -2$. Sommet : $(-2\,;0{,}5)$. g admet un maximum. »

(a) Corrige les racines de g en expliquant l'erreur d'Inès.

(b) Donne l'équation correcte de l'axe de symétrie de la parabole.

(c) Calcule les coordonnées du sommet et explique d'où vient le 0,5 d'Inès.

(d) g admet-elle un maximum ou un minimum ? Justifie et donne sa valeur.

Ex. 13 ★★☆ **Un bénéfice sur un intervalle borné** — Une petite usine fabrique x centaines d'objets par jour, avec $x \in [0\,;6]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, vaut $B(x) = -2(x - 1)(x - 15)$.

(a) Donne les racines de B et une équation de l'axe de symétrie de la parabole.

(b) Calcule $B(8)$. Explique pourquoi ce n'est pas le bénéfice maximal de l'usine.

(c) Dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;6]$.

(d) Combien d'objets l'usine doit-elle fabriquer pour un bénéfice maximal ? Conclus par une phrase.

Ex. 14 ★★☆ **Retrouver une fonction par symétrie** — La parabole d'une fonction polynôme du second degré f a pour axe de symétrie la droite $x = 3$. Elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 et passe par le point $A(1\,;12)$.

(a) Détermine, par symétrie, la seconde racine de f.

(b) Écris $f(x)$ sous forme factorisée avec a inconnu, puis détermine a grâce au point A.

(c) Calcule les coordonnées du sommet de la parabole.

(d) Vrai ou faux ? « La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;-7)$. » Justifie.

Ex. 15 ★★★ **Un convoi sous l'arche d'un pont** — Une arche de pont a la forme d'une parabole. On note x la distance horizontale (en m) depuis un point O du sol, avec $x \in [0\,;20]$. La hauteur de l'arche (en m) est $h(x) = -0{,}1x^2 + 2x$.

(a) Vérifie que $h(x) = -0{,}1x(x - 20)$, puis déduis-en les abscisses des points où l'arche touche le sol.

Ex. 15 **(suite)**

(b) Donne une équation de l'axe de symétrie de l'arche, puis sa hauteur maximale. Justifie que c'est un maximum.

(c) Dresse le tableau de variations de h sur $[0\,;20]$.

(d) Vérifie que $h(x) - 6{,}4 = -0{,}1(x-4)(x-16)$, puis résous $h(x) \geqslant 6{,}4$ sur $[0\,;20]$.

(e) Un convoi haut de 6,4 m et large de 11 m roule au centre de l'arche. Peut-il passer ? Justifie.

Ex. 16 ★★★ **Vrai ou faux : deux paraboles à démasquer** — On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(2x+1)$ et $g(x) = -3(x-2)^2$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) « Les racines de f sont 3 et -1. »

(b) « L'axe de symétrie de la parabole de f est la droite d'équation $x = 1{,}25$. »

(c) « f admet un maximum, égal à $-12{,}25$, atteint en $1{,}25$. »

(d) « La parabole de g coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;-12)$ et touche l'axe des abscisses en un seul point. »

(e) « Sur l'intervalle $[3\,;6]$, le maximum de g vaut 0. »

3. *Factoriser un trinôme*

À retenir : Factoriser : facteur commun, identités ($9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$) ou racines avec a devant : $2x^2 - 8x + 6 = 2(x-1)(x-3)$. On vérifie en développant. Sans racine (x^2+4), il n'y a pas de forme factorisée.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : factoriser sans calculer de racines** — Factorise chaque expression avec un facteur commun ou une identité remarquable.

(a) $x^2 - 7x$ (b) $4x^2 + 10x$

(c) $25x^2 - 4$ (d) $x^2 - 64$

(e) $x^2 + 6x + 9$ (f) $4x^2 - 12x + 9$

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : de la forme factorisée à la forme développée** — Développe et réduis chaque forme factorisée. Garde le coefficient a devant jusqu'à la fin.

(a) $3(x-1)(x-4)$ (b) $-(x+2)(x-5)$

(c) $(x+6)(x-6)$ (d) $-2(x-3)^2$

(e) $\dfrac{1}{2}(x-2)(x+4)$

Ex. 19 ★★☆ **Trouver l'axe, puis la seconde racine par symétrie** — On considère la fonction polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 16x + 24$.

(a) Résous l'équation $f(x) = 24$ en factorisant par x.

(b) Déduis-en l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Calcule $f(2)$. Que peux-tu dire du nombre 2 ?

(d) Trouve la seconde racine de f par symétrie autour de l'axe.

(e) Écris la forme factorisée de f, puis vérifie-la en développant.

Ex. 20 ★★☆ **L'erreur de Lina** — On pose $f(x) = -3x^2 + 6x + 24$. Lina affirme que les racines de f sont -2 et 4, et elle écrit $f(x) = (x-2)(x+4)$.

(a) Calcule $f(-2)$ et $f(4)$. Les racines trouvées par Lina sont-elles justes ?

(b) Développe l'expression de Lina et compare avec $f(x)$. Explique ses deux erreurs.

(c) Donne la bonne forme factorisée de f et vérifie-la en développant.

Ex. 21 ★★☆ **Retrouver une fonction avec ses racines et un point** — La parabole d'une fonction polynôme du second degré f coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = 5$. Elle passe aussi par le point $A(3\,;8)$.

(a) Explique pourquoi $f(x) = a(x-1)(x-5)$, avec a un nombre réel non nul.

(b) Utilise le point A pour trouver a.

(c) Écris la forme développée de f et donne la valeur de $f(0)$.

(d) Justifie que A est le sommet de la parabole. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?

Ex. 22 ★★☆ **Vrai ou faux sur les formes factorisées** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie, sans utiliser le discriminant.

(a) « La fonction $x \mapsto 2x^2 + 8$ a deux racines : -2 et 2. »

(b) « $5x^2 - 20 = 5(x-2)(x+2)$. »

(c) « $x^2 - 9x = (x-3)(x+3)$. »

(d) « La fonction $x \mapsto -x^2 + 2x - 1$ a une seule racine. »

(e) « Pour $f(x) = x^2 - 6x + 5$, les solutions de $f(x) = 5$ sont les racines de f. »

Ex. 23 ★★★ **Les bougies d'Inès : factoriser pour décider** — Inès fabrique des bougies. Elle en vend x dizaines, avec x dans $[0\,;14]$. Son bénéfice, en euros, est $B(x) = -20x^2 + 280x - 800$.

(a) Calcule $B(0)$. Que représente ce nombre pour Inès ?

(b) Vérifie en développant que $B(x) = -20(x-4)(x-10)$. Déduis-en les racines de B.

(c) Pour quelles quantités de bougies Inès ne perd-elle pas d'argent ? Justifie avec le signe de la forme factorisée.

(d) Donne l'axe de symétrie de la parabole de B à l'aide des racines. Dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;14]$ et donne le bénéfice maximal.

Ex. 23 (suite)

(e) Inès affirme : « Avec 120 bougies, j'ai le même bénéfice qu'avec 20 bougies. » A-t-elle raison ? Justifie par symétrie.

Ex. 24 ★★★ **Différence de deux carrés et coefficient oublié** — On considère les fonctions polynômes du second degré $f(x) = 4x^2 - 9$ et $g(x) = 4x^2 + 9$. Pour factoriser f, Maël écrit : « $f(x) = (x - 1{,}5)(x + 1{,}5)$ ».

(a) Factorise $f(x)$ avec une identité remarquable.

(b) Développe la forme de Maël. A-t-il raison ? Justifie, puis corrige sa forme sans changer ses parenthèses.

(c) Résous l'inéquation $f(x) \leqslant 0$. Justifie avec le signe de la forme factorisée.

(d) Résous l'inéquation $f(x) \geqslant 16$ en factorisant $f(x) - 16$.

(e) Montre que $g(x) \geqslant 9$ pour tout réel x. Peut-on écrire $g(x)$ sous forme factorisée ? Justifie sans discriminant.

4. *Signe d'un trinôme*

À retenir : $a(x - x_1)(x - x_2)$: signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles ; contrôle avec $x = 0$. Stricte : crochets ouverts. Pour $f(x) \geqslant k$, étudie $f(x) - k$. Ex. : $(x - 1)(x - 6) < 0$ pour $x \in]1\,;6[$.

Ex. 25 ★☆☆ **Signe en un coup d'œil** — Pour chaque expression, donne le signe de a et les racines dans l'ordre croissant, puis dresse son tableau de signes.

(a) $E_1 = 2(x - 3)(x + 1)$

(b) $E_2 = -5(x - 4)(x - 7)$

(c) $E_3 = (5 - x)(x + 7)$

(d) $E_4 = 3x(x + 4)$

(e) $E_5 = -(x + 8)^2$

(f) $E_6 = (1 - x)(3 - x)$

Ex. 26 ★☆☆ **Inéquations express** — Résous chaque inéquation dans $\mathbb{R}$.

(a) $(x - 2)(x - 9) \leqslant 0$ (b) $-4(x + 6)(x - 1) < 0$

(c) $(x + 5)^2 > 0$ (d) $-2(x - 3)^2 \geqslant 0$

(e) $(x + 3)(11 - x) \leqslant 0$ (f) $x(10 - x) \geqslant 0$

Ex. 27 ★★☆ **Deux facteurs affines** — Soit $f(x) = (3 - x)(2x + 8)$.

(a) Résous $f(x) = 0$ et range les racines dans l'ordre croissant.

(b) Dresse le tableau de signes de $3 - x$, de $2x + 8$, puis de $f(x)$.

(c) Inès dit : « Il n'y a pas de signe moins devant les parenthèses, donc $a > 0$ et f est positive à l'extérieur des racines. » A-t-elle raison ? Justifie en développant.

(d) Résous $f(x) \geqslant 0$, puis contrôle ton résultat avec $x = 0$.

Ex. 28 ★★☆ **Au-dessus ou au-dessous de 5** — Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$, dont la courbe est la parabole $\mathcal{P}$.

(a) Vérifie que $f(x) - 5 = (x + 4)(x - 2)$.

(b) Résous $f(x) \geqslant 5$.

(c) Pour quelles valeurs de x la parabole $\mathcal{P}$ est-elle strictement au-dessous de la droite d'équation $y = 5$?

(d) Pour résoudre $f(x) \geqslant 5$, Léo vérifie que $f(x) = (x + 3)(x - 1)$ et répond $]-\infty\,;-3] \cup [1\,;+\infty[$. Calcule $f(-3{,}5)$ et explique son erreur.

Ex. 29 ★★☆ **Vrai ou faux sur une parabole** — Soit $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 6)$, dont la courbe est la parabole $\mathcal{P}$. Vrai ou faux ? Justifie.

(a) « $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses exactement pour $x \in]-2\,;6[$. »

(b) « $g(-3) > 0$. »

(c) « L'ensemble des solutions de $g(x) \leqslant 0$ est $[-2\,;6]$. »

(d) « Pour tout réel x, $g(x) \leqslant 8$. »

Ex. 30 ★★☆ **Les bols de Lina** — Lina fabrique et vend entre 0 et 30 bols en céramique par mois. Pour x bols vendus, son bénéfice, en euros, est $B(x) = -10(x - 4)(x - 24)$.

(a) Calcule $B(0)$ et interprète le résultat.

(b) Pour quels nombres de bols le bénéfice est-il positif ou nul ?

(c) Combien de bols Lina doit-elle vendre pour avoir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

(d) Pour quels nombres de bols Lina est-elle en perte ?

Ex. 31 ★★★ **La fusée de Maël** — Maël lance une fusée à eau depuis le sol. Son altitude, en m, t secondes après le lancement, est $h(t) = -5t^2 + 40t$, jusqu'à ce que la fusée retombe au sol.

(a) Factorise $h(t)$ par un facteur commun, puis détermine les instants où la fusée est au sol.

(b) Vérifie que $h(t) - 60 = -5(t - 2)(t - 6)$, puis dresse le tableau de signes de $h(t) - 60$ pendant le vol. Contrôle avec $t = 0$.

(c) Déduis-en pendant combien de temps l'altitude de la fusée est supérieure ou égale à 60 m.

(d) Hugo affirme : « À un moment, la fusée dépasse strictement 80 m. » Vérifie que $h(t) - 80 = -5(t - 4)^2$, puis dis s'il a raison. Justifie.

Ex. 32 ★★★ **Une parabole à reconstituer** — La parabole $\mathcal{P}$ d'une fonction polynôme du second degré f coupe l'axe des abscisses en $x = 5$ et en $x = -1$. Elle passe par le point $A(1\,;-16)$.

(a) Justifie qu'il existe un réel a tel que $f(x) = a(x + 1)(x - 5)$, puis calcule a à l'aide du point A.

(b) Dresse le tableau de signes de $f(x)$, puis contrôle-le avec $x = 0$.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Zoé écrit : « L'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour solution $]-1\,;5[$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Développe $f(x)$, puis résous $f(x) \geqslant -10$ en factorisant $f(x)+10$. Interprète avec $\mathcal{P}$ et la droite d'équation $y=-10$.

5. *Problèmes : modéliser par le second degré*

À retenir : Je donne l'intervalle de la variable. L'extremum (maximum si $a<0$, minimum si $a>0$) est l'image du milieu des racines. S'il sort de l'intervalle, il est à une borne. Ex. : $-(x-1)(x-9)$ a pour maximum 16, en $x=5$.

Ex. 33 ★☆☆ **Choisir la variable et exprimer la grandeur** — Exprime la grandeur demandée, puis précise l'intervalle où la variable a un sens.

(a) Un rectangle a un périmètre de 20 m et une largeur de x m. Exprime son aire $A(x)$.

(b) Un glacier vend ses cornets x € pièce et en vend $120-3x$ par jour. Exprime sa recette $R(x)$ en €.

(c) Un jardin carré de côté x m est entouré d'une allée de 1 m de large. Exprime l'aire totale $T(x)$ sous forme développée.

(d) Une fusée à eau lancée depuis le sol a pour hauteur $h(t)=-5t^2+15t$ (en m, t en s). Sur quel intervalle de temps ce modèle a-t-il un sens ?

Ex. 34 ★☆☆ **La bonne forme pour la bonne question** — Réponds en une ou deux lignes, avec l'unité.

(a) Une pierre lancée depuis une falaise a pour hauteur $h(t)=-5t^2+4t+12$ (en m, t en s). De quelle hauteur part-elle ?

(b) Un jet d'eau a pour hauteur $y=-0{,}1(x-2)(x-22)$ (en m, x distance horizontale en m). À quelles distances x est-il au niveau du sol ?

(c) Un bénéfice vaut $B(x)=-2(x-3)(x-13)$ milliers d'euros pour x centaines d'objets, $0\leqslant x\leqslant 15$. Pour quelle production est-il maximal ?

(d) La nuit, la température extérieure d'un refuge est $T(t)=(t-2)(t-8)$ en °C, t en heures, $0\leqslant t\leqslant 10$. Quelle est la température minimale ?

(e) Un ballon a pour hauteur $h(t)=-5(t+1)(t-3)$ (en m, $t\geqslant 0$ en s). Au bout de combien de temps touche-t-il le sol ?

(f) Pour $h(t)=-5t(t-2)$ (en m, t en s), Inès affirme : « la hauteur maximale est 1 m ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 35 ★★☆ **Un potager contre un mur** — Malik dispose de 24 m de grillage pour clore un potager rectangulaire adossé à un mur : le grillage forme seulement trois côtés. On note x la largeur, en m, des deux côtés perpendiculaires au mur.

(a) Exprime la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$ en m². Précise l'intervalle de x.

(b) Résous $A(x)=0$ à l'aide de la forme factorisée.

(c) Déduis-en la largeur qui donne l'aire maximale, puis cette aire maximale.

(d) Malik voudrait un potager de 80 m². Est-ce possible ? Justifie.

Ex. 36 ★★☆ **Une balle au-dessus de 25 m** — Chloé lance une balle verticalement depuis le sol. Sa hauteur, en m, au bout de t secondes est $h(t)=-5t^2+30t$.

(a) Factorise $h(t)$, puis déduis-en l'instant où la balle retombe et l'intervalle où le modèle a un sens.

(b) À quel instant la balle est-elle au plus haut ? Quelle est alors sa hauteur ?

(c) Vérifie que $h(t)-25=-5(t-1)(t-5)$.

(d) Pendant combien de temps la balle est-elle à 25 m ou plus ? Justifie avec un tableau de signes.

Ex. 37 ★★☆ **Le prix des places de théâtre** — Une troupe de théâtre vend la place x €. Elle prévoit d'en vendre $400-20x$. La mairie impose un prix compris entre 4 € et 8 €.

(a) Exprime la recette $R(x)$ en €, puis développe-la.

(b) Résous $R(x)=0$, puis déduis-en l'axe de symétrie de la parabole.

(c) Justifie le sens de variation de R sur $[4\,;8]$, puis dresse son tableau de variations.

(d) Quel prix la troupe doit-elle choisir pour que sa recette soit maximale ? Donne cette recette.

Ex. 38 ★★☆ **Le bénéfice d'un atelier de bougies** — Un atelier fabrique x centaines de bougies, avec $0\leqslant x\leqslant 10$. La recette vaut $R(x)=-x^2+18x$ et le coût vaut $C(x)=4x+24$, en milliers d'euros.

(a) Exprime le bénéfice $B(x)$ sous forme développée.

(b) Vérifie que $B(x)=-(x-2)(x-12)$.

(c) Dresse le tableau de signes de B sur $[0\,;10]$. Pour quelles productions l'atelier est-il rentable ?

(d) Quelle production donne le bénéfice maximal ? Donne ce bénéfice en euros.

Ex. 39 ★★★ **Un bateau sous le pont-arche** — Un pont en arche a ses deux pieds au niveau de l'eau, à 12 m l'un de l'autre. À la distance x m du pied gauche ($0\leqslant x\leqslant 12$), l'arche a pour hauteur $f(x)$ m, où f est une fonction polynôme du second degré. L'arche passe par $B(2\,;5)$.

(a) Justifie que $f(x)=a\,x(x-12)$, puis utilise le point B pour trouver a. Écris $f(x)$ sous forme développée.

Ex. 39 **(suite)**

(b) Détermine la hauteur maximale de l'arche et l'endroit où elle est atteinte. Conclus par une phrase.

(c) Vérifie que $f(x) - 8 = -0{,}25(x-4)(x-8)$.

(d) Résous l'inéquation $f(x) \geqslant 8$ sur $[0\,;12]$ à l'aide d'un tableau de signes.

(e) Un bateau de 3,5 m de large a un toit plat à 8 m au-dessus de l'eau. Peut-il passer sous l'arche ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Une place carrée à daller** — Une place ABCD est un carré de 10 m de côté. On place M, N, P, Q sur [AB], [BC], [CD], [DA] avec $\text{AM} = \text{BN} = \text{CP} = \text{DQ} = x$ m. Le carré MNPQ sera dallé, et les quatre triangles rectangles des coins seront plantés de gazon.

(a) Indique l'intervalle où x a un sens. Exprime l'aire du triangle MBN, puis montre que l'aire dallée vaut $S(x) = 2x^2 - 20x + 100$ m².

(b) Résous $S(x) = 100$. Déduis-en l'axe de symétrie de la parabole, puis l'aire dallée minimale. Conclus par une phrase.

(c) Le budget permet de daller au plus 68 m². Vérifie que $S(x) - 68 = 2(x-2)(x-8)$, puis détermine les valeurs de x qui respectent le budget.

(d) Un arbre près du coin A impose $AM \leqslant 3$ m. Avec cette contrainte et le budget, quelles valeurs de x restent possibles ? Quelle est alors la plus petite aire dallée ? Justifie.