48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Reconnaître un trinôme et ses trois formes

À retenir : Trinôme : ax^2+bx+c avec $a\neq 0$; on développe avant de conclure. Forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$: sommet $S(\alpha\,;\beta)$, et $5(x+1)^2+2$ donne $\alpha=-1$. Forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$: racines x_1, x_2. Le même a partout.

Ex. 1 ★☆☆ **Trinôme ou pas ?** — Chaque fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Dis si c'est un trinôme. Si oui, donne a, b et c ; sinon, justifie.

(a) $f(x)=3-2x^2+x$

(b) $g(x)=(x-1)^2-x^2$

(c) $h(x)=\dfrac{x^2}{4}$

(d) $k(x)=1-x(x-6)$

(e) $r(x)=(3x+1)(1-x)$

(f) Pour quelle valeur du réel t la fonction $x\mapsto(t-2)x^2+3x-1$ n'est-elle pas un trinôme ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Lire directement sur la forme** — Lis chaque résultat directement sur la forme donnée, sans développer.

(a) $f(x)=2(x+3)^2-1$: donne α, β et les coordonnées du sommet de la parabole.

(b) $g(x)=-(x-4)^2+6$: g a-t-elle un maximum ou un minimum ? Donne sa valeur et le x où il est atteint.

(c) $h(x)=5x^2-2$: donne les coordonnées du sommet de la parabole.

(d) $k(x)=3(x-1)(x+5)$: donne le coefficient a et les racines de k.

(e) $m(x)=(3x+2)(x-5)$: donne les racines de m et le coefficient a.

(f) $p(x)=-\frac{1}{2}(x-6)^2$: donne le sommet. La parabole est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?

Ex. 3 ★★☆ **Quatre élèves, quatre affirmations** — Pour chaque élève, dis s'il a raison. Justifie, et corrige si besoin.

(a) Inès : « La parabole de $f(x)=4(x+2)^2-9$ a pour sommet $S(2\,;-9)$. »

(b) Hugo : « $g(x)=2x^2-10x+12$ a pour racines 2 et 3, donc $g(x)=(x-2)(x-3)$. »

(c) Lina : « $h(x)=-x^2+6x-5$ s'écrit aussi $-(x-3)^2+4$. »

Ex. 3 (suite)

(d) Théo : « $k(x)=3(x-1)^2+2$ s'écrit aussi $(3x-3)^2+2$. »

Ex. 4 ★★☆ **Trois formes pour un même trinôme** — Formes développées : $D_1(x)=2x^2-4x-6$, $D_2(x)=-x^2+2x+8$, $D_3(x)=x^2-2x-3$. Formes canoniques : $C_1(x)=(x-1)^2-4$, $C_2(x)=-(x-1)^2+9$, $C_3(x)=2(x-1)^2-8$. Formes factorisées : $F_1(x)=2(x+1)(x-3)$, $F_2(x)=(x+1)(x-3)$, $F_3(x)=-(x+2)(x-4)$.

(a) Développe $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C_3(x)$, puis associe chacune à une forme développée.

(b) Fais de même avec $F_1(x)$, $F_2(x)$ et $F_3(x)$. Pourquoi F_1 et F_2 ne sont-elles pas égales ?

(c) Quelle forme permet de trouver le minimum de D_1 ? Donne ce minimum et le x où il est atteint.

(d) Résous $D_2(x)=9$ en choisissant la forme adaptée.

(e) Calcule $D_2(0)$, puis résous $D_2(x)=0$, en prenant à chaque fois la forme adaptée.

Ex. 5 ★★☆ **Vrai ou faux sur les trois formes** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse (pour « faux », un contre-exemple suffit).

(a) Tout trinôme peut s'écrire sous la forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$.

(b) Si $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a<0$, alors β est le maximum de f.

(c) Pour tout réel x, $3(x-2)(x+1)=(3x-6)(x+1)$.

(d) Si $f(x)=-2(x-3)^2+5$, alors $f(0)=5$.

(e) Deux trinômes dont les paraboles ont le même sommet sont égaux.

Ex. 6 ★★★ **Un produit, trois écritures** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)(x+4)$.

(a) Démontre que f est un trinôme et donne ses coefficients a, b et c.

(b) Écris $f(x)$ sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$, puis donne les racines de f.

(c) Détermine la forme canonique de $f(x)$.

(d) En choisissant chaque fois la forme la plus adaptée, résous $f(x)=-4$, puis $f(x)=\beta$, où β est le nombre de la forme canonique.

(e) Déduis-en l'extremum de f, sa nature, la valeur de x où il est atteint et le tableau de variations de f.

Ex. 7 ★★★ **Une famille de fonctions : trinôme ou pas ?** — Pour tout réel m, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h_m par $h_m(x) = (mx+1)^2 - 4x^2$.

(a) Développe $h_m(x)$ et donne, en fonction de m, le coefficient de x^2, le coefficient de x et le terme constant.

(b) Pour quelles valeurs de m la fonction h_m est-elle un trinôme ? Que devient h_m pour les autres valeurs ? Justifie.

(c) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $h_m(x)$ s'écrit ax^2, avec $a \neq 0$? Justifie.

(d) Pour $m = 3$, factorise $h_3(x)$ à l'aide d'une identité remarquable, puis écris-le sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

(e) Pour $m = 0$, écris $h_0(x)$ sous forme canonique et sous forme factorisée, puis donne le sommet de sa parabole et la nature de l'extremum.

Ex. 8 ★★★ **La fusée à eau d'Annecy** — Au club de sciences d'Annecy, une fusée à eau est lancée depuis une terrasse. x est la distance horizontale parcourue (en m), $h(x)$ la hauteur (en m), pour $x \geqslant 0$ jusqu'à l'impact au sol. Nora trouve $h(x) = 6 + 2x - 0{,}5x^2$, Yanis $-0{,}5(x-2)^2 + 8$, Chloé $(6-x)(0{,}5x+1)$ et Malo $-0{,}5(x+2)^2 + 8$.

(a) Donne a, b et c pour l'expression de Nora. Développe ensuite celles de Yanis, Chloé et Malo : lesquelles sont égales à celle de Nora ?

(b) Écris l'expression de Chloé sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

(c) De quelle hauteur la fusée part-elle ? Indique la forme utilisée.

(d) Quelle hauteur maximale la fusée atteint-elle, et à quelle distance horizontale ? Justifie avec la forme adaptée.

(e) À quelle distance du lancement la fusée touche-t-elle le sol ? À quelle autre distance repasse-t-elle à sa hauteur de départ ?

2. *Forme canonique, sommet, axe de symétrie et variations*

À retenir : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, sommet $S(\alpha\,;\beta)$, axe $x = \alpha$. Si $a > 0$: minimum β atteint en α ; si $a < 0$: maximum. Piège : $-(x+2)^2 + 3$ a pour maximum 3, atteint en $x = -2$.

Ex. 9 ★☆☆ **Forme canonique avec α et β** — Pour chaque trinôme, calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$, et écris $f(x)$ sous forme canonique.

(a) $f(x) = x^2 - 8x + 11$

(b) $f(x) = 3x^2 + 24x + 46$

(c) $f(x) = -2x^2 + 4x + 4$

Ex. 9 (suite)

(d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

(e) $f(x) = -x^2 - 14x - 45$

Ex. 10 ★★☆ **Lire le sommet sur la forme canonique** — Pour chaque trinôme, donne les coordonnées du sommet S de la parabole et l'équation de son axe de symétrie. Précise aussi l'extremum : minimum ou maximum, sa valeur et en quel x il est atteint.

(a) $f(x) = 3(x-5)^2 + 2$

(b) $g(x) = -(x-2)^2 + 7$

(c) $h(x) = 2(x+6)^2 - 1$

(d) $k(x) = -4(x+3)^2$

(e) $m(x) = 5 - 2(x-4)^2$

Ex. 11 ★★☆ **L'erreur de Léna en complétant le carré** — Léna met $f(x) = 3x^2 - 18x + 4$ sous forme canonique : $f(x) = 3(x^2 - 6x) + 4 = 3(x-3)^2 - 9 + 4 = 3(x-3)^2 - 5$.

(a) Calcule $f(0)$ avec la forme développée, puis avec la forme trouvée par Léna. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Repère son erreur et écris la forme canonique correcte de $f(x)$.

(c) Vérifie ton résultat en calculant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

(d) Complète le carré pour mettre $g(x) = -2x^2 - 20x - 41$ sous forme canonique.

Ex. 12 ★★☆ **Extremum justifié et tableau de variations** — On considère le trinôme f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$.

(a) Mets $f(x)$ sous forme canonique.

(b) Déduis-en, à l'aide de $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$, que f admet un extremum. Donne sa nature, sa valeur et en quel x il est atteint.

(c) Dresse le tableau de variations de f.

(d) Gabriel écrit : « $\alpha = 2$, donc $\beta = f(-2) = -43$: le minimum de f est -43. » Explique ses deux erreurs.

Ex. 13 ★★☆ **Retrouver un trinôme grâce à la symétrie** — Un trinôme f s'écrit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. On connaît le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	3	7
f(x)	25	11	-5	11

(a) Déduis du tableau la valeur de α. Justifie.

(b) À l'aide de $f(0)$ et $f(3)$, écris un système d'inconnues a et β, puis résous-le.

(c) Donne la forme développée de $f(x)$ et l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.

(d) Sans calculer $f(8)$ avec la forme développée, donne sa valeur. Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Le plongeon d'Inès** — Inès plonge depuis un plongeoir de la piscine de Brest. On modélise sa trajectoire par $h(x) = -0{,}4x^2 + 2{,}4x + 2{,}8$. Ici, x est la distance horizontale au plongeoir et $h(x)$ la hauteur au-dessus de l'eau, en mètres.

(a) Calcule α puis β (attention au signe de a). Écris ensuite $h(x)$ sous forme canonique.

(b) Démontre que $h(x) \leqslant \beta$ pour tout réel x. Déduis-en la hauteur maximale d'Inès et la distance horizontale à laquelle elle l'atteint.

(c) Vérifie que $h(7) = 0$. Dresse ensuite le tableau de variations de h sur $[0\,;7]$.

(d) Sans résoudre d'équation, trouve à quelle distance horizontale Inès repasse à la hauteur du plongeoir. Justifie, puis vérifie par un calcul.

Ex. 15 ★★★ **Un trinôme construit à partir de son sommet** — On cherche les réels b et c tels que la parabole représentant la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + bx + c$ ait pour sommet $S(-3\,;2)$.

(a) On rappelle que $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Écris l'équation d'inconnue b qui traduit $\alpha = -3$, puis déduis-en b.

(b) Pour trouver c, Yanis écrit : « $\beta = f(3)$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis détermine c.

(c) Écris $f(x)$ sous forme canonique. Vérifie en développant.

(d) Démontre que $f(x) \geqslant 2$ pour tout réel x. Déduis-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

(e) Résous l'équation $f(x) = 50$ à l'aide de la forme canonique. Explique pourquoi le milieu des deux solutions est -3.

Ex. 16 ★★★ **La plus petite somme de carrés** — Chloé cherche deux réels dont la somme vaut 10 et dont la somme des carrés est la plus petite possible. On note x le premier réel et $S(x)$ la somme des carrés des deux réels.

(a) Exprime le second réel en fonction de x. Démontre que $S(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

(b) Mets $S(x)$ sous forme canonique en complétant le carré : commence par factoriser 2 dans $2x^2 - 20x$.

(c) Dresse le tableau de variations de S sur $\mathbb{R}$. Justifie le sens des flèches.

(d) Démontre que $S(x) \geqslant 50$ pour tout réel x. Déduis-en les deux réels cherchés par Chloé.

(e) Pour une somme s quelconque, démontre que $S(x) = 2x^2 - 2sx + s^2$. Déduis-en les deux réels cherchés.

3. *Discriminant et résolution de $ax^2 + bx + c = 0$*

À retenir : Tout dans un membre, puis $\Delta = b^2 - 4ac$: pour $x^2 - 5x + 4 = 0$, $\Delta = (-5)^2 - 16 = 9$. Si $\Delta > 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta = 0$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; si $\Delta < 0$: $\mathcal{S} = \varnothing$.

Ex. 17 ★☆☆ **Calculer un discriminant** — Pour chaque trinôme $f(x)$, écris a, b, c puis calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. Déduis-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

(a) $2x^2 - 5x + 3$

(b) $-3x^2 + 4x + 2$

(c) $9x^2 - 6x + 1$

(d) $5x^2 + 2x + 4$

(e) $-x^2 - 3x - 7$

(f) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

Ex. 18 ★★☆ **Résoudre une équation du second degré** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque équation. Donne l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sous forme exacte simplifiée.

(a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(b) $3x^2 + 10x - 8 = 0$

(c) $x^2 - 4x - 8 = 0$

(d) $16x^2 + 8x + 1 = 0$

(e) $3x^2 - x + 2 = 0$

(f) $x^2 - 11 = 0$

(g) $5x^2 + 2x = 0$

Ex. 19 ★★☆ **Tout dans un membre avant de lire a, b, c** — Ramène chaque équation à la forme $ax^2 + bx + c = 0$, puis résous-la dans $\mathbb{R}$.

(a) $2x^2 = 7x - 3$

(b) $x(x + 4) = 2x + 3$

(c) $(x - 1)^2 = 3x - 7$

(d) $4x^2 = 9x$

(e) $4x^2 - 5x = 7x - 9$

Ex. 20 ★★☆ **Corriger les copies de Lina et Théo** — Lina résout $-2x^2 - 3x + 5 = 0$ et écrit : « $\Delta = -3^2 - 4 \times (-2) \times 5 = -9 + 40 = 31$ ». Théo résout $x^2 + 2x + 7 = 0$ et écrit : « $\Delta = -24$, je prends $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, donc $x = -1 \pm \sqrt{6}$ ».

(a) Explique l'erreur de Lina dans le calcul de Δ, puis calcule le bon discriminant.

(b) Lina écrit ensuite $x_1 = \frac{3 - \sqrt{\Delta}}{2}$. Corrige cette formule, puis donne l'ensemble des solutions de son équation.

(c) Théo a-t-il raison ? Justifie, puis donne l'ensemble des solutions de son équation.

(d) Calcule $(-1 + \sqrt{6})^2 + 2(-1 + \sqrt{6}) + 7$. Que confirme ce résultat ?

Ex. 21 ★★☆ **Équation bicarrée et équation avec quotient** — On considère les équations (E) : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ et (F) : $\frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = 0$.

(a) On pose $X = x^2$. Écris l'équation vérifiée par X, puis résous-la.

(b) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E). Justifie le rejet éventuel d'une valeur de X.

Ex. 21 **(suite)**

(c) Donne la valeur interdite de l'équation (F).

(d) Résous l'équation (F) dans $\mathbb{R}$.

Ex. 22 ★★★ **Démontrer la formule des racines** — Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. On veut démontrer le théorème de résolution de $f(x) = 0$, puis l'appliquer à un exemple.

(a) Démontre que pour tout réel x : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

(b) Déduis-en que si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution réelle. Justifie avec le signe de chaque terme.

(c) Démontre que si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution, et que si $\Delta > 0$, elle a deux solutions que tu exprimeras en fonction de a, b et Δ.

(d) Sans utiliser la formule des racines, mets $3x^2 - 4x - 2$ sous la forme $3\left[(x-\alpha)^2 - k\right]$, puis résous $3x^2 - 4x - 2 = 0$.

(e) Retrouve les solutions de la question précédente avec Δ et la formule des racines, en simplifiant $\sqrt{\Delta}$ et la fraction.

Ex. 23 ★★★ **Le dégagement d'Inès à Rennes** — À Rennes, Inès dégage un ballon. Sa hauteur, en mètres, est $h(x) = -0{,}05x^2 + x + 2$, où x est la distance horizontale parcourue, en mètres, avec $x \geqslant 0$.

(a) De quelle hauteur part le ballon ?

(b) À quelle distance d'Inès le ballon touche-t-il le sol ? Donne la valeur exacte simplifiée, puis un arrondi au centimètre.

(c) À quelles distances le ballon est-il à 6,8 m de hauteur ?

(d) Le ballon peut-il atteindre 7,5 m de hauteur ? Justifie avec un discriminant.

(e) Détermine la hauteur k pour laquelle l'équation $h(x) = k$ a exactement une solution. Que représente cette valeur de k pour le ballon ?

Ex. 24 ★★★ **Une équation qui dépend d'un paramètre** — Pour tout réel m, on considère l'équation (E_m) : $(m-2)x^2 - 6x + 3 = 0$, d'inconnue x.

(a) Résous (E_m) pour $m = 2$. Cette équation est-elle du second degré ? Justifie.

(b) Pour $m \neq 2$, exprime le discriminant Δ de (E_m) en fonction de m.

(c) Détermine toutes les valeurs de m pour lesquelles (E_m) a exactement une solution, et donne cette solution à chaque fois.

(d) Résous (E_m) pour $m = -1$. Donne les solutions sous forme exacte simplifiée.

Ex. 24 **(suite)**

(e) Détermine m pour que -1 soit solution de (E_m). Déduis-en l'autre solution, sachant que le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$.

4. *Factoriser un trinôme, retrouver un trinôme*

À retenir : $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, sans oublier a ; $\Delta = 0$: $a(x - x_0)^2$; $\Delta < 0$: pas de factorisation. Racine -3 → facteur $x + 3$. Ex. : $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Pour retrouver f : sommet ou racines, puis un point donne a.

Ex. 25 ★☆☆ **Factoriser à l'aide du discriminant** — Pour chaque trinôme, calcule Δ, puis factorise-le si c'est possible. Garde a devant et contrôle en développant.

(a) $A(x) = 2x^2 + 5x - 3$

(b) $B(x) = -x^2 + 6x - 5$

(c) $C(x) = 9x^2 - 12x + 4$

(d) $D(x) = 3x^2 - 2x + 5$

(e) $E(x) = 5x^2 - 7x - 6$

(f) $F(x) = x^2 + 2x - 4$

Ex. 26 ★☆☆ **Factoriser sans discriminant** — Factorise chaque expression sans calculer Δ : repère un facteur commun ou une identité remarquable.

(a) $G(x) = 4x^2 - 20x$

(b) $H(x) = x^2 - 49$

(c) $K(x) = 25x^2 + 10x + 1$

(d) $L(x) = -3x^2 + 12$

(e) $M(x) = x^2 - 16x + 64$

(f) $N(x) = (x+1)^2 - 9$

Ex. 27 ★★☆ **Trois factorisations à corriger** — Trois élèves de Ben ont factorisé un trinôme. Contrôle chaque résultat et corrige-le si besoin.

(a) Inès écrit $2x^2 - 5x + 2 = (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Développe le membre de droite. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Vérifie que 2 et $\frac{1}{2}$ sont les racines de $2x^2 - 5x + 2$, puis écris sa factorisation correcte.

(c) Léo écrit $x^2 + x - 12 = (x-4)(x+3)$. Contrôle en développant, puis corrige à l'aide de Δ.

(d) Hugo écrit : « $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3$, c'est la forme factorisée ». A-t-il raison ? Justifie avec Δ.

Ex. 28 ★★☆ **Mêmes racines, trinômes différents** — La parabole $\mathcal{P}$ d'un trinôme f coupe l'axe des abscisses en 1 et 4 et passe par $A(0\,;-8)$. La parabole $\mathcal{Q}$ d'un trinôme g coupe l'axe des abscisses aux mêmes points et passe par $B(2\,;-4)$.

(a) Justifie que $f(x)=a(x-1)(x-4)$, puis calcule a à l'aide du point A.

(b) Donne la forme développée de f, puis contrôle avec le point A.

(c) Détermine $g(x)$ sous forme factorisée, puis sous forme développée.

(d) Nora affirme : « deux trinômes qui ont les mêmes racines sont égaux ». Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Donne l'axe de symétrie commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Justifie.

Ex. 29 ★★☆ **Retrouver un trinôme à partir de tableaux** — Voici le tableau de variations d'un trinôme f, dont la parabole passe par $C(4\,;9)$, puis le tableau de valeurs d'un trinôme g.

x	-∞	2	+∞
f(x)	↘	-3	↗

x	-3	-2	-1	0	1
g(x)	9	3	1	3	9

(a) Lis le sommet S de la parabole de f, puis déduis-en l'écriture de $f(x)$ sous forme canonique, avec a inconnu.

(b) Calcule a à l'aide du point C, puis donne la forme développée de f.

(c) Factorise $f(x)$.

(d) Utilise les symétries du tableau de valeurs pour trouver l'axe de symétrie et le sommet de la parabole de g.

(e) Déduis-en la forme canonique, puis la forme développée de g. Justifie que g ne se factorise pas.

Ex. 30 ★★★ **Quand un trinôme se factorise-t-il ?** — Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$. On admet que $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

(a) On suppose $\Delta>0$. À l'aide de A^2-B^2, démontre que $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, en exprimant x_1 et x_2 en fonction de a, b et Δ.

(b) On suppose $\Delta<0$. Démontre que $f(x)$ ne s'annule jamais, puis que $f(x)$ ne peut pas s'écrire $a(x-u)(x-v)$ avec u et v réels.

(c) On suppose $\Delta=0$. Démontre que $f(x)=a(x-x_0)^2$, en exprimant x_0 en fonction de a et b.

(d) Lina affirme : « si a et c sont de signes contraires, alors $f(x)$ se factorise. » Vrai ou faux ? Démontre-le, puis applique-le à $-2x^2+7x+3$.

Ex. 31 ★★★ **Le jet d'eau d'Annecy** — À Annecy, un jet d'eau sort d'une buse placée au point $B(0\,;1)$ (unités en mètres). À la distance horizontale x de la buse, la hauteur du jet est $h(x)$, où h est un trinôme. Le jet atteint sa hauteur maximale, 5 m, à 4 m de la buse.

(a) Justifie que $h(x)=a(x-4)^2+5$, puis calcule a à l'aide du point B.

(b) Déduis-en la forme développée de $h(x)$.

(c) Calcule Δ, puis écris $h(x)$ sous forme factorisée en gardant a devant.

(d) Le rebord du bassin est au sol, à 8,5 m de la buse. L'eau retombe-t-elle dans le bassin ? Justifie.

(e) À quelles distances de la buse le jet est-il à 4 m de haut ? Choisis la forme la plus adaptée.

Ex. 32 ★★★ **Simplifier un quotient grâce aux racines** — On pose $N(x)=2x^2+3x-5$, $D(x)=3x^2+2x-5$ et $F(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$.

(a) Vérifie, sans calculer Δ, que 1 est une racine de $N(x)$ et de $D(x)$.

(b) À l'aide du produit $\frac{c}{a}$ des racines, trouve l'autre racine de $N(x)$ et de $D(x)$. Factorise ces deux trinômes et contrôle en développant.

(c) Donne les valeurs interdites de F, puis simplifie $F(x)$ pour les autres valeurs de x.

(d) Yanis affirme : « $F(1)=\frac{2\times1+5}{3\times1+5}=\frac{7}{8}$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Résous l'équation $F(x)=x$.

5. *Somme et produit des racines, racine évidente*

À retenir : Si $\Delta\geqslant 0$: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$. 1 est racine si $a+b+c=0$, -1 si $a-b+c=0$; l'autre par le produit. Ex. : $2x^2-3x+1$: 1 et $\frac{1}{2}$. Somme S, produit P : $x^2-Sx+P=0$.

Ex. 33 ★☆☆ **Racine évidente et produit** — Pour chaque trinôme, teste 1 puis -1 pour trouver une racine évidente. Déduis-en l'autre racine grâce au produit $\frac{c}{a}$.

(a) $3x^2-5x+2$ (b) $4x^2+7x+3$

(c) $5x^2+2x-7$ (d) $-2x^2+3x+5$

(e) $6x^2-x-7$

Ex. 34 ★☆☆ **Somme et produit, si les racines existent** — Pour chaque équation, calcule Δ. Si les racines existent, donne leur somme et leur produit sans les calculer.

(a) $2x^2-8x+3=0$ (b) $-x^2+6x+4=0$

(c) $3x^2+2x+5=0$ (d) $4x^2-12x+9=0$

(e) $x^2+7x-2=0$

Ex. 35 ★★☆ **Une racine connue, l'autre par le produit** — On considère le trinôme $f(x) = 2x^2 - 11x + 15$.

(a) Vérifie que 3 est une racine de f.

(b) Nathan affirme : « l'autre racine est 5, car $3 \times 5 = 15$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine l'autre racine à l'aide du produit, puis contrôle-la avec la somme.

(d) Déduis-en une factorisation de $f(x)$.

Ex. 36 ★★☆ **L'enclos de Clémence à Rodez** — Clémence veut construire à Rodez un enclos rectangulaire de largeur ℓ et de longueur L (en m), de périmètre 34 m et d'aire 60 m².

(a) Donne la somme $\ell + L$ et le produit $\ell \times L$.

(b) Inès affirme que ℓ et L sont solutions de $x^2 + 17x + 60 = 0$. A-t-elle raison ? Justifie et donne la bonne équation.

(c) Déduis-en les dimensions de l'enclos.

(d) Un enclos rectangulaire de périmètre 20 m et d'aire 30 m² peut-il exister ? Justifie.

Ex. 37 ★★☆ **Sans calculer les racines** — On considère l'équation $(E) : 3x^2 + 8x - 2 = 0$. On ne calcule pas ses solutions x_1 et x_2.

(a) Justifie, sans calculer Δ, que (E) a deux solutions de signes contraires.

(b) Calcule $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$. Déduis-en le signe de la solution de plus grande valeur absolue.

(c) Calcule $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ en factorisant par $x_1 x_2$.

(d) Calcule $x_1^2 + x_2^2$ en utilisant $(x_1 + x_2)^2$.

(e) Lina trouve à la calculatrice $x_1 \approx 0{,}23$ et $x_2 \approx -2{,}23$. A-t-elle raison ? Justifie sans résoudre (E).

Ex. 38 ★★★ **Démontrer les formules, puis s'en méfier** — Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Quand elles existent, on note x_1 et x_2 les racines de f.

(a) On suppose $\Delta > 0$. À partir des formules des racines, démontre que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

(b) On suppose $\Delta = 0$. Démontre que ces deux égalités restent vraies pour la racine double.

(c) Yanis écrit : « Pour $x^2 + 3x + 5$, la somme des racines vaut -3 et leur produit vaut 5, donc les deux racines sont négatives. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Soit u et v deux réels de somme S et de produit P. Développe $(x - u)(x - v)$. Déduis-en que u et v sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

(e) Démontre qu'il existe deux réels de somme S et de produit P si et seulement si $S^2 - 4P \geqslant 0$.

Ex. 39 ★★★ **Inverses des solutions, sans les calculer** — On considère l'équation $(E) : 2x^2 - 10x + 7 = 0$. On note x_1 et x_2 ses solutions éventuelles. Ne calcule pas x_1 et x_2.

(a) Justifie que (E) a deux solutions. Détermine ensuite leur signe à l'aide de leur produit et de leur somme.

(b) Calcule $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ sans calculer x_1 et x_2.

(c) Écris $(x_1 - x_2)^2$ en fonction de $x_1 + x_2$ et de $x_1 x_2$. Déduis-en l'écart entre les deux solutions.

(d) Écris une équation du second degré, à coefficients entiers, dont les solutions sont $\dfrac{1}{x_1}$ et $\dfrac{1}{x_2}$.

Ex. 40 ★★★ **Une solution commune à toute une famille** — Pour tout réel m, on considère l'équation (E_m) : $2x^2 + (m-2)x - m = 0$.

(a) Calcule $a + b + c$. Déduis-en une solution de (E_m) valable pour tout réel m.

(b) Déduis-en l'autre solution de (E_m) en fonction de m. Contrôle-la avec la somme des solutions.

(c) Détermine m pour que (E_m) ait une solution double, et donne cette solution.

(d) Détermine m pour que les deux solutions de (E_m) soient opposées. Résous alors (E_m).

(e) On suppose $m \neq 0$. Détermine m pour que la somme des inverses des solutions vaille -1.

6. *Problèmes : modéliser par le second degré*

À retenir : Je nomme l'inconnue (unité, domaine : longueur positive, nombre d'objets entier) et je rejette la racine hors contexte. « Maximal » → forme canonique ; « égal à » → équation. Ex. : $n(n+1) = 30$ donne $n = 5$ ou $n = -6$.

Ex. 41 ★☆☆ **Des nombres à retrouver** — Pour chaque phrase, nomme l'inconnue, écris l'équation puis résous-la. Donne la réponse en tenant compte du contexte.

(a) Un nombre augmenté de son carré vaut 42. Quel est ce nombre ?

(b) Le produit de deux entiers consécutifs vaut 156. Quels sont ces deux entiers ?

(c) Le carré d'un nombre est égal à 5 fois ce nombre. Quel est ce nombre ?

(d) Le produit de deux entiers naturels pairs consécutifs vaut 168. Quels sont ces deux entiers ?

(e) Le carré d'un nombre positif, diminué de son triple, vaut 10. Quel est ce nombre ?

(f) La somme d'un nombre non nul et de son inverse vaut $\dfrac{5}{2}$. Quel est ce nombre ?

Ex. 42 ★☆☆ **Maximal ou minimal : la forme canonique** — Mets chaque trinôme sous forme canonique. Déduis-en son extremum (maximum ou minimum) et la valeur de la variable pour laquelle il est atteint.

(a) Le gain (en €) d'un stand de jus de fruits selon le nombre x de litres vendus : $G(x) = -2x^2 + 40x - 150$.

(b) L'aire (en cm²) d'un rectangle de côté x (en cm) et de périmètre 24 cm : $A(x) = x(12 - x)$.

(c) La température (en °C) d'une serre à l'instant t (en h) : $T(t) = -0{,}5t^2 + 6t + 4$.

(d) Le coût de production (en centaines d'euros) de x tonnes de farine : $C(x) = 3x^2 - 24x + 60$.

(e) Le trinôme $d(x) = x^2 + 6x + 13$.

Ex. 43 ★★☆ **L'allée du jardin** — À Rennes, Inès aménage un jardin rectangulaire de 20 m sur 14 m. À l'intérieur, le long des quatre bords, elle trace une allée de largeur constante x (en m). Le reste forme une pelouse rectangulaire.

(a) Quelles valeurs x peut-il prendre ? Justifie.

(b) Exprime l'aire $A(x)$ de la pelouse (en m²) en fonction de x, puis développe-la.

(c) Quelle largeur d'allée donne une pelouse de 160 m² ?

(d) Inès veut une pelouse qui occupe exactement la moitié du jardin. Donne la largeur de l'allée en valeur exacte, puis arrondie au cm.

Ex. 44 ★★☆ **Le lancer de ballon** — À Lyon, Malik lance un ballon vers le haut. La hauteur du ballon (en m) à l'instant t (en s, $t \geqslant 0$) est $h(t) = -4{,}9t^2 + 19{,}6t + 1{,}5$.

(a) Mets $h(t)$ sous forme canonique. Déduis-en la hauteur maximale du ballon et l'instant où elle est atteinte.

(b) À quels instants le ballon est-il à 16,2 m de hauteur ?

(c) Détermine l'instant exact où le ballon touche le sol, puis une valeur arrondie au centième.

(d) Le ballon repasse à sa hauteur de départ. À quel instant ? Justifie par le calcul.

Ex. 45 ★★☆ **L'atelier de bougies** — À Nantes, Chloé fabrique et vend des bougies. Pour x bougies (x entier, $0 \leqslant x \leqslant 50$), la recette est $R(x) = 50x$ et le coût de fabrication $C(x) = x^2 + 10x + 300$, en euros.

(a) Exprime le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

(b) Pour combien de bougies le bénéfice est-il nul ?

(c) Combien de bougies Chloé doit-elle fabriquer pour que son bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice ?

(d) Lucas affirme : « Pour un bénéfice de 64 €, il faut fabriquer exactement 28 bougies. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★★ **L'enclos adossé au mur** — À Arles, Yanis dispose de 36 m de grillage pour fermer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur forme un côté et ne demande pas de grillage. On note x (en m) la longueur de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

(a) Exprime en fonction de x la longueur du côté parallèle au mur. Quelles valeurs x peut-il prendre ? Justifie.

(b) Exprime l'aire $A(x)$ de l'enclos (en m²) sous forme développée.

(c) Mets $A(x)$ sous forme canonique. Déduis-en l'aire maximale de l'enclos et ses dimensions dans ce cas.

(d) Yanis veut une aire égale à 160 m². Détermine toutes les dimensions possibles de l'enclos.

(e) Son voisin affirme : « Avec ces 36 m, on peut obtenir 170 m². » A-t-il raison ? Justifie de deux façons.

Ex. 47 ★★★ **Les sorties à vélo** — À Grenoble, Léna fait une sortie de 60 km à vélo, à vitesse constante. On note v sa vitesse (en km/h). Si elle roulait 5 km/h plus vite, elle mettrait 1 h de moins.

(a) Exprime en fonction de v la durée t_1 du trajet, puis la durée t_2 à la vitesse $v + 5$. Quelles valeurs de v conviennent ?

(b) Traduis l'énoncé par une équation, puis ramène-la à une équation du second degré d'inconnue v.

(c) Résous cette équation. Déduis-en la vitesse de Léna et la durée de sa sortie.

(d) Le lendemain, Léna fait 60 km à l'aller à u km/h, puis 60 km au retour 10 km/h moins vite : 5 h au total. Détermine u (domaine, équation, conclusion).

Ex. 48 ★★★ **Défis d'entiers consécutifs** — À Besançon, Noah propose des défis à son club de calcul mental. Pour chaque défi, nomme l'inconnue, précise si c'est un entier naturel ou relatif, mets en équation puis conclus par une phrase.

(a) Trouve deux entiers naturels consécutifs dont le produit dépasse leur somme de 271.

(b) Démontre qu'il n'existe aucun couple d'entiers consécutifs dont le produit vaut 2026.

(c) Trouve tous les triplets d'entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 365. Note n l'entier du milieu.

(d) Trouve deux entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés vaut aussi 365.