1. Reconnaître un trinôme et ses formes

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : trinôme ou pas ?**

(a) On écrit $f(x) = -4x^2 + 0x + 9$: c'est un trinôme avec $a = -4$, $b = 0$ et $c = 9$ (attention à l'ordre).

(b) On écrit $g(x) = -2x^2 + 7x + 0$: c'est un trinôme avec $a = -2$, $b = 7$ et $c = 0$.

(c) On développe : $h(x) = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$. C'est un trinôme avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 5$.

(d) Non : il y a un terme en x^3, donc k est de degré 3.

(e) Non : m n'est pas définie en 0 et $\frac{3}{x^2}$ ne s'écrit pas sous la forme $ax^2 + bx + c$.

(f) On développe : $p(x) = x^2 - (x^2 + 6x + 9) = -6x - 9$. Le terme en x^2 disparaît ($a = 0$), donc p est une fonction affine et pas un trinôme.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : équations rappels de 2nde**

(a) $49 > 0$, il y a deux solutions : $x = -7$ ou $x = 7$. $S = \{-7\,;7\}$.

(b) $2x^2 = -18$, donc $x^2 = -9$. Un carré est toujours positif ou nul et $-9 < 0$: aucune solution. $S = \varnothing$.

(c) On reconnaît une identité remarquable : $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. $(x-5)^2 = 0$ donne $x - 5 = 0$, donc $x = 5$. $S = \{5\}$.

(d) $7 > 0$, donc $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$ (ne pas oublier $-\sqrt{7}$). $S = \{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$.

(e) On factorise par $4x$: $4x(x-3) = 0$. Par le produit nul, $x = 0$ ou $x = 3$. $S = \{0\,;3\}$.

(f) Produit nul : $x + 5 = 0$ ou $2x - 3 = 0$, donc $x = -5$ ou $x = 1{,}5$. $S = \{-5\,;1{,}5\}$.

(g) $4 > 0$, donc $x - 6 = -2$ ou $x - 6 = 2$, soit $x = 4$ ou $x = 8$. $S = \{4\,;8\}$.

Ex. 3 ★☆☆ **Développer pour obtenir la forme développée**

(a) $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$ (et non $x^2 - 16$).

(b) $3(x^2 + 4x - 2x - 8) = 3(x^2 + 2x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$.

(c) $(x-5)(x+5) = x^2 - 25$.

Ex. 3 (suite)

(d) $-(x^2 - 5x + 3x - 15) = -(x^2 - 2x - 15) = -x^2 + 2x + 15$.

(e) $(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$.

(f) $2(x^2 - 2x + 1) - 7 = 2x^2 - 4x + 2 - 7 = 2x^2 - 4x - 5$.

Ex. 4 ★★☆ **Les réponses de Léna**

(a) Non : $-x^2$ n'est pas $(-x)^2$. $f(-3) = -(-3)^2 + 4 = -9 + 4 = -5$.

(b) Pour $x = 1$: $(1-6)^2 = 25$ mais $1^2 - 36 = -35$. Les deux expressions ne sont pas égales. Correction : $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$.

(c) En divisant par x, elle perd $x = 0$. On écrit $3x^2 - 21x = 0$, soit $3x(x-7) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 7$.

(d) Non : $(-9)^2 = 81$ aussi. Comme $81 > 0$, il y a deux solutions : $x = -9$ ou $x = 9$.

Ex. 5 ★★☆ **Associer paraboles et expressions $ax^2 + c$**

(a) $\mathcal{P}_A$ est tournée vers le bas, donc $a < 0$ (f_2 ou f_4), et $f_2(0) = 16$: c'est f_2. $\mathcal{P}_D$: $f_4(0) = 0$ et $f_4(1) = -3$, c'est f_4. $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ ont $c = -2$ (f_1 ou f_3). Comme $f_3(5) = 0{,}2 \times 25 - 2 = 3$, $\mathcal{P}_B$ représente f_3. Comme $f_1(1) = 3 - 2 = 1$, $\mathcal{P}_C$ représente f_1.

(b) $\mathcal{P}_C$ représente f_1 avec $a = 3$, et $\mathcal{P}_B$ représente f_3 avec $a = 0{,}2$. Comme 3 est plus éloigné de 0 que 0,2, c'est $\mathcal{P}_C$ la plus resserrée.

(c) Non : dans $ax^2 + c$, c déplace la parabole verticalement. $\mathcal{P}_A$ s'obtient par une translation de 16 unités vers le haut, et son sommet est $(0\,;16)$, pas $(16\,;0)$.

(d) $-x^2 + 16 = 0$ donne $x^2 = 16$, donc $x = -4$ ou $x = 4$. $3x^2 - 2 = -6$ donne $x^2 = -\frac{4}{3} < 0$: aucune solution.

Ex. 6 ★★☆ **Zoé ou Malik : quelle forme factorisée ?**

(a) $2(x-3)(x+2) = 2(x^2 - x - 6) = 2x^2 - 2x - 12$ et $2(x+3)(x-2) = 2(x^2 + x - 6) = 2x^2 + 2x - 12$. Seule la proposition de Zoé redonne $f(x)$: Zoé a raison (Malik s'est trompé sur le signe du terme en x).

(b) Avec $f(x) = 2(x-3)(x+2)$ et le produit nul : $x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$. Les racines de f sont -2 et 3.

(c) Avec la forme développée : $f(0) = c = -12$. Avec la forme factorisée : $f(4) = 2 \times 1 \times 6 = 12$.

Ex. 6 **(suite)**

(d) $2x^2 - 2x - 12 = -12$ donne $2x^2 - 2x = 0$, soit $2x(x-1) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 1$.

Ex. 7 ★★★ **L'arche de la serre**

(a) Le sommet $(0\,;c)$ est sur l'axe des ordonnées, à $4\{,\}5$ m du sol, donc $c = 4{,}5$. B est sur la parabole : $f(2) = 4a + 4{,}5 = 2{,}5$, donc $4a = -2$ et $a = -0{,}5$. Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. C'est bien la forme d'une arche. Ainsi $f(x) = -0{,}5x^2 + 4{,}5$.

(b) On résout $f(x) = 0$: $0{,}5x^2 = 4{,}5$, donc $x^2 = 9$, d'où $x = -3$ ou $x = 3$ (il ne faut pas oublier -3). L'arche touche le sol en $x = -3$ et en $x = 3$. Elle mesure $3 - (-3) = 6$ m de large au sol. Le modèle n'a de sens que pour x dans $[-3\,;3]$.

(c) En développant : $-0{,}5(x-2)(x+2) = -0{,}5(x^2 - 4) = -0{,}5x^2 + 2$. On a aussi $f(x) - 2{,}5 = -0{,}5x^2 + 4{,}5 - 2{,}5 = -0{,}5x^2 + 2$. Les deux expressions sont égales. Les racines sont -2 et 2. Comme $a = -0{,}5 < 0$, l'expression est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.

x	-3	-2	0	2	3
f(x) − 2,5	-	0	+	0	-

Donc $S = [-2\,;2]$. L'arche mesure au moins $2\{,\}5$ m de haut sur une bande de 4 m de large.

(d) Le camion est centré : ses bords sont en $x = -1{,}2$ et $x = 1{,}2$. La parabole descend quand on s'éloigne du sommet, donc c'est sur les bords que l'arche est la plus basse au-dessus du camion. $f(1{,}2) = -0{,}5 \times 1{,}44 + 4{,}5 = -0{,}72 + 4{,}5 = 3{,}78$ m. Par symétrie, $f(-1{,}2) = 3{,}78$ m aussi. Or $3{,}78 < 3{,}8$. Le camion ne peut pas passer : il lui manque 2 cm à chaque coin.

Ex. 8 ★★★ **Une fonction, deux formes**

(a) Non, Ilyès a tort. En développant : $f(x) = -(x^2 - 4x + 2x - 8) = -(x^2 - 2x - 8) = -x^2 + 2x + 8$. C'est bien une fonction polynôme du second degré, avec $a = -1$ (donc $a \neq 0$), $b = 2$ et $c = 8$.

(b) Pour $f(x) = 0$, on prend la forme factorisée. Par le produit nul, $x + 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$, donc $x = -2$ ou $x = 4$. Pour $f(x) = 8$, on prend la forme développée : $-x^2 + 2x + 8 = 8$, soit $-x^2 + 2x = 0$. On factorise : $x(-x + 2) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 2$. Il ne faut pas diviser par x : on perdrait la solution 0.

Ex. 8 **(suite)**

(c) Avec le milieu des racines : $x = \frac{-2+4}{2} = 1$. Avec les deux abscisses de même image 8 : $x = \frac{0+2}{2} = 1$. L'axe de symétrie est la droite $x = 1$. Le sommet a pour abscisse 1 et pour ordonnée $f(1) = -(1+2)(1-4) = -3 \times (-3) = 9$. Le sommet est $S(1\,;9)$.

(d) Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

x	-∞	1	+∞
f(x)	↗	9	↘

f est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$. f admet un maximum égal à 9, atteint en $x = 1$.

(e) Les racines sont -2 et 4 et $a = -1 < 0$. $f(x)$ a donc le signe de a (négatif) à l'extérieur des racines et il est positif entre elles.

x	-∞	-2	1	4	+∞
f(x)	-	0	+	0	-

Donc $S =]-\infty\,;-2[\cup]4\,;+\infty[$.

2. *Sommet, axe de symétrie et variations*

Ex. 9 ★★★ **Automatismes : lire une forme factorisée**

(a) Produit nul : $x - 4 = 0$ ou $x + 2 = 0$. Les racines sont 4 et -2
(on change le signe).

(b) $x + 4 = 0$ ou $2x - 3 = 0$, soit $x = -4$ ou $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$.
Les racines sont -4 et 1,5
(et pas 3).

(c) Racines -7 et 1. L'axe passe par leur milieu : $x = \frac{-7+1}{2} = -3$. L'axe est la droite d'équation $x = -3$.

(d) $p(0) = -0{,}5 \times (-2) \times (-8) = -8$. La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;-8)$.

(e) q n'a qu'une racine, -6 (racine double). Le sommet est le point $(-6\,;0)$, sur l'axe des abscisses.

(f) $a = -3 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, donc r admet un maximum
(atteint au sommet).

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : sommet et extremum**

(a) Milieu des racines 1 et 5 : $m = \frac{1+5}{2} = 3$.
$f(3) = 2 \times 2 \times (-2) = -8$. Sommet $(3\,;-8)$.

(b) Racines -4 et 2, milieu $m = \frac{-4+2}{2} = -1$.
$g(-1) = -(3) \times (-3) = 9$. Comme $a = -1 < 0$, le maximum vaut 9, atteint en -1.

(c) $k(2{,}5) = 4 \times 0{,}5 \times (-0{,}5) = -1$. L'ordonnée du sommet est -1
(et pas $a = 4$).

(d) Racines 5 et -1, axe $x = \frac{5+(-1)}{2} = 2$. Comme $a = -2 < 0$, p est croissante puis décroissante : p est croissante sur $]-\infty\,;2]$.

(e) L'abscisse 3, milieu de 2 et 4, est juste. Mais $u(0) = 24$ donne le point sur l'axe des ordonnées, pas le sommet : $u(3) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$. Le sommet est $(3\,;-3)$.

Ex. 11 ★★☆ **Étude complète d'une parabole**

(a) $-2(x+3)(x-1) = -2(x^2+2x-3) = -2x^2-4x+6 = f(x)$. Produit nul : $x+3=0$ ou $x-1=0$. Les racines de f sont -3 et 1.

(b) Un axe est une droite, pas un point, et il passe par le milieu des racines, pas par une racine : $x = \frac{-3+1}{2} = -1$. L'axe est la droite d'équation $x = -1$.

(c) $f(-1) = -2 \times 2 \times (-2) = 8$. Le sommet est $S(-1\,;8)$.

(d) $a = -2 < 0$: f est croissante puis décroissante, de maximum 8 en -1.

x	-∞	-1	+∞
f(x)	↗	8	↘

(aucune valeur aux bornes $\pm\infty$).

(e) $f(0) = c = 6$: c'est le terme constant de la forme développée. La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;6)$.

Ex. 12 ★★☆ **Corriger la copie d'Inès**

(a) Inès n'a pas changé le signe. $x+2=0$ donne -2 et $x-6=0$ donne 6 : les racines sont -2 et 6.

(b) L'axe passe par le milieu des racines : $x = \frac{-2+6}{2} = 2$. L'axe est la droite d'équation $x = 2$.

(c) $g(2) = 0{,}5 \times 4 \times (-4) = -8$. Le sommet est $(2\,;-8)$. Inès a pris $a = 0{,}5$ comme ordonnée, alors qu'elle se calcule.

(d) $a = 0{,}5 > 0$: g est décroissante puis croissante. Elle admet donc un minimum, égal à -8, atteint en $x = 2$.

Ex. 13 ★★☆ **Un bénéfice sur un intervalle borné**

(a) Produit nul : les racines sont 1 et 15. L'axe est la droite d'équation $x = \frac{1+15}{2} = 8$.

(b) $B(8) = -2 \times 7 \times (-7) = 98$. Mais $8 \notin [0\,;6]$: l'usine ne peut pas fabriquer 800 objets, donc ce maximum n'est pas atteint.

(c) $a = -2 < 0$: B est croissante jusqu'à 8, donc croissante sur $[0\,;6]$. $B(0) = -2 \times (-1) \times (-15) = -30$ et $B(6) = -2 \times 5 \times (-9) = 90$.

x	0		6
B(x)	-30	↗	90

(d) Le maximum est atteint à la borne $x = 6$: l'usine doit fabriquer 600 objets par jour, pour un bénéfice maximal de 90 000 €.

Ex. 14 ★★☆ **Retrouver une fonction par symétrie**

(a) 3 est le milieu des deux racines : la seconde racine est à la même distance 4 de l'axe, de l'autre côté : $3+4=7$.

(b) $f(x) = a(x+1)(x-7)$. $f(1) = a \times 2 \times (-6) = -12a = 12$, donc $a = -1$: $f(x) = -(x+1)(x-7)$.

(c) L'abscisse du sommet est 3 ; $f(3) = -(4) \times (-4) = 16$. Le sommet est $(3\,;16)$, c'est un maximum car $a = -1 < 0$.

(d) Faux : $f(0) = -(1) \times (-7) = 7$. La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;7)$.

Ex. 15 ★★★ **Un convoi sous l'arche d'un pont**

(a) $-0{,}1x(x-20) = -0{,}1x^2 + 2x = h(x)$. Produit nul : $x=0$ ou $x-20=0$, soit $x=0$ ou $x=20$. L'arche touche le sol en $x=0$ et en $x=20$.

(b) L'axe passe par le milieu des racines : $\frac{0+20}{2} = 10$, c'est la droite d'équation $x = 10$. Sommet : $h(10) = -0{,}1 \times 10 \times (-10) = 10$. Comme $a = -0{,}1 < 0$, h croît puis décroît : c'est un maximum. L'arche mesure au plus 10 m de haut.

(c) $h(0) = 0$, $h(10) = 10$, $h(20) = 0$; $a < 0$, donc h est croissante puis décroissante :

x	0		10		20
h(x)	0	↗	10	↘	0

(d) $-0{,}1(x-4)(x-16) = -0{,}1(x^2-20x+64) = -0{,}1x^2+2x-6{,}4 = h(x) - 6{,}4$. Racines 4 et 16, et $a = -0{,}1 < 0$: le produit est négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles. $h(x) \geqslant 6{,}4$ pour $x \in [4\,;16]$.

Ex. 15 **(suite)**

(e) Centré en $x = 10$, le convoi occupe $[10 - 5{,}5\,;10 + 5{,}5] = [4{,}5\,;15{,}5]$, qui est inclus dans $[4\,;16]$. Partout sous le convoi, l'arche mesure au moins 6,4 m : le convoi peut passer.

Ex. 16 ★★★ **Vrai ou faux : deux paraboles à démasquer**

(a) Faux. Produit nul : $x - 3 = 0$ ou $2x + 1 = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -0{,}5$. Le facteur $2x + 1$ s'annule en $-\frac{1}{2}$, pas en -1. Les racines sont $-0{,}5$ et 3.

(b) Vrai. L'axe passe par le milieu des racines : $\frac{-0{,}5+3}{2} = 1{,}25$. L'axe est la droite d'équation $x = 1{,}25$.

(c) Faux. La valeur est juste : $f(1{,}25) = 2 \times (-1{,}75) \times 3{,}5 = -12{,}25$. Mais $a = 2 > 0$: f est décroissante puis croissante, donc $-12{,}25$ est un minimum, pas un maximum.

(d) Vrai. $g(0) = -3 \times (-2)^2 = -12$, donc la parabole coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;-12)$. $g(x) = 0$ seulement pour $x = 2$ (racine double) : le sommet $(2\,;0)$ est sur l'axe des abscisses, la parabole le touche en un seul point.

(e) Faux. Le sommet a pour abscisse 2, hors de $[3\,;6]$. Comme $a = -3 < 0$, g est décroissante sur $[2\,;+\infty[$, donc sur $[3\,;6]$. Le maximum est atteint à la borne 3 : $g(3) = -3$ (et $g(6) = -48$). Le maximum de g sur $[3\,;6]$ vaut -3.

3. *Factoriser un trinôme*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : factoriser sans calculer de racines**

(a) Facteur commun x : $x^2 - 7x = x(x - 7)$.

(b) Facteur commun $2x$: $4x^2 + 10x = 2x(2x + 5)$.

(c) $a^2 - b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$: $25x^2 - 4 = (5x - 2)(5x + 2)$.

(d) $a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 8$: $x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$.

(e) $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

(f) $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : de la forme factorisée à la forme développée**

(a) $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4$, donc $3(x - 1)(x - 4) = 3x^2 - 15x + 12$.

(b) $(x + 2)(x - 5) = x^2 - 3x - 10$, donc $-(x + 2)(x - 5) = -x^2 + 3x + 10$.

(c) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$: $(x + 6)(x - 6) = x^2 - 36$.

(d) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, donc $-2(x - 3)^2 = -2x^2 + 12x - 18$.

(e) $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$, donc $\frac{1}{2}(x - 2)(x + 4) = 0{,}5x^2 + x - 4$.

Ex. 19 ★★☆ **Trouver l'axe, puis la seconde racine par symétrie**

(a) $2x^2 - 16x + 24 = 24 \iff 2x^2 - 16x = 0 \iff 2x(x - 8) = 0$. Par le produit nul, $x = 0$ ou $x = 8$. Attention : ce ne sont pas les racines de f.

(b) 0 et 8 ont la même image 24, donc l'axe passe par leur milieu : c'est la droite d'équation $x = \frac{0+8}{2} = 4$.

(c) $f(2) = 8 - 32 + 24 = 0$, donc 2 est une racine de f.

(d) 2 est à 2 unités à gauche de l'axe $x = 4$. L'autre racine est à 2 unités à droite : c'est 6.

(e) On garde $a = 2$ devant : $f(x) = 2(x - 2)(x - 6)$. Vérification : $2(x^2 - 8x + 12) = 2x^2 - 16x + 24$. On ne doit pas écrire $(x - 2)(x - 6)$, car le a serait oublié.

Ex. 20 ★★☆ **L'erreur de Lina**

(a) $f(-2) = -12 - 12 + 24 = 0$ et $f(4) = -48 + 24 + 24 = 0$. Les racines de Lina sont donc justes : ce sont -2 et 4.

(b) $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8 \neq -3x^2 + 6x + 24$. Première erreur : les signes dans les parenthèses, car la racine -2 donne $(x + 2)$ et la racine 4 donne $(x - 4)$. Deuxième erreur : elle a oublié le coefficient $a = -3$.

(c) $f(x) = -3(x + 2)(x - 4)$. Vérification : $-3(x^2 - 2x - 8) = -3x^2 + 6x + 24$. On retrouve bien $f(x)$.

Ex. 21 ★★☆ **Retrouver une fonction avec ses racines et un point**

(a) Les racines de f sont 1 et 5. La forme factorisée est donc $f(x) = a(x - 1)(x - 5)$, avec $a \neq 0$.

(b) $f(3) = 8$ donne $a \times (3 - 1) \times (3 - 5) = 8$, soit $-4a = 8$, donc $a = -2$. Ainsi $f(x) = -2(x - 1)(x - 5)$.

(c) $f(x) = -2(x^2 - 6x + 5) = -2x^2 + 12x - 10$. Alors $f(0) = c = -10$: la parabole coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;-10)$.

Ex. 21 (suite)

(d) L'axe passe par le milieu des racines : $x = \frac{1+5}{2} = 3$. Le sommet a pour abscisse 3 et pour ordonnée $f(3) = 8$: c'est bien $A(3\,;8)$. Comme $a = -2 < 0$, 8 est le maximum de f.

Ex. 22 ★★☆ **Vrai ou faux sur les formes factorisées**

(a) Faux. $2 \times 2^2 + 8 = 16 \neq 0$, et de même $2 \times (-2)^2 + 8 = 16$. Un carré est positif, donc $2x^2 + 8 \geqslant 8 > 0$: la fonction n'a aucune racine, donc pas de forme factorisée. C'est $2x^2 - 8$ qui a pour racines -2 et 2.

(b) Vrai. $5(x-2)(x+2) = 5(x^2-4) = 5x^2 - 20$.

(c) Faux. $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$. La bonne factorisation utilise le facteur commun x : $x^2 - 9x = x(x-9)$.

(d) Vrai. $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$. Il y a une racine double : 1.

(e) Faux. $f(x) = 5 \iff x(x-6) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 6$. Mais $f(0) = 5 \neq 0$. Ces solutions donnent seulement l'axe $x = 3$. Les racines sont 1 et 5, car $f(x) = (x-1)(x-5)$.

Ex. 23 ★★★ **Les bougies d'Inès : factoriser pour décider**

(a) $B(0) = -20 \times 0^2 + 280 \times 0 - 800 = -800$. Si Inès ne vend aucune bougie, elle perd 800 € : ce sont ses frais fixes.

(b) $-20(x-4)(x-10) = -20(x^2 - 14x + 40) = -20x^2 + 280x - 800 = B(x)$: le coefficient $a = -20$ est bien gardé devant. Par le produit nul, $x - 4 = 0$ ou $x - 10 = 0$, donc les racines de B sont 4 et 10.

(c) $B(x) = -20(x-4)(x-10)$ a le signe de $a = -20$ à l'extérieur des racines : il y est négatif, et il est positif entre elles. $B(x) \geqslant 0 \iff x \in [4\,;10]$, et cet intervalle est bien dans $[0\,;14]$. Inès ne perd pas d'argent si elle vend entre 40 et 100 bougies.

(d) L'axe passe par le milieu des racines : c'est la droite d'équation $x = \frac{4+10}{2} = 7$. Comme $a = -20 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. $B(7) = -20 \times 3 \times (-3) = 180$, et aux bornes $B(0) = B(14) = -800$.

x	0		7		14
B(x)	-800	↗	180	↘	-800

Le bénéfice maximal est de 180 €, pour 70 bougies vendues.

Ex. 23 (suite)

(e) 120 bougies correspondent à $x = 12$ et 20 bougies à $x = 2$. On a $\frac{2+12}{2} = 7$: ces deux abscisses sont symétriques par rapport à l'axe $x = 7$, donc $B(2) = B(12)$. Inès a raison. $B(2) = -20 \times (-2) \times (-8) = -320$: elle perd 320 € dans les deux cas.

Ex. 24 ★★★ **Différence de deux carrés et coefficient oublié**

(a) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$ (identité $a^2 - b^2$). Par le produit nul, f s'annule en 1,5 et en $-1{,}5$.

(b) $(x - 1{,}5)(x + 1{,}5) = x^2 - 2{,}25$, et ce n'est pas $4x^2 - 9$. Maël a les bonnes racines, mais il a oublié le coefficient $a = 4$, qui est le même dans les deux formes. La bonne forme est $f(x) = 4(x - 1{,}5)(x + 1{,}5)$. Vérification : $4(x^2 - 2{,}25) = 4x^2 - 9$.

(c) $f(x) = 4(x - 1{,}5)(x + 1{,}5)$ a le signe de $a = 4 > 0$ à l'extérieur des racines. Il est donc négatif entre elles et s'annule en $-1{,}5$ et en 1,5. Conclusion : $S = [-1{,}5\,;1{,}5]$.

(d) $f(x) \geqslant 16 \iff 4x^2 - 25 \geqslant 0$. Or $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5) = 4(x - 2{,}5)(x + 2{,}5)$, avec pour racines $-2{,}5$ et 2,5. Comme $a = 4 > 0$, l'expression est positive à l'extérieur des racines. Conclusion : $S =]-\infty\,;-2{,}5] \cup [2{,}5\,;+\infty[$.

(e) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $4x^2 \geqslant 0$ et $g(x) = 4x^2 + 9 \geqslant 9$. Ainsi $g(x)$ n'est jamais nul et g n'a aucune racine. Une forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ s'annulerait en x_1.
Donc $g(x)$ ne peut pas s'écrire sous forme factorisée.

4. *Signe d'un trinôme*

Ex. 25 ★☆☆ **Signe en un coup d'œil**

(a) $a = 2 > 0$; racines -1 et 3. Signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles :

x	-∞	-1	3	+∞	
E_1	+	0	−	0	+

(b) $a = -5 < 0$; racines 4 et 7. Négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles :

x	-∞	4	7	+∞	
E_2	−	0	+	0	−

Ex. 25 **(suite)**

(c) $(5-x)(x+7) = -(x-5)(x+7)$: $a = -1 < 0$; racines -7 et 5. Négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles :

x	-∞	-7	5	+∞	
E_3	−	0	+	0	−

(d) $3x(x+4) = 3(x-0)(x+4)$: $a = 3 > 0$; racines -4 et 0. Positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles :

x	-∞	-4	0	+∞	
E_4	+	0	−	0	+

(e) $-(x+8)^2 = -1 \times (x+8)^2$: $a = -1 < 0$; une seule racine (racine double) : -8. Un carré est positif ou nul, donc E_5 est négatif partout sauf en -8, où il s'annule :

x	-∞	-8	+∞
E_5	−	0	−

(f) $(1-x)(3-x) = (x-1)(x-3)$: les deux signes moins se compensent, donc $a = 1 > 0$; racines 1 et 3. Positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Contrôle avec les deux facteurs affines :

x	-∞	1	3	+∞	
$1-x$	+	0	−	−	−
$3-x$	+	+	+	0	−
E_6	+	0	−	0	+

Ex. 26 ★☆☆ **Inéquations express**

(a) $a = 1 > 0$: l'expression est négative entre 2 et 9 et nulle en ces valeurs (inégalité large) : $S = [2\,;9]$.

(b) $a = -4 < 0$: l'expression est négative à l'extérieur des racines -6 et 1 ; inégalité stricte :
$S =]-\infty\,;-6[\cup]1\,;+\infty[$.

(c) Un carré est positif ou nul, et nul seulement en -5 ; inégalité stricte : $S =]-\infty\,;-5[\cup]-5\,;+\infty[$
(tous les réels sauf -5).

(d) $-2(x-3)^2$ est du signe de $a = -2$: négatif, et nul seulement en 3.
Donc $S = \{3\}$.

(e) $(x+3)(11-x) = -(x+3)(x-11)$: $a = -1 < 0$, l'expression est négative à l'extérieur des racines -3 et 11 ; inégalité large : $S =]-\infty\,;-3] \cup [11\,;+\infty[$.

(f) $x(10-x) = -x(x-10)$: $a = -1 < 0$, l'expression est positive entre les racines 0 et 10 ; inégalité large :
$S = [0\,;10]$.

Ex. 27 ★★☆ **Deux facteurs affines**

(a) Produit nul : $3-x = 0$ ou $2x+8 = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -4$. Dans l'ordre croissant : -4 puis 3.

(b) $3-x > 0$ pour $x < 3$; $2x+8 > 0$ pour $x > -4$. On applique la règle des signes :

x	-∞	-4	3	+∞	
3 − x	+		+	0	−
2x + 8	−	0	+		+
f(x)	−	0	+	0	−

(c) Non. $f(x) = 6x + 24 - 2x^2 - 8x = -2x^2 - 2x + 24$, donc $a = -2 < 0$: f est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles, comme le montre le tableau.

(d) $f(x) \geqslant 0$ entre les racines, bornes comprises :
$S = [-4\,;3]$. Contrôle : $f(0) = 3 \times 8 = 24 > 0$, et 0 appartient bien à $[-4\,;3]$.

Ex. 28 ★★☆ **Au-dessus ou au-dessous de 5**

(a) $(x+4)(x-2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$ et $f(x) - 5 = x^2 + 2x - 3 - 5 = x^2 + 2x - 8$. C'est vérifié.

(b) On étudie le signe de $f(x) - 5 = (x+4)(x-2)$:
$a = 1 > 0$, donc l'expression est positive à l'extérieur des racines -4 et 2. Inégalité large :
$S =]-\infty\,;-4] \cup [2\,;+\infty[$.

(c) On cherche $f(x) < 5$, c'est-à-dire $(x+4)(x-2) < 0$: entre les racines, crochets ouverts. $\mathcal{P}$ est sous la droite pour $x \in]-4\,;2[$.

(d) $f(-3{,}5) = 12{,}25 - 7 - 3 = 2{,}25 < 5$, alors que $-3{,}5$ fait partie de sa réponse. Léo a étudié le signe de $f(x)$, c'est-à-dire qu'il a comparé à 0, au lieu d'étudier le signe de $f(x) - 5$.

Ex. 29 ★★☆ **Vrai ou faux sur une parabole**

(a) Vrai. $a = -\frac{1}{2} < 0$, donc $g(x) > 0$ entre les racines -2 et 6 : c'est là que $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

(b) Faux. $g(-3) = -\frac{1}{2} \times (-1) \times (-9) = -4{,}5 < 0$: -3 est à l'extérieur des racines, où g a le signe de a.

(c) Faux. Comme $a < 0$, $g(x) \leqslant 0$ à l'extérieur des racines, bornes comprises : $S =]-\infty\,;-2] \cup [6\,;+\infty[$.

(d) Vrai. Axe : $x = \frac{-2+6}{2} = 2$. Ordonnée du sommet : $g(2) = -\frac{1}{2} \times 4 \times (-4) = 8$. Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : 8 est le maximum de g.

Ex. 30 ★★☆ **Les bols de Lina**

(a) $B(0) = -10 \times (-4) \times (-24) = -960$. Si elle ne vend aucun bol, Lina perd 960 €.

(b) $a = -10 < 0$: $B(x) \geqslant 0$ entre les racines 4 et 24, bornes comprises. Le bénéfice est positif ou nul quand Lina vend de 4 à 24 bols.

(c) Axe : $x = \frac{4+24}{2} = 14$. $B(14) = -10 \times 10 \times (-10) = 1\,000$. Comme $a < 0$, c'est un maximum : 1 000 € pour 14 bols vendus.

(d) $B(x) < 0$ à l'extérieur des racines (crochets ouverts), en restant dans $[0\,;30]$: $x \in [0\,;4[\cup]24\,;30]$. Lina est en perte pour 0 à 3 bols et pour 25 à 30 bols.

Ex. 31 ★★★ **La fusée de Maël**

(a) $h(t) = -5t^2 + 40t = -5t(t-8)$. Produit nul : $-5t = 0$ ou $t - 8 = 0$, donc $t = 0$ ou $t = 8$. La fusée est au sol au lancement ($t = 0$) et retombe au sol au bout de 8 s : le vol correspond à $t \in [0\,;8]$.

(b) $-5(t-2)(t-6) = -5(t^2 - 8t + 12) = -5t^2 + 40t - 60 = h(t) - 60$. Racines rangées : 2 et 6 ; $a = -5 < 0$, donc l'expression est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.

t	0	2	6	8	
h(t) − 60	−	0	+	0	−

Contrôle : $h(0) - 60 = -60 < 0$, et 0 est bien à l'extérieur de $[2\,;6]$.

(c) $h(t) \geqslant 60$ équivaut à $h(t) - 60 \geqslant 0$. Inégalité large, donc crochets fermés : $S = [2\,;6]$. L'altitude de la fusée est supérieure ou égale à 60 m pendant $6 - 2 = 4$ s.

(d) $-5(t-4)^2 = -5(t^2 - 8t + 16) = -5t^2 + 40t - 80 = h(t) - 80$. Un carré est positif ou nul et $-5 < 0$, donc $h(t) - 80 \leqslant 0$ pour tout t, et l'égalité n'a lieu que pour $t = 4$. L'inéquation $h(t) - 80 > 0$ n'a aucune solution : Hugo a tort. La fusée atteint au plus 80 m, à l'instant $t = 4$ s.

Ex. 32 ★★★ **Une parabole à reconstituer**

(a) f a deux racines, -1 et 5, donc sa forme factorisée est $f(x) = a(x-(-1))(x-5) = a(x+1)(x-5)$. A est sur $\mathcal{P}$: $f(1) = a \times 2 \times (-4) = -8a = -16$, donc $a = 2$. Ainsi $f(x) = 2(x+1)(x-5)$.

Ex. 32 **(suite)**

(b) Racines rangées : -1 puis 5 ; $a = 2 > 0$, donc $f(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	-∞	-1	5	+∞	
f(x)	+	0	−	0	+

Contrôle : $f(0) = 2 \times 1 \times (-5) = -10 < 0$, et 0 est bien entre -1 et 5.

(c) Zoé a tort. $f(x)$ est négatif entre les racines, mais l'inégalité est large : les racines, où $f(x) = 0$, sont solutions. Les crochets sont fermés : $S = [-1\,;5]$.

(d) $f(x) = 2(x^2 - 4x - 5) = 2x^2 - 8x - 10$.
Donc $f(x) + 10 = 2x^2 - 8x = 2x(x-4)$: racines 0 et 4, $a = 2 > 0$, donc l'expression est positive ou nulle à l'extérieur des racines. $S =]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[$. $\mathcal{P}$ est au-dessus de la droite $y = -10$ ou la coupe pour $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 4$.

5. *Problèmes : modéliser par le second degré*

Ex. 33 ★★☆ **Choisir la variable et exprimer la grandeur**

(a) La longueur vaut $10 - x$, donc $A(x) = x(10-x) = -x^2 + 10x$ en m², avec $0 < x < 10$.

(b) Recette = prix × quantité : $R(x) = x(120 - 3x) = -3x^2 + 120x$. La quantité est positive : $120 - 3x \geqslant 0$, donc $0 \leqslant x \leqslant 40$.

(c) Le grand carré a pour côté $x + 2$: $T(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ en m², avec $x > 0$.

(d) $h(t) = -5t(t-3)$ s'annule pour $t = 0$ et pour $t = 3$. La fusée retombe au bout de 3 s, donc le modèle vaut sur $[0\,;3]$.

Ex. 34 ★★☆ **La bonne forme pour la bonne question**

(a) La hauteur de départ est $h(0) = c = 12$: la pierre part de 12 m.

(b) Produit nul : $x = 2$ ou $x = 22$. Le jet est au niveau du sol à 2 m et à 22 m.

(c) $a = -2 < 0$: le maximum est au milieu des racines, $x = \frac{3+13}{2} = 8$, soit 800 objets
(8 est bien dans $[0\,;15]$).

(d) $a = 1 > 0$: il y a un minimum au milieu des racines, $t = \frac{2+8}{2} = 5$. On a $T(5) = 3 \times (-3) = -9$: la température minimale est -9 °C.

Ex. 34 **(suite)**

(e) Produit nul : $t = -1$ ou $t = 3$. Un temps est positif, donc on écarte -1 : le ballon touche le sol au bout de 3 s.

(f) Non. $1 = \frac{0+2}{2}$ est l'instant du maximum (1 s), pas la hauteur. La hauteur maximale vaut $h(1) = -5 \times 1 \times (-1) = 5$ m.

Ex. 35 ★★☆ **Un potager contre un mur**

(a) Le grillage fait $x + x + L = 24$, donc $L = 24 - 2x$. Alors $A(x) = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x$. Les longueurs sont positives, donc $0 < x < 12$.

(b) $x(24 - 2x) = 0$ donne $x = 0$ ou $24 - 2x = 0$, c'est-à-dire $x = 12$.

(c) $a = -2 < 0$: le maximum est au milieu des racines, $x = \frac{0+12}{2} = 6$, qui est bien dans $]0\,;12[$. On a $A(6) = 6 \times 12 = 72$. L'aire maximale est 72 m², obtenue pour une largeur de 6 m (et une longueur de 12 m).

(d) Non : l'aire ne dépasse jamais 72 m², or $80 > 72$. Un potager de 80 m² est impossible.

Ex. 36 ★★☆ **Une balle au-dessus de 25 m**

(a) $h(t) = -5t(t - 6)$. Produit nul : $t = 0$ (lancer) ou $t = 6$. La balle retombe au bout de 6 s, et le modèle vaut sur $[0\,;6]$.

(b) $a = -5 < 0$: le maximum est au milieu des racines, $t = \frac{0+6}{2} = 3$. On a $h(3) = -45 + 90 = 45$. La balle est au plus haut au bout de 3 s, à 45 m.

(c) $-5(t - 1)(t - 5) = -5(t^2 - 6t + 5) = -5t^2 + 30t - 25 = h(t) - 25$.

(d) $h(t) \geqslant 25$ équivaut à $-5(t - 1)(t - 5) \geqslant 0$. On a $a = -5 < 0$, donc l'expression est positive entre les racines 1 et 5 :

t	0	1	5	6	
h(t) − 25	−	0	+	0	−

Sur $[0\,;6]$, $S = [1\,;5]$: la balle est à 25 m ou plus pendant $5 - 1 = 4$ s.

Ex. 37 ★★☆ **Le prix des places de théâtre**

(a) Recette = prix × nombre de places : $R(x) = x(400 - 20x) = -20x^2 + 400x$.

(b) $x = 0$ ou $400 - 20x = 0$, c'est-à-dire $x = 20$. L'axe de symétrie est la droite $x = \frac{0+20}{2} = 10$.

Ex. 37 **(suite)**

(c) $a = -20 < 0$: R est croissante à gauche de l'axe $x = 10$. Or $[4\,;8]$ est à gauche de 10, donc R est croissante sur $[4\,;8]$. On a $R(4) = 4 \times 320 = 1280$ et $R(8) = 8 \times 240 = 1920$:

x	4		8
R(x)	1280	↗	1920

(d) Le sommet ($x = 10$) est en dehors de $[4\,;8]$, donc le maximum est atteint à une borne. La troupe doit choisir 8 € la place, pour une recette maximale de 1920 €.

Ex. 38 ★★☆ **Le bénéfice d'un atelier de bougies**

(a) Bénéfice = recette − coût : $B(x) = -x^2 + 18x - 4x - 24 = -x^2 + 14x - 24$.

(b) $-(x - 2)(x - 12) = -(x^2 - 14x + 24) = -x^2 + 14x - 24 = B(x)$.

(c) Les racines sont 2 et 12, et $a = -1 < 0$: B est positif entre les racines. Sur $[0\,;10]$:

x	0		2		10
B(x)		−	0	+	

L'atelier est rentable ($B(x) > 0$) pour une production comprise entre 200 bougies (exclu) et 1000 bougies, soit $x \in]2\,;10]$.

(d) Le maximum est au milieu des racines, $x = \frac{2+12}{2} = 7$, qui est bien dans $[0\,;10]$. On a $B(7) = -5 \times (-5) = 25$. Le bénéfice maximal est de 25\,000 €, pour 700 bougies.

Ex. 39 ★★★ **Un bateau sous le pont-arche**

(a) Les pieds sont au niveau de l'eau : $f(0) = 0$ et $f(12) = 0$. Les racines sont donc 0 et 12, d'où $f(x) = a\,x(x - 12)$. Comme B est sur l'arche, $f(2) = 5$: $a \times 2 \times (-10) = 5$, donc $-20a = 5$ et $a = -0{,}25$. On obtient $f(x) = -0{,}25x(x - 12) = -0{,}25x^2 + 3x$.

(b) L'axe de symétrie passe par le milieu des racines : $x = \frac{0+12}{2} = 6$. Comme $a = -0{,}25 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et le sommet est un maximum : $f(6) = -0{,}25 \times 6 \times (-6) = 9$. L'arche atteint au plus 9 m de haut, en son milieu, à 6 m du pied gauche.

(c) $-0{,}25(x - 4)(x - 8) = -0{,}25(x^2 - 12x + 32) = -0{,}25x^2 + 3x - 8$, et c'est bien $f(x) - 8$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) Les racines de $f(x) - 8$ sont 4 et 8 (produit nul). Comme $a = -0{,}25 < 0$, $f(x) - 8$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

x	0	4	8	12	
f(x) − 8	−	0	+	0	−

On a donc $f(x) \geqslant 8$ pour $x \in [4\,;8]$: l'arche dépasse 8 m de hauteur sur une bande de 4 m de large.

(e) Il suffit que le toit tienne dans la bande où la hauteur dépasse 8 m, c'est-à-dire $[4\,;8]$, large de 4 m. Si le bateau passe au milieu, centré sur $x = 6$, il occupe $[6 - 1{,}75\,;6 + 1{,}75] = [4{,}25\,;7{,}75]$, qui est contenu dans $[4\,;8]$. Le bateau peut passer, au centre de l'arche, avec 0,25 m de marge de chaque côté.

Ex. 40 ★★★ **Une place carrée à daller**

(a) x est une longueur prise sur un côté de 10 m, donc $x \in [0\,;10]$. Dans le triangle rectangle MBN, on a $\text{BM} = 10 - x$ et $\text{BN} = x$, donc son aire vaut $\frac{x(10-x)}{2}$ m². Les quatre triangles des coins sont identiques, d'où $S(x) = 100 - 4 \times \frac{x(10-x)}{2} = 100 - 20x + 2x^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

(b) $S(x) = 100 \iff 2x^2 - 20x = 0 \iff 2x(x-10) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 10$. Ces deux abscisses ont la même image, donc l'axe est la droite $x = \frac{0+10}{2} = 5$, qui est bien dans $[0\,;10]$. Comme $a = 2 > 0$, le sommet est un minimum : $S(5) = 50 - 100 + 100 = 50$. L'aire dallée est minimale pour $x = 5$ m et vaut alors 50 m².

(c) $2(x-2)(x-8) = 2(x^2 - 10x + 16) = 2x^2 - 20x + 32 = S(x) - 68$. Comme $a = 2 > 0$, $S(x) - 68$ est négatif entre les racines 2 et 8.

x	0	2	8	10	
S(x) − 68	+	0	−	0	+

On a donc $S(x) \leqslant 68$ pour $x \in [2\,;8]$: le budget est respecté si AM est compris entre 2 m et 8 m.

(d) Les deux conditions donnent $x \in [2\,;3]$. L'abscisse du sommet, 5, n'est pas dans cet intervalle. Comme $a > 0$, S est décroissante avant l'axe, donc sur $[2\,;3]$: le minimum est atteint à la borne $x = 3$, avec $S(3) = 18 - 60 + 100 = 58$. La plus petite aire dallée possible est de 58 m², obtenue pour $\text{AM} = 3$ m.