1. Reconnaître un trinôme et ses trois formes

Ex. 1 ★☆☆ **Trinôme ou pas ?**

(a) $f(x) = -2x^2 + x + 3$: c'est un trinôme avec $a = -2$, $b = 1$ et $c = 3$ (attention à l'ordre des termes).

(b) $g(x) = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$: les termes en x^2 s'annulent. g est affine, ce n'est pas un trinôme.

(c) $h(x) = \frac{1}{4}x^2$: c'est un trinôme avec $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$ et $c = 0$.

(d) $k(x) = 1 - x^2 + 6x = -x^2 + 6x + 1$: c'est un trinôme avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = 1$.

(e) $r(x) = 3x - 3x^2 + 1 - x = -3x^2 + 2x + 1$: c'est un trinôme avec $a = -3$, $b = 2$ et $c = 1$.

(f) Le coefficient de x^2 est $t - 2$, et un trinôme exige $a \neq 0$. Pour $t = 2$, on obtient $x \mapsto 3x - 1$, qui est affine : ce n'est pas un trinôme.

Ex. 2 ★☆☆ **Lire directement sur la forme**

(a) $f(x) = 2(x - (-3))^2 + (-1)$, donc $\alpha = -3$ (et pas 3) et $\beta = -1$. Le sommet est $S(-3\,;-1)$.

(b) $a = -1 < 0$. Comme $-(x-4)^2 \leqslant 0$, on a $g(x) \leqslant 6$, avec égalité pour $x = 4$. g a donc un maximum, égal à 6 et atteint en $x = 4$.

(c) $h(x) = 5(x-0)^2 + (-2)$, donc $\alpha = 0$ et $\beta = -2$. Le sommet est $S(0\,;-2)$.

(d) $a = 3$. $k(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x + 5 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -5$. Les racines sont 1 et -5.

(e) $3x + 2 = 0 \iff x = -\frac{2}{3}$ et $x - 5 = 0 \iff x = 5$. Les racines sont $-\frac{2}{3}$ et 5 (et pas -2). Comme $m(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5)$, on a $a = 3$.

(f) $p(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 0$, donc le sommet est $S(6\,;0)$. Comme $a = -\frac{1}{2} < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

Ex. 3 ★★☆ **Quatre élèves, quatre affirmations**

(a) $f(x) = 4(x - (-2))^2 + (-9)$, donc $\alpha = -2$ et $\beta = -9$. Le sommet est $S(-2\,;-9)$: Inès a tort, elle s'est trompée sur le signe de α.

(b) $g(2) = 2 \times 4 - 20 + 12 = 0$ et $g(3) = 2 \times 9 - 30 + 12 = 0$: les racines sont justes. Mais $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6 \neq g(x)$, car il a oublié $a = 2$. Hugo a tort : $g(x) = 2(x-2)(x-3)$.

Ex. 3 (suite)

(c) $-(x-3)^2 + 4 = -(x^2 - 6x + 9) + 4 = -x^2 + 6x - 5 = h(x)$. Lina a raison.

(d) $(3x-3)^2 + 2 = 9x^2 - 18x + 11$, alors que $3(x-1)^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 5$. Théo a tort : $(3x-3)^2 = 9(x-1)^2$, on ne peut pas faire entrer le 3 dans le carré.

Ex. 4 ★★★ **Trois formes pour un même trinôme**

(a) $C_1(x) = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3 = D_3(x)$; $C_2(x) = -x^2 + 2x - 1 + 9 = -x^2 + 2x + 8 = D_2(x)$; $C_3(x) = 2x^2 - 4x + 2 - 8 = 2x^2 - 4x - 6 = D_1(x)$.

(b) $F_1(x) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6 = D_1(x)$; $F_2(x) = x^2 - 2x - 3 = D_3(x)$; $F_3(x) = -(x^2 - 2x - 8) = -x^2 + 2x + 8 = D_2(x)$. F_1 et F_2 ont les mêmes racines, mais pas le même coefficient a (2 et 1) : elles ne sont pas égales.

(c) On prend la forme canonique C_3. Comme $2(x-1)^2 \geqslant 0$, on a $D_1(x) \geqslant -8$, avec égalité pour $x = 1$. Le minimum de D_1 vaut -8 et il est atteint en $x = 1$.

(d) Forme canonique : $-(x-1)^2 + 9 = 9 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$. L'équation a une seule solution : $x = 1$.

(e) Forme développée : $D_2(0) = 8$. Forme factorisée : $-(x+2)(x-4) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 4$. Les solutions sont -2 et 4.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux sur les trois formes**

(a) Faux. Pour $f(x) = x^2 + 1$, on a $x^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 1 > 0$: $f(x) = 0$ n'a pas de solution. Or une forme factorisée donnerait $f(x_1) = 0$.
Donc f n'a pas de forme factorisée.

(b) Vrai. Comme $a < 0$ et $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$, on a $a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant \beta$, avec égalité pour $x = \alpha$. β est donc le maximum de f.

(c) Vrai. $3(x-2) = 3x - 6$, donc $3(x-2)(x+1) = (3x-6)(x+1)$: le facteur 3 entre dans une seule parenthèse.

(d) Faux. $f(0) = -2 \times (0-3)^2 + 5 = -2 \times 9 + 5 = -13$. Le 5 est la valeur de f en $\alpha = 3$, pas en 0.

(e) Faux. $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x^2$ ont toutes les deux pour sommet $S(0\,;0)$, mais $f(1) = 1$ et $g(1) = 3$: elles ne sont pas égales.

Ex. 6 ★★★ **Un produit, trois écritures**

(a) On développe : $f(x) = 2x^2 + 8x - x - 4 = 2x^2 + 7x - 4$. C'est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2 \neq 0$, donc f est un trinôme : $a = 2$, $b = 7$, $c = -4$.

(b) $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, donc $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4)$ avec $a = 2$ (on ne l'oublie pas), $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -4$. Les racines de f sont $\frac{1}{2}$ et -4 (et pas 1 et -4).

(c) $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2\times 2} = -\frac{7}{4}$ et $\beta = f\left(-\frac{7}{4}\right) = \left(2 \times \left(-\frac{7}{4}\right) - 1\right)\left(-\frac{7}{4} + 4\right) = \left(-\frac{9}{2}\right) \times \frac{9}{4} = -\frac{81}{8}$. Donc, pour tout réel x, $f(x) = 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{8}$.

(d) $f(x) = -4$: on prend la forme développée, $2x^2 + 7x - 4 = -4 \iff 2x^2 + 7x = 0 \iff x(2x + 7) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{7}{2}$. $f(x) = \beta = -\frac{81}{8}$: on prend la forme canonique, $2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{8} = -\frac{81}{8} \iff \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = 0 \iff x = -\frac{7}{4}$. Une seule solution : $-\frac{7}{4}$.

(e) $a = 2 > 0$ et $2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant -\frac{81}{8}$, avec égalité seulement pour $x = -\frac{7}{4}$. f admet un minimum égal à $-\frac{81}{8}$, atteint en $x = -\frac{7}{4}$. f est décroissante sur $]-\infty\,;-\frac{7}{4}]$ et croissante sur $[-\frac{7}{4}\,;+\infty[$.

x	-∞	$-\frac{7}{4}$	+∞
f(x)	↘	$-\frac{81}{8}$	↗

Ex. 7 ★★★ **Une famille de fonctions : trinôme ou pas ?**

(a) $h_m(x) = m^2x^2 + 2mx + 1 - 4x^2 = (m^2 - 4)x^2 + 2mx + 1$. Le coefficient de x^2 est $m^2 - 4$, celui de x est $2m$ et le terme constant est 1.

(b) h_m est un trinôme si et seulement si $m^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 2$ et $m \neq -2$. Pour $m = 2$: $h_2(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2 = 4x + 1$; pour $m = -2$: $h_{-2}(x) = -4x + 1$. Les termes en x^2 s'annulent : ce sont des fonctions affines, pas des trinômes.

(c) Pour que $h_m(x) = ax^2$, il faudrait $b = 0$ et $c = 0$. Or le terme constant vaut 1 pour tout m, donc $c = 1 \neq 0$. Aucune valeur de m ne convient.

(d) $h_3(x) = (3x + 1)^2 - (2x)^2 = (3x + 1 - 2x)(3x + 1 + 2x) = (x + 1)(5x + 1)$. Comme $5x + 1 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)$, $h_3(x) = 5(x + 1)\left(x + \frac{1}{5}\right)$ avec $a = 5$ (le coefficient de x^2 dans $5x^2 + 6x + 1$), $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{1}{5}$. Écrire $(x + 1)\left(x + \frac{1}{5}\right)$ serait faux : on aurait perdu le a.

Ex. 7 (suite)

(e) $h_0(x) = 1 - 4x^2 = -4x^2 + 1 = -4(x - 0)^2 + 1$: forme canonique avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Forme factorisée : $1 - 4x^2 = (1 - 2x)(1 + 2x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Le sommet est $S(0\,;1)$; comme $a = -4 < 0$, h_0 admet un maximum égal à 1, atteint en $x = 0$.

Ex. 8 ★★★ **La fusée à eau d'Annecy**

(a) Nora : $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 6$, donc $a = -0{,}5$, $b = 2$, $c = 6$ (on lit les coefficients d'après la puissance de x, pas d'après l'ordre d'écriture). Yanis : $-0{,}5(x^2 - 4x + 4) + 8 = -0{,}5x^2 + 2x + 6$. Chloé : $3x + 6 - 0{,}5x^2 - x = -0{,}5x^2 + 2x + 6$. Malo : $-0{,}5(x^2 + 4x + 4) + 8 = -0{,}5x^2 - 2x + 6$. Yanis et Chloé ont la même expression que Nora ; Malo s'est trompé de signe pour α ($b = -2$ au lieu de 2).

(b) $6 - x = -(x - 6)$ et $0{,}5x + 1 = 0{,}5(x + 2)$, donc $h(x) = -0{,}5(x - 6)(x + 2)$ avec $a = -0{,}5$, le même que dans les deux autres formes.

(c) On utilise la forme développée : $h(0) = c = 6$. La fusée part d'une hauteur de 6 m.

(d) On utilise la forme canonique : $-0{,}5(x - 2)^2 \leqslant 0$, donc $h(x) \leqslant 8$, avec égalité pour $x = 2$. La fusée atteint une hauteur maximale de 8 m, à 2 m du point de lancement horizontalement.

(e) Au sol, on utilise la forme factorisée : $h(x) = 0 \iff x - 6 = 0$ ou $x + 2 = 0 \iff x = 6$ ou $x = -2$. Comme $x \geqslant 0$, la fusée touche le sol à 6 m. Pour $h(x) = 6$, on utilise la forme développée : $-0{,}5x^2 + 2x = 0 \iff x(-0{,}5x + 2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$. La fusée repasse à 6 m de hauteur à 4 m du lancement.

2. *Forme canonique, sommet, axe de symétrie et variations*

Ex. 9 ★☆☆ **Forme canonique avec α et β**

(a) $\alpha = -\frac{-8}{2\times 1} = 4$ et $\beta = f(4) = 16 - 32 + 11 = -5$, donc $f(x) = (x - 4)^2 - 5$.

(b) $\alpha = -\frac{24}{2\times 3} = -4$ et $\beta = f(-4) = 3 \times (-4)^2 + 24 \times (-4) + 46 = 48 - 96 + 46 = -2$, donc $f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$.

(c) $\alpha = -\frac{4}{2\times(-2)} = 1$ et $\beta = f(1) = -2 + 4 + 4 = 6$, donc $f(x) = -2(x - 1)^2 + 6$.

(d) $\alpha = -\frac{-4}{2\times 4} = \frac{1}{2}$ et $\beta = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 + 3 = 2$, donc $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$.

Ex. 9 **(suite)**

(e) $\alpha = -\frac{-14}{2\times(-1)} = -7$ et $\beta = f(-7) = -(-7)^2 - 14 \times (-7) - 45 = -49 + 98 - 45 = 4$, donc $f(x) = -(x+7)^2 + 4$.

Ex. 10 ★☆☆ **Lire le sommet sur la forme canonique**

(a) $S(5\,;2)$, axe $x = 5$. Comme $a = 3 > 0$, f admet un minimum égal à 2, atteint en $x = 5$.

(b) $S(2\,;7)$, axe $x = 2$. Comme $a = -1 < 0$, g admet un maximum égal à 7, atteint en $x = 2$ (le maximum n'est pas 2).

(c) $x + 6 = x - (-6)$, donc $S(-6\,;-1)$ et l'axe est $x = -6$. Comme $a = 2 > 0$, h admet un minimum égal à -1, atteint en $x = -6$.

(d) $k(x) = -4(x-(-3))^2 + 0$, donc $S(-3\,;0)$ et l'axe est $x = -3$. Comme $a = -4 < 0$, k admet un maximum égal à 0, atteint en $x = -3$.

(e) $m(x) = -2(x-4)^2 + 5$, donc $S(4\,;5)$ et l'axe est $x = 4$. Comme $a = -2 < 0$, m admet un maximum égal à 5, atteint en $x = 4$.

Ex. 11 ★★☆ **L'erreur de Léna en complétant le carré**

(a) Avec la forme développée, $f(0) = 4$. Avec la forme de Léna, $3 \times (0-3)^2 - 5 = 27 - 5 = 22$. Les deux résultats sont différents, donc Léna a tort.

(b) $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, donc $f(x) = 3\left[(x-3)^2 - 9\right] + 4 = 3(x-3)^2 - 27 + 4 = 3(x-3)^2 - 23$. Léna a oublié de multiplier le -9 par 3.

(c) $\alpha = -\frac{-18}{2\times 3} = 3$ et $\beta = f(3) = 27 - 54 + 4 = -23$: on retrouve bien $f(x) = 3(x-3)^2 - 23$.

(d) $g(x) = -2(x^2 + 10x) - 41$. Or $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.
Donc $g(x) = -2\left[(x+5)^2 - 25\right] - 41 = -2(x+5)^2 + 50 - 41 = -2(x+5)^2 + 9$.

Ex. 12 ★★☆ **Extremum justifié et tableau de variations**

(a) $\alpha = -\frac{12}{2\times(-3)} = 2$ et $\beta = f(2) = -12 + 24 - 7 = 5$, donc $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$.

(b) Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$, donc $-3(x-2)^2 \leqslant 0$ et $f(x) \leqslant 5$. De plus, $f(2) = 5$.
Donc f admet un maximum égal à 5, atteint en $x = 2$.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Comme $a = -3 < 0$, f est croissante sur $]-\infty\,;2]$ puis décroissante sur $[2\,;+\infty[$:

x	-∞	2	+∞
f(x)	↗	5	↘

(d) Première erreur : $\beta = f(\alpha) = f(2) = 5$, et non $f(-2) = -12 - 24 - 7 = -43$. Seconde erreur : $a = -3 < 0$, donc f admet un maximum, et non un minimum. La conclusion correcte : le maximum de f est 5, atteint en $x = 2$.

Ex. 13 ★★☆ **Retrouver un trinôme grâce à la symétrie**

(a) 1 et 7 sont distincts et ont la même image 11 : ils sont symétriques par rapport à l'axe $x = \alpha$.
Donc $\alpha = \frac{1+7}{2} = 4$.

(b) $f(0) = a \times (0-4)^2 + \beta = 16a + \beta = 25$ et $f(3) = a \times (3-4)^2 + \beta = a + \beta = -5$. Par soustraction, $15a = 30$, donc $a = 2$, puis $\beta = -5 - 2 = -7$.

(c) $f(x) = 2(x-4)^2 - 7 = 2(x^2 - 8x + 16) - 7 = 2x^2 - 16x + 25$. L'axe de symétrie a pour équation $x = 4$.

(d) $\frac{0+8}{2} = 4 = \alpha$, donc 0 et 8 sont symétriques par rapport à l'axe $x = 4$ et ont la même image : $f(8) = f(0) = 25$.

Ex. 14 ★★★ **Le plongeon d'Inès**

(a) $a = -0{,}4$ et $b = 2{,}4$.
Donc $\alpha = -\frac{2{,}4}{2\times(-0{,}4)} = -\frac{2{,}4}{-0{,}8} = 3$. Ensuite $\beta = h(3) = -0{,}4 \times 3^2 + 2{,}4 \times 3 + 2{,}8 = -3{,}6 + 7{,}2 + 2{,}8 = 6{,}4$.
Donc $h(x) = -0{,}4(x-3)^2 + 6{,}4$.

(b) Pour tout réel x, $(x-3)^2 \geqslant 0$. Comme $-0{,}4 < 0$, on a $-0{,}4(x-3)^2 \leqslant 0$, donc $h(x) \leqslant 6{,}4$. L'égalité a lieu seulement si $x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$. La hauteur maximale est donc 6,4 m. Inès l'atteint à 3 m du plongeoir, à l'horizontale (le maximum vaut 6,4 et non 3).

(c) $h(7) = -0{,}4 \times 7^2 + 2{,}4 \times 7 + 2{,}8 = -19{,}6 + 16{,}8 + 2{,}8 = 0$. Comme $a < 0$, h est croissante puis décroissante, avec un changement en $\alpha = 3$. On a $h(0) = 2{,}8$.

x	0		3		7
h(x)	2{,}8	↗	6{,}4	↘	0

Ex. 14 **(suite)**

(d) Le plongeoir est à la hauteur $h(0) = 2{,}8$. La parabole est symétrique par rapport à la droite $x = 3$. Le réel qui a la même image que 0 est donc son symétrique par rapport à 3, soit x tel que $\frac{0+x}{2} = 3$, d'où $x = 6$.
Vérification : $h(6) = -0{,}4 \times 36 + 2{,}4 \times 6 + 2{,}8 = -14{,}4 + 14{,}4 + 2{,}8 = 2{,}8$. Inès repasse à la hauteur du plongeoir à 6 m de celui-ci, à l'horizontale.

Ex. 15 ★★★ **Un trinôme construit à partir de son sommet**

(a) On a $a = 3$ et $\alpha = -3$.
Donc $-\frac{b}{2\times 3} = -3$, soit $\frac{b}{6} = 3$, d'où $b = 18$. Attention : tout le produit $2a$ est au dénominateur.

(b) Non. On a $\beta = f(\alpha)$ avec $\alpha = -3$: il faut calculer $f(-3)$ et non $f(3)$. $f(-3) = 3 \times (-3)^2 + 18 \times (-3) + c = 27 - 54 + c = c - 27$. La condition $f(-3) = 2$ donne $c - 27 = 2$, donc $c = 29$.

(c) $f(x) = 3(x+3)^2 + 2$, car $x + 3 = x - (-3)$.
Vérification : $3(x^2 + 6x + 9) + 2 = 3x^2 + 18x + 27 + 2 = 3x^2 + 18x + 29$.

(d) Pour tout réel x, $(x+3)^2 \geqslant 0$, donc $3(x+3)^2 \geqslant 0$, puis $f(x) \geqslant 2$. Comme $1 < 2$, aucun réel ne vérifie $f(x) = 1$: l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution.

(e) $f(x) = 50$ équivaut à $3(x+3)^2 + 2 = 50$, soit $3(x+3)^2 = 48$, puis $(x+3)^2 = 16$.
Donc $x + 3 = 4$ ou $x + 3 = -4$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -7$. Les points d'abscisses 1 et -7 ont la même ordonnée 50 : ils sont symétriques par rapport à l'axe $x = -3$. Leur milieu vaut $\frac{1+(-7)}{2} = -3 = \alpha$.

Ex. 16 ★★★ **La plus petite somme de carrés**

(a) Le second réel vaut $10 - x$.
Donc $S(x) = x^2 + (10-x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

(b) $S(x) = 2(x^2 - 10x) + 100$. Or $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$.
Donc $S(x) = 2\left[(x-5)^2 - 25\right] + 100 = 2(x-5)^2 - 50 + 100 = 2(x-5)^2 + 50$. Attention : le -25 est lui aussi multiplié par 2. Contrôle : $\alpha = -\frac{-20}{2\times 2} = 5$ et $S(5) = 25 + 25 = 50$.

(c) $a = 2 > 0$: S est décroissante sur $]-\infty\,;5]$, puis croissante sur $[5\,;+\infty[$. Son minimum vaut 50.

x	-∞	5	+∞
S(x)	↘	50	↗

Ex. 16 **(suite)**

(d) Pour tout réel x, $(x-5)^2 \geqslant 0$, donc $2(x-5)^2 \geqslant 0$, d'où $S(x) \geqslant 50$. L'égalité a lieu seulement pour $x = 5$. Le second réel vaut alors $10 - 5 = 5$. Chloé doit donc prendre 5 et 5. La somme des carrés vaut alors 50, c'est le minimum.

(e) $S(x) = x^2 + (s-x)^2 = x^2 + s^2 - 2sx + x^2 = 2x^2 - 2sx + s^2$. On a $\alpha = -\frac{-2s}{2\times 2} = \frac{s}{2}$. Puis $\beta = S\left(\frac{s}{2}\right) = 2 \times \frac{s^2}{4} - 2s \times \frac{s}{2} + s^2 = \frac{s^2}{2}$. Comme $a = 2 > 0$, le minimum est $\frac{s^2}{2}$, atteint pour $x = \frac{s}{2}$. Les deux réels cherchés sont donc égaux, et chacun vaut $\frac{s}{2}$.

3. *Discriminant et résolution de $ax^2 + bx + c = 0$*

Ex. 17 ★☆☆ **Calculer un discriminant**

(a) $a = 2, b = -5, c = 3$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1 > 0$, donc deux solutions.

(b) $a = -3, b = 4, c = 2$: $\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 16 + 24 = 40 > 0$, donc deux solutions.

(c) $a = 9, b = -6, c = 1$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$, donc une seule solution (racine double).

(d) $a = 5, b = 2, c = 4$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times 4 = 4 - 80 = -76 < 0$, donc aucune solution réelle.

(e) $a = -1, b = -3, c = -7$: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 9 - 28 = -19 < 0$, donc aucune solution réelle.

(f) $a = \frac{1}{2}, b = -4, c = 6$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 6 = 16 - 12 = 4 > 0$, donc deux solutions.

Ex. 18 ★☆☆ **Résoudre une équation du second degré**

(a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$, $\sqrt{49} = 7$.
$x_1 = \frac{3-7}{2} = -2$, $x_2 = \frac{3+7}{2} = 5$. $\mathcal{S} = \{-2\,;5\}$.

(b) $\Delta = 10^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 100 + 96 = 196$, $\sqrt{196} = 14$.
$x_1 = \frac{-10-14}{2\times 3} = -4$, $x_2 = \frac{-10+14}{6} = \frac{2}{3}$. $\mathcal{S} = \{-4\,;\frac{2}{3}\}$.

(c) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 16 + 32 = 48$,
$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. $x_1 = \frac{4-4\sqrt{3}}{2} = 2 - 2\sqrt{3}$, $x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$.
$\mathcal{S} = \{2 - 2\sqrt{3}\,;2 + 2\sqrt{3}\}$.

(d) $\Delta = 8^2 - 4 \times 16 \times 1 = 64 - 64 = 0$: racine double
$x_0 = -\frac{8}{2\times 16} = -\frac{1}{4}$. $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{4}\}$.

(e) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$: aucune solution réelle. $\mathcal{S} = \varnothing$.

(f) Pas besoin de Δ ($b = 0$) : $x^2 = 11 \iff x = -\sqrt{11}$ ou $x = \sqrt{11}$. $\mathcal{S} = \{-\sqrt{11}\,;\sqrt{11}\}$.

Ex. 18 **(suite)**

(g) Pas besoin de Δ ($c=0$) : $x(5x+2)=0 \iff x=0$ ou $x=-\frac{2}{5}$. $\mathcal{S}=\{-\frac{2}{5}\,;0\}$.

Ex. 19 ★★☆ **Tout dans un membre avant de lire a, b, c**

(a) $2x^2-7x+3=0$: $\Delta=(-7)^2-4\times2\times3=49-24=25$. $x_1=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{7+5}{4}=3$.
Donc $\mathcal{S}=\{\frac{1}{2}\,;3\}$.

(b) $x^2+4x-2x-3=0$, soit $x^2+2x-3=0$: $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=16$. $x_1=\frac{-2-4}{2}=-3$, $x_2=\frac{-2+4}{2}=1$.
Donc $\mathcal{S}=\{-3\,;1\}$.

(c) $x^2-2x+1-3x+7=0$, soit $x^2-5x+8=0$: $\Delta=(-5)^2-4\times1\times8=25-32=-7<0$. Aucune solution réelle : $\mathcal{S}=\varnothing$.

(d) $4x^2-9x=0 \iff x(4x-9)=0 \iff x=0$ ou $x=\frac{9}{4}$. Diviser par x aurait fait perdre 0.
Donc $\mathcal{S}=\{0\,;\frac{9}{4}\}$.

(e) $4x^2-5x-7x+9=0$, soit $4x^2-12x+9=0$: $\Delta=(-12)^2-4\times4\times9=144-144=0$, racine double $x_0=-\frac{-12}{2\times4}=\frac{3}{2}$.
Donc $\mathcal{S}=\{\frac{3}{2}\}$.

Ex. 20 ★★☆ **Corriger les copies de Lina et Théo**

(a) Lina a calculé $-3^2=-9$ au lieu de $b^2=(-3)^2=9$. On a $\Delta=(-3)^2-4\times(-2)\times5=9+40=49$.

(b) Le dénominateur vaut $2a=2\times(-2)=-4$, et non 2. Avec $\sqrt{49}=7$: $x_1=\frac{3-7}{-4}=1$ et $x_2=\frac{3+7}{-4}=-\frac{5}{2}$.
Donc $\mathcal{S}=\{-\frac{5}{2}\,;1\}$.

(c) Non. $\Delta=2^2-4\times1\times7=4-28=-24<0$. On ne prend pas la valeur absolue : l'équation n'a aucune solution réelle, donc $\mathcal{S}=\varnothing$.

(d) $1-2\sqrt{6}+6-2+2\sqrt{6}+7=12\neq0$: $-1+\sqrt{6}$ n'est pas solution, ce qui confirme l'erreur de Théo.

Ex. 21 ★★☆ **Équation bicarrée et équation avec quotient**

(a) $X^2-5X-36=0$: $\Delta=(-5)^2-4\times1\times(-36)=25+144=169$, $\sqrt{169}=13$. $X_1=\frac{5-13}{2}=-4$ et $X_2=\frac{5+13}{2}=9$.

(b) $X=x^2\geqslant0$, donc on rejette $X=-4$. Il reste $x^2=9 \iff x=-3$ ou $x=3$.
Donc $\mathcal{S}=\{-3\,;3\}$.

(c) Le dénominateur s'annule pour $x+5=0$, soit $x=-5$: c'est la valeur interdite.

Ex. 21 **(suite)**

(d) Pour $x\neq-5$, (F) équivaut à $x^2+2x-15=0$. $\Delta=2^2-4\times1\times(-15)=64$, d'où $x=\frac{-2-8}{2}=-5$ ou $x=\frac{-2+8}{2}=3$. On exclut -5 : $\mathcal{S}=\{3\}$.

Ex. 22 ★★★ **Démontrer la formule des racines**

(a) Comme $a\neq0$: $f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$, ce qui donne bien la forme voulue avec $\Delta=b^2-4ac$.

(b) Comme $a\neq0$, $f(x)=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$. Un carré est toujours positif ou nul. Or $4a^2>0$ et $\Delta<0$, donc $\frac{\Delta}{4a^2}<0$. Un carré ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif : $\mathcal{S}=\varnothing$.

(c) Si $\Delta=0$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$, une seule solution. Si $\Delta>0$: $\frac{\Delta}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, donc $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Ces deux solutions sont distinctes car $\sqrt{\Delta}\neq0$.

(d) $3x^2-4x-2=3\left[x^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right]=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-\frac{6}{9}\right]=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{10}{9}\right]$. L'équation équivaut donc à $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$, soit $x-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ou $x-\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{10}}{3}$.
Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{2-\sqrt{10}}{3}\,;\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right\}$.

(e) $a=3$, $b=-4$, $c=-2$: $\Delta=(-4)^2-4\times3\times(-2)=16+24=40>0$, et $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. $x_1=\frac{4-2\sqrt{10}}{6}=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2=\frac{4+2\sqrt{10}}{6}=\frac{2+\sqrt{10}}{3}$. On retrouve bien les mêmes solutions.

Ex. 23 ★★★ **Le dégagement d'Inès à Rennes**

(a) $h(0)=-0{,}05\times0^2+0+2=2$. Le ballon part à 2 m de hauteur.

(b) $h(x)=0 \iff -0{,}05x^2+x+2=0 \iff x^2-20x-40=0$ (on multiplie par -20). $\Delta=(-20)^2-4\times1\times(-40)=400+160=560$, $\sqrt{560}=4\sqrt{35}$. Les racines sont $\frac{20-4\sqrt{35}}{2}=10-2\sqrt{35}<0$ (rejetée, car $x\geqslant0$) et $10+2\sqrt{35}$. Le ballon touche le sol à $10+2\sqrt{35}\approx21{,}83$ m.

(c) $h(x)=6{,}8 \iff -0{,}05x^2+x-4{,}8=0 \iff x^2-20x+96=0$. $\Delta=(-20)^2-4\times1\times96=400-384=16$, $\sqrt{16}=4$. $x_1=\frac{20-4}{2}=8$ et $x_2=\frac{20+4}{2}=12$. Le ballon est à 6,8 m de haut à 8 m et à 12 m d'Inès.

(d) $h(x)=7{,}5 \iff -0{,}05x^2+x-5{,}5=0 \iff x^2-20x+110=0$. $\Delta=(-20)^2-4\times1\times110=400-440=-40<0$: pas de solution réelle, $\mathcal{S}=\varnothing$. Le ballon n'atteint jamais 7,5 m.

Ex. 23 **(suite)**

(e) $h(x) = k \iff x^2 - 20x + 20k - 40 = 0$. $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times (20k - 40) = 560 - 80k$. Une seule solution si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $k = 7$. La racine double est $x_0 = \frac{20}{2} = 10$. En effet, $h(x) = -0{,}05(x - 10)^2 + 7 \leqslant 7$: 7 m est la hauteur maximale du ballon, atteinte à 10 m d'Inès.

Ex. 24 ★★★ **Une équation qui dépend d'un paramètre**

(a) Pour $m = 2$, le coefficient de x^2 est nul : l'équation devient $-6x + 3 = 0$, du premier degré, pas du second. $x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(b) $a = m - 2$, $b = -6$, $c = 3$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (m - 2) \times 3 = 36 - 12m + 24 = 60 - 12m$.

(c) Pour $m \neq 2$, une seule solution si et seulement si $\Delta = 0$: $60 - 12m = 0 \iff m = 5$. Alors $3x^2 - 6x + 3 = 0$ a la racine double $x_0 = -\frac{-6}{2\times 3} = 1$. Le cas $m = 2$ donne aussi une seule solution, $\frac{1}{2}$. Les valeurs cherchées sont donc $m = 2$ et $m = 5$.

(d) Pour $m = -1$: $-3x^2 - 6x + 3 = 0$. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 36 + 36 = 72$, $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. $x_1 = \frac{6 - 6\sqrt{2}}{2\times(-3)} = -1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{6 + 6\sqrt{2}}{-6} = -1 - \sqrt{2}$.
$\mathcal{S} = \{-1 - \sqrt{2}\,; -1 + \sqrt{2}\}$.

(e) -1 est solution si et seulement si $(m - 2) \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 3 = 0$, soit $m - 2 + 6 + 3 = 0 \iff m = -7$. L'équation est alors $-9x^2 - 6x + 3 = 0$. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$, donc l'autre solution est $x_2 = \frac{-\frac{1}{3}}{-1} = \frac{1}{3}$.

4. *Factoriser un trinôme, retrouver un trinôme*

Ex. 25 ★☆☆ **Factoriser à l'aide du discriminant**

(a) $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$. $x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$.
Donc $A(x) = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 3)(2x - 1)$.

(b) $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 36 - 20 = 16 > 0$. $x_1 = \frac{-6-4}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-6+4}{-2} = 1$.
Donc $B(x) = -(x - 1)(x - 5)$.

(c) $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$.
$x_0 = -\frac{-12}{2\times 9} = \frac{2}{3}$.
Donc $C(x) = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = (3x - 2)^2$.

(d) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4 - 60 = -56 < 0$: D n'a pas de racine, donc il n'y a pas de factorisation en produit de facteurs du premier degré.

Ex. 25 **(suite)**

(e) $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 5 \times (-6) = 49 + 120 = 169$,
$\sqrt{\Delta} = 13$. $x_1 = \frac{7-13}{10} = -\frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{7+13}{10} = 2$.
Donc $E(x) = 5\left(x + \frac{3}{5}\right)(x - 2) = (5x + 3)(x - 2)$.

(f) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$.
$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{5}$.
Donc $F(x) = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})$.

Ex. 26 ★★☆ **Factoriser sans discriminant**

(a) Facteur commun $4x$: $G(x) = 4x \times x - 4x \times 5 = 4x(x - 5)$.

(b) $H(x) = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$.

(c) $K(x) = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 1 + 1^2 = (5x + 1)^2$.

(d) $L(x) = -3(x^2 - 4) = -3(x - 2)(x + 2)$.

(e) $M(x) = x^2 - 2 \times 8 \times x + 8^2 = (x - 8)^2$.

(f) $N(x) = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = (x - 2)(x + 4)$.

Ex. 27 ★★☆ **Trois factorisations à corriger**

(a) $(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - 2x + 1 = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$. Le coefficient de x^2 vaut 1 au lieu de 2 : Inès a tort, elle a oublié le facteur $a = 2$.

(b) $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0$ et $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = 0$. Avec $a = 2$: $2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x - 1)$.

(c) $(x - 4)(x + 3) = x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - x - 12$: c'est faux. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$, $x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$. La racine -4 donne le facteur $x + 4$: $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$.

(d) $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12 < 0$: il n'y a pas de racine, donc pas de factorisation. $(x + 2)^2 + 3$ est une somme : c'est la forme canonique. Hugo a tort.

Ex. 28 ★★☆ **Mêmes racines, trinômes différents**

(a) f a pour racines 1 et 4, donc $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$. $f(0) = a \times (0 - 1) \times (0 - 4) = 4a = -8$, d'où $a = -2$. Ainsi $f(x) = -2(x - 1)(x - 4)$.

(b) $f(x) = -2(x^2 - 5x + 4) = -2x^2 + 10x - 8$. Contrôle : $f(0) = -8$, le point A est bien sur $\mathcal{P}$.

(c) $g(x) = a(x - 1)(x - 4)$ et $g(2) = a \times 1 \times (-2) = -2a = -4$, d'où $a = 2$. Ainsi $g(x) = 2(x - 1)(x - 4) = 2x^2 - 10x + 8$.

(d) Faux : f et g ont les racines 1 et 4, mais $f(0) = -8$ et $g(0) = 8$, donc $f \neq g$. Les racines ne fixent pas a ; ici $a = -2$ pour f et $a = 2$ pour g.

Ex. 28 **(suite)**

(e) L'axe passe par le milieu des racines : $x = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$. Contrôle avec f : $\alpha = -\frac{10}{2\times(-2)} = \frac{5}{2}$. L'axe commun est la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Ex. 29 ★★☆ **Retrouver un trinôme à partir de tableaux**

(a) f est décroissante puis croissante, avec un minimum -3 atteint en 2 : $S(2\,;-3)$ et $a > 0$.
Donc $f(x) = a(x-2)^2 - 3$.

(b) $f(4) = a \times (4-2)^2 - 3 = 4a - 3 = 9$, d'où $a = 3$. Ainsi $f(x) = 3(x-2)^2 - 3 = 3x^2 - 12x + 9$.

(c) $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 144 - 108 = 36$. $x_1 = \frac{12-6}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{12+6}{6} = 3$.
Donc $f(x) = 3(x-1)(x-3)$.

(d) $g(-2) = g(0) = 3$ et $g(-3) = g(1) = 9$: les valeurs sont symétriques par rapport à -1. L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = -1$ et le sommet est $(-1\,;1)$.

(e) $g(x) = a(x+1)^2 + 1$ et $g(0) = a + 1 = 3$, d'où $a = 2$.
$g(x) = 2(x+1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$. $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 3 = 16 - 24 = -8 < 0$: pas de racine, donc pas de factorisation.

Ex. 30 ★★★ **Quand un trinôme se factorise-t-il ?**

(a) Comme $\Delta > 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$.
Donc $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. Ainsi $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(b) $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ et, comme $\Delta < 0$, $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$: le crochet est strictement positif. Comme $a \neq 0$, $f(x) \neq 0$ pour tout réel x. Si on avait $f(x) = a(x-u)(x-v)$, alors $f(u) = a \times 0 \times (u-v) = 0$: c'est impossible.
Donc $f(x)$ n'a pas de factorisation en produit de facteurs du premier degré.

(c) Si $\Delta = 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ et le crochet vaut $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
Donc $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Le trinôme a une seule racine (racine double), x_0.

(d) Vrai. Si a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$. Comme $b^2 \geqslant 0$, on a $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. D'après la première question, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Pour $-2x^2 + 7x + 3$: $a = -2 < 0$ et $c = 3 > 0$, donc ce trinôme se factorise. En effet, $\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49 + 24 = 73 > 0$.

Ex. 31 ★★★ **Le jet d'eau d'Annecy**

(a) Le sommet de la parabole est $S(4\,;5)$, donc $h(x) = a(x-4)^2 + 5$. Comme $B(0\,;1)$ est sur la parabole, $h(0) = a \times (0-4)^2 + 5 = 16a + 5 = 1$, d'où $a = -\frac{1}{4}$. Ainsi $h(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 5$.

(b) $h(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) + 5 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 + 5 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$.

(c) $\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times 1 = 4 + 1 = 5 > 0$. Les racines sont $x_1 = \frac{-2+\sqrt{5}}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = 4 - 2\sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{5}}{-\frac{1}{2}} = 4 + 2\sqrt{5}$.
Donc $h(x) = -\frac{1}{4}\left(x - 4 + 2\sqrt{5}\right)\left(x - 4 - 2\sqrt{5}\right)$. On contrôle : $-\frac{1}{4}\left[(x-4)^2 - 20\right] = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$.

(d) Le jet touche le sol quand $h(x) = 0$ avec $x \geqslant 0$, donc en $x = 4 + 2\sqrt{5} \approx 8{,}47$ m (l'autre racine $4 - 2\sqrt{5}$ est négative). Comme $8{,}47 < 8{,}5$, l'eau retombe dans le bassin.

(e) On utilise la forme canonique : $-\frac{1}{4}(x-4)^2 + 5 = 4$ donne $(x-4)^2 = 4$, donc $x - 4 = -2$ ou $x - 4 = 2$, soit $x = 2$ ou $x = 6$. Le jet est à 4 m de haut à 2 m et à 6 m de la buse.

Ex. 32 ★★★ **Simplifier un quotient grâce aux racines**

(a) Pour N : $a + b + c = 2 + 3 - 5 = 0$, donc $N(1) = 0$.
Pour D : $a + b + c = 3 + 2 - 5 = 0$, donc $D(1) = 0$.
Ainsi 1 est une racine de $N(x)$ et de $D(x)$.

(b) Pour N : $1 \times x_2 = -\frac{5}{2}$, donc $x_2 = -\frac{5}{2}$ et $N(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$. Pour D : $1 \times x_2 = -\frac{5}{3}$, donc $x_2 = -\frac{5}{3}$ et $D(x) = 3(x-1)\left(x + \frac{5}{3}\right) = (x-1)(3x+5)$. Contrôle : $(x-1)(2x+5) = 2x^2 + 3x - 5$ et $(x-1)(3x+5) = 3x^2 + 2x - 5$.

(c) $D(x) = 0$ pour $x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$: ce sont les valeurs interdites. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -\frac{5}{3}$, $F(x) = \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(3x+5)} = \frac{2x+5}{3x+5}$.

(d) Non. 1 est une valeur interdite : $D(1) = 0$, donc $F(1)$ n'existe pas. La simplification par $x - 1$ n'est valable que pour $x \neq 1$.

(e) Pour $x \neq 1$ et $x \neq -\frac{5}{3}$: $\frac{2x+5}{3x+5} = x$ équivaut à $2x + 5 = 3x^2 + 5x$, soit $3x^2 + 3x - 5 = 0$. $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 9 + 60 = 69 > 0$, donc $x_1 = \frac{-3-\sqrt{69}}{6}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{69}}{6}$. On a $x_1 \approx -1{,}88$ et $x_2 \approx 0{,}88$: ce ne sont pas des valeurs interdites.
Donc $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{69}}{6}\,;\,\frac{-3+\sqrt{69}}{6}\right\}$.

5. *Somme et produit des racines, racine évidente*

Ex. 33 ★☆☆ **Racine évidente et produit**

(a) $a+b+c=3-5+2=0$, donc 1 est racine. Produit : $x_1x_2=\frac{2}{3}$, donc $x_2=\frac{2}{3}$. Contrôle : $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=-\frac{-5}{3}$.

(b) $a+b+c=4+7+3=14\neq 0$; $a-b+c=4-7+3=0$, donc -1 est racine. Produit : $\frac{3}{4}$, donc $x_2=\frac{3}{4}\div(-1)=-\frac{3}{4}$. Contrôle : $-1-\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}$.

(c) $a+b+c=5+2-7=0$, donc 1 est racine. Produit : $\frac{-7}{5}$, donc $x_2=-\frac{7}{5}$ (et non -7 : on divise par a). Contrôle : $1-\frac{7}{5}=-\frac{2}{5}$.

(d) $a+b+c=-2+3+5=6\neq 0$; $a-b+c=-2-3+5=0$, donc -1 est racine. Produit : $\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$, donc $x_2=-\frac{5}{2}\div(-1)=\frac{5}{2}$. Contrôle : $-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}=-\frac{3}{-2}$.

(e) $a+b+c=6-1-7=-2\neq 0$; $a-b+c=6+1-7=0$, donc -1 est racine. Produit : $-\frac{7}{6}$, donc $x_2=\frac{7}{6}$. Contrôle : $-1+\frac{7}{6}=\frac{1}{6}=-\frac{-1}{6}$.

Ex. 34 ★☆☆ **Somme et produit, si les racines existent**

(a) $\Delta=(-8)^2-4\times 2\times 3=40>0$: deux racines. $S=-\frac{-8}{2}=4$ et $P=\frac{3}{2}$.

(b) $\Delta=6^2-4\times(-1)\times 4=52>0$: deux racines. $S=-\frac{6}{-1}=6$ et $P=\frac{4}{-1}=-4$.

(c) $\Delta=2^2-4\times 3\times 5=-56<0$: aucune racine réelle. Il n'y a ni somme ni produit à donner ($-\frac{2}{3}$ ne serait la somme de rien).

(d) $\Delta=(-12)^2-4\times 4\times 9=0$: une racine double. $S=-\frac{-12}{4}=3$ et $P=\frac{9}{4}$ (la racine double vaut $\frac{3}{2}$).

(e) $\Delta=7^2-4\times 1\times(-2)=57>0$: deux racines. $S=-7$ et $P=-2$.

Ex. 35 ★★☆ **Une racine connue, l'autre par le produit**

(a) $f(3)=2\times 3^2-11\times 3+15=18-33+15=0$, donc 3 est racine de f.

(b) Non : le produit des racines vaut $\frac{c}{a}=\frac{15}{2}$, pas $c=15$. D'ailleurs $f(5)=50-55+15=10\neq 0$. Nathan a oublié de diviser par a.

(c) $3\times x_2=\frac{15}{2}$, donc $x_2=\frac{15}{2}\div 3=\frac{5}{2}$. Contrôle : $3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}=-\frac{-11}{2}$. L'autre racine est $\frac{5}{2}$.

(d) $f(x)=2(x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x-3)(2x-5)$.

Ex. 36 ★★☆ **L'enclos de Clémence à Rodez**

(a) $2(\ell+L)=34$, donc $\ell+L=17$; et $\ell\times L=60$.

(b) Non : deux nombres de somme S et de produit P sont solutions de $x^2-Sx+P=0$. Ici, c'est $x^2-17x+60=0$. Les solutions de l'équation d'Inès ont pour somme -17 et pour produit 60 : elles sont toutes les deux négatives, ce ne sont pas des longueurs.

(c) $\Delta=(-17)^2-4\times 1\times 60=289-240=49$, $\sqrt{\Delta}=7$. $x_1=\frac{17-7}{2}=5$ et $x_2=\frac{17+7}{2}=12$. L'enclos mesure 5 m sur 12 m.

(d) Il faudrait $\ell+L=10$ et $\ell L=30$, donc $x^2-10x+30=0$. $\Delta=(-10)^2-4\times 30=-20<0$: aucune solution. Un tel enclos n'existe pas.

Ex. 37 ★★☆ **Sans calculer les racines**

(a) $a=3$ et $c=-2$ sont de signes contraires, donc $ac<0$ et $\Delta=b^2-4ac>0$: deux solutions. Leur produit $\frac{c}{a}=-\frac{2}{3}$ est négatif : elles sont de signes contraires.

(b) $x_1+x_2=-\frac{8}{3}$ et $x_1x_2=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$. La somme est négative : la solution négative a la plus grande valeur absolue.

(c) $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{9}$.

(d) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{64}{9}+\frac{4}{3}=\frac{76}{9}$.

(e) Non. On doit avoir $x_1+x_2=-\frac{8}{3}\approx -2{,}67$, or $0{,}23+(-2{,}23)=-2$. Les valeurs de Lina ne conviennent pas.

Ex. 38 ★★★ **Démontrer les formules, puis s'en méfier**

(a) Si $\Delta>0$, $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$. Et $x_1x_2=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

(b) Si $\Delta=0$, $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. La somme vaut $-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{a}$. Le produit vaut $\frac{b^2}{4a^2}$. Or $\Delta=0$ donne $b^2=4ac$, donc le produit vaut $\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$. Les deux égalités restent vraies.

(c) Il a tort. $\Delta=3^2-4\times 1\times 5=9-20=-11<0$. Le trinôme n'a donc aucune racine réelle. Les formules $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ ne s'appliquent que si $\Delta\geqslant 0$: il n'y a pas de racines, ni négatives ni positives.

(d) $(x-u)(x-v)=x^2-vx-ux+uv=x^2-(u+v)x+uv=x^2-Sx+P$. Pour $x=u$ ou $x=v$, un facteur est nul, donc $u^2-Su+P=0$ et $v^2-Sv+P=0$: u et v sont solutions de $x^2-Sx+P=0$.

Ex. 38 **(suite)**

(e) Si deux tels réels u et v existent, ils sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$ (question précédente). Cette équation a donc au moins une solution, donc son discriminant $\Delta = (-S)^2 - 4 \times 1 \times P = S^2 - 4P$ vérifie $S^2 - 4P \geqslant 0$. Réciproquement, si $S^2 - 4P \geqslant 0$, l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, éventuellement égales. D'après les deux premières questions, avec $a = 1$, $b = -S$ et $c = P$: $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$. Ces deux réels conviennent.

Ex. 39 ★★★ **Inverses des solutions, sans les calculer**

(a) $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 100 - 56 = 44 > 0$: (E) a deux solutions. Leur produit vaut $\frac{c}{a} = \frac{7}{2} > 0$, donc elles sont de même signe. Leur somme vaut $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{2} = 5 > 0$. Les deux solutions sont donc positives.

(b) Comme $x_1 x_2 \neq 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{\frac{7}{2}} = \frac{10}{7}$.

(c) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 5^2 - 4 \times \frac{7}{2} = 25 - 14 = 11$. L'écart entre les deux solutions vaut donc $|x_1 - x_2| = \sqrt{11}$.

(d) Somme : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{10}{7}$. Produit : $\frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{2}{7}$. Ces deux nombres existent, donc ce sont les solutions de $x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{2}{7} = 0$. En multipliant par 7 : $7x^2 - 10x + 2 = 0$ convient.

Ex. 40 ★★★ **Une solution commune à toute une famille**

(a) $a + b + c = 2 + (m - 2) + (-m) = 0$.
Donc 1 est solution de (E_m), pour tout réel m.

(b) Le produit des solutions vaut $\frac{c}{a} = \frac{-m}{2}$ (et non $-m$, car $a = 2$). Comme $x_1 = 1$, on a $x_2 = -\frac{m}{2}$. Contrôle : $1 - \frac{m}{2} = \frac{2-m}{2} = -\frac{m-2}{2} = -\frac{b}{a}$.

(c) Il y a une solution double si et seulement si $1 = -\frac{m}{2}$, c'est-à-dire $m = -2$. Alors (E_{-2}) : $2x^2 - 4x + 2 = 0$, soit $2(x-1)^2 = 0$. La solution double est 1.

(d) Les solutions sont opposées si et seulement si leur somme est nulle : $1 - \frac{m}{2} = 0$, donc $m = 2$. Alors (E_2) : $2x^2 - 2 = 0$, soit $x^2 = 1$. Les solutions sont -1 et 1.

(e) Si $m \neq 0$, le produit $-\frac{m}{2}$ n'est pas nul, donc aucune solution n'est nulle. $\frac{1}{1} + \frac{1}{-\frac{m}{2}} = 1 - \frac{2}{m}$. On résout $1 - \frac{2}{m} = -1$, soit $\frac{2}{m} = 2$, donc $m = 1$. Contrôle : (E_1) : $2x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions 1 et $-\frac{1}{2}$, et $1 + (-2) = -1$.
Donc $m = 1$.

6. *Problèmes : modéliser par le second degré*

Ex. 41 ★☆☆ **Des nombres à retrouver**

(a) Soit x le nombre. $x + x^2 = 42 \iff x^2 + x - 42 = 0$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-42) = 169$, $\sqrt{\Delta} = 13$. $x_1 = \frac{-1-13}{2} = -7$ et $x_2 = \frac{-1+13}{2} = 6$. Le nombre est -7 ou 6.

(b) Soit n le plus petit des deux entiers. $n(n+1) = 156 \iff n^2 + n - 156 = 0$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-156) = 625$, $\sqrt{\Delta} = 25$. $n = \frac{-1-25}{2} = -13$ ou $n = \frac{-1+25}{2} = 12$. Les deux entiers sont 12 et 13, ou bien -13 et -12 : les deux couples conviennent.

(c) Soit x le nombre. $x^2 = 5x \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$. On ne divise pas par x, sinon on perd 0. Le nombre est 0 ou 5.

(d) Soit n le plus petit des deux entiers, avec n entier naturel pair. $n(n+2) = 168 \iff n^2 + 2n - 168 = 0$. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-168) = 676$, $\sqrt{\Delta} = 26$. $n = \frac{-2-26}{2} = -14$ ou $n = \frac{-2+26}{2} = 12$. On rejette -14, qui n'est pas un entier naturel. Les entiers sont 12 et 14.

(e) Soit $x \geqslant 0$ le nombre. $x^2 - 3x = 10 \iff x^2 - 3x - 10 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. $x = \frac{3-7}{2} = -2$ ou $x = \frac{3+7}{2} = 5$. On rejette $-2 < 0$. Le nombre est 5.

(f) Soit $x \neq 0$ le nombre. $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$; en multipliant par $2x \neq 0$: $2x^2 + 2 = 5x \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$. $x = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5+3}{4} = 2$, tous deux non nuls. Le nombre est $\frac{1}{2}$ ou 2.

Ex. 42 ★☆☆ **Maximal ou minimal : la forme canonique**

(a) $G(x) = -2(x^2 - 20x) - 150 = -2[(x-10)^2 - 100] - 150 = -2(x-10)^2 + 50$. Comme $a = -2 < 0$, G admet un maximum égal à 50 : le gain est maximal, 50 €, pour 10 litres vendus.

(b) $A(x) = -x^2 + 12x = -(x^2 - 12x) = -[(x-6)^2 - 36] = -(x-6)^2 + 36$. Comme $a = -1 < 0$, l'aire est maximale pour $x = 6$ cm : elle vaut 36 cm^2 (le rectangle est alors un carré).

(c) $T(t) = -0{,}5(t^2 - 12t) + 4 = -0{,}5[(t-6)^2 - 36] + 4 = -0{,}5(t-6)^2 + 22$. Comme $a = -0{,}5 < 0$, la température est maximale à $t = 6$ h : elle vaut 22 °C.

(d) $C(x) = 3(x^2 - 8x) + 60 = 3[(x-4)^2 - 16] + 60 = 3(x-4)^2 + 12$. Comme $a = 3 > 0$, le coût admet un minimum égal à 12 centaines d'euros, soit 1\,200 €, atteint pour 4 tonnes de farine.

Ex. 42 **(suite)**

(e) $d(x) = (x+3)^2 - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4$, donc $\alpha = -3$ (et non 3) et $\beta = 4$. Comme $a = 1 > 0$, d admet un minimum égal à 4, atteint pour $x = -3$.

Ex. 43 ★★☆ **L'allée du jardin**

(a) x est une longueur, donc $x > 0$. La pelouse mesure $14 - 2x$ m de large, il faut donc $14 - 2x > 0$, soit $x < 7$. Ainsi $x \in]0\,;7[$.

(b) La pelouse mesure $(20 - 2x)$ m sur $(14 - 2x)$ m. Donc $A(x) = (20-2x)(14-2x) = 280 - 40x - 28x + 4x^2 = 4x^2 - 68x + 280$.

(c) $A(x) = 160 \iff 4x^2 - 68x + 120 = 0 \iff x^2 - 17x + 30 = 0$. $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 1 \times 30 = 169$, $\sqrt{\Delta} = 13$. $x_1 = \frac{17-13}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{17+13}{2} = 15$. On rejette 15, car $x < 7$. L'allée doit mesurer 2 m de large.

(d) La moitié du jardin vaut $\frac{280}{2} = 140$ m². $A(x) = 140 \iff 4x^2 - 68x + 140 = 0 \iff x^2 - 17x + 35 = 0$. $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 1 \times 35 = 149$. $x = \frac{17-\sqrt{149}}{2} \approx 2{,}40$ ou $x = \frac{17+\sqrt{149}}{2} \approx 14{,}6$, qu'on rejette car il dépasse 7. L'allée doit mesurer $\frac{17-\sqrt{149}}{2}$ m, soit environ 2,40 m.

Ex. 44 ★★☆ **Le lancer de ballon**

(a) $h(t) = -4{,}9(t^2 - 4t) + 1{,}5 = -4{,}9[(t-2)^2 - 4] + 1{,}5 = -4{,}9(t-2)^2 + 21{,}1$. Comme $a = -4{,}9 < 0$, la hauteur est maximale pour $t = \alpha = 2$: le ballon atteint 21,1 m au bout de 2 s.

(b) $h(t) = 16{,}2 \iff -4{,}9t^2 + 19{,}6t - 14{,}7 = 0 \iff t^2 - 4t + 3 = 0$ (on divise par $-4{,}9$). $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$, d'où $t = \frac{4-2}{2} = 1$ ou $t = \frac{4+2}{2} = 3$. Le ballon est à 16,2 m à 1 s (en montant) puis à 3 s (en descendant).

(c) $h(t) = 0 \iff -4{,}9(t-2)^2 + 21{,}1 = 0 \iff (t-2)^2 = \frac{21{,}1}{4{,}9} = \frac{211}{49}$, d'où $t = 2 - \frac{\sqrt{211}}{7} \approx -0{,}08$ ou $t = 2 + \frac{\sqrt{211}}{7}$. On rejette la racine négative, car $t \geqslant 0$. Le ballon touche le sol à $t = 2 + \frac{\sqrt{211}}{7}$ s, soit environ 4,08 s.

(d) La hauteur de départ est $h(0) = 1{,}5$ m. $h(t) = 1{,}5 \iff -4{,}9t^2 + 19{,}6t = 0 \iff t(-4{,}9t + 19{,}6) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{19{,}6}{4{,}9} = 4$. Le ballon repasse à 1,5 m au bout de 4 s, l'instant symétrique de 0 par rapport à l'axe $t = 2$.

Ex. 45 ★★☆ **L'atelier de bougies**

(a) $B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (x^2 + 10x + 300) = -x^2 + 40x - 300$.

Ex. 45 **(suite)**

(b) $B(x) = 0 \iff -x^2 + 40x - 300 = 0$. $\Delta = 40^2 - 4 \times (-1) \times (-300) = 1\,600 - 1\,200 = 400$, $\sqrt{\Delta} = 20$. $x_1 = \frac{-40-20}{-2} = 30$ et $x_2 = \frac{-40+20}{-2} = 10$, deux entiers de $[0\,;50]$. Le bénéfice est nul pour 10 ou 30 bougies.

(c) $B(x) = -(x^2 - 40x) - 300 = -[(x-20)^2 - 400] - 300 = -(x-20)^2 + 100$. Comme $a = -1 < 0$, le bénéfice est maximal pour $x = 20$, qui est bien un entier. Chloé doit fabriquer 20 bougies, pour un bénéfice maximal de 100 €.

(d) $B(28) = -(28)^2 + 40 \times 28 - 300 = 36 \neq 64$. De plus, $B(x) = 64 \iff x^2 - 40x + 364 = 0$; $\Delta = (-40)^2 - 4 \times 1 \times 364 = 144$, d'où $x = \frac{40-12}{2} = 14$ ou $x = \frac{40+12}{2} = 26$. Lucas a tort : il faut fabriquer 14 ou 26 bougies.

Ex. 46 ★★★ **L'enclos adossé au mur**

(a) Le grillage couvre les deux côtés de longueur x et le côté parallèle au mur, donc ce côté mesure $36 - 2x$ m. Ce sont des longueurs, donc $x > 0$ et $36 - 2x > 0$, soit $x < 18$. Ainsi $x \in]0\,;18[$.

(b) $A(x) = x(36 - 2x) = -2x^2 + 36x$ (en m²).

(c) $A(x) = -2(x^2 - 18x) = -2\left[(x-9)^2 - 81\right] = -2(x-9)^2 + 162$. Comme $a = -2 < 0$, A admet un maximum $\beta = 162$, atteint en $\alpha = 9$, qui appartient bien à $]0\,;18[$. Le côté parallèle au mur mesure alors $36 - 2 \times 9 = 18$ m. L'aire maximale vaut 162 m², pour un enclos de 9 m sur 18 m.

(d) $-2x^2 + 36x = 160 \iff -2x^2 + 36x - 160 = 0 \iff x^2 - 18x + 80 = 0$. $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 80 = 324 - 320 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$. $x_1 = \frac{18-2}{2} = 8$ et $x_2 = \frac{18+2}{2} = 10$, toutes deux dans $]0\,;18[$. L'enclos mesure 8 m sur 20 m ou 10 m sur 16 m.

(e) Il a tort. Première façon : l'aire maximale vaut 162 m² et $170 > 162$. Deuxième façon : $-2x^2 + 36x = 170 \iff x^2 - 18x + 85 = 0$, et $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 85 = 324 - 340 = -16 < 0$: pas de solution réelle. On ne peut donc pas obtenir 170 m².

Ex. 47 ★★★ **Les sorties à vélo**

(a) $t_1 = \frac{60}{v}$ et $t_2 = \frac{60}{v+5}$ (en h). Les valeurs interdites sont 0 et -5 ; comme v est une vitesse, on prend $v > 0$.

(b) $\frac{60}{v} - \frac{60}{v+5} = 1$. Pour $v > 0$, on multiplie par $v(v+5) \neq 0$: $60(v+5) - 60v = v(v+5)$, soit $300 = v^2 + 5v$, c'est-à-dire $v^2 + 5v - 300 = 0$.

Ex. 47 **(suite)**

(c) $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-300) = 25 + 1200 = 1225$, $\sqrt{\Delta} = 35$. $v_1 = \frac{-5-35}{2} = -20$, rejetée car $v > 0$; $v_2 = \frac{-5+35}{2} = 15$. Vérification : $\frac{60}{15} - \frac{60}{20} = 4 - 3 = 1$. Léna roule à 15 km/h et sa sortie dure 4 h.

(d) Il faut $u > 0$ et $u - 10 > 0$, donc $u > 10$. Équation : $\frac{60}{u} + \frac{60}{u-10} = 5$. On multiplie par $u(u-10) \neq 0$: $60(u-10) + 60u = 5u(u-10)$, soit $5u^2 - 170u + 600 = 0$, puis $u^2 - 34u + 120 = 0$. $\Delta = (-34)^2 - 4 \times 1 \times 120 = 1156 - 480 = 676$, $\sqrt{\Delta} = 26$. $u_1 = \frac{34-26}{2} = 4$, rejetée car $4 < 10$; $u_2 = \frac{34+26}{2} = 30$. Vérification : $2 + 3 = 5$. Léna roule à 30 km/h à l'aller et à 20 km/h au retour.

Ex. 48 ★★★ **Défis d'entiers consécutifs**

(a) Soit n le plus petit, entier naturel ; l'autre est $n+1$. $n(n+1) - [n + (n+1)] = 271 \iff n^2 - n - 272 = 0$. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-272) = 1089$, $\sqrt{\Delta} = 33$. $n_1 = \frac{1-33}{2} = -16$, rejetée car n est naturel ; $n_2 = \frac{1+33}{2} = 17$. Les deux entiers sont 17 et 18 : $306 - 35 = 271$.

(b) Soit n un entier : $n(n+1) = 2026 \iff n^2 + n - 2026 = 0$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2026) = 8105$. Or $90^2 = 8100$ et $91^2 = 8281$: 8105 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{8105}$ est irrationnel. Les racines $\frac{-1-\sqrt{8105}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{8105}}{2}$ ne sont pas entières : aucun couple ne convient.

(c) Les entiers sont $n-1$, n, $n+1$ avec n relatif. $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$. $3n^2 + 2 = 365 \iff n^2 = 121 \iff n = -11$ ou $n = 11$ (ici $b = 0$, pas besoin de Δ). Les triplets sont $10, 11, 12$ et $-12, -11, -10$.

(d) Soit n le plus petit, entier naturel : $n^2 + (n+1)^2 = 365 \iff 2n^2 + 2n - 364 = 0 \iff n^2 + n - 182 = 0$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-182) = 729$, $\sqrt{\Delta} = 27$. $n_1 = \frac{-1-27}{2} = -14$, rejetée car n est naturel ; $n_2 = \frac{-1+27}{2} = 13$. Les entiers sont 13 et 14 : $169 + 196 = 365$.