Problèmes du second degré – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Second degré · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Une solution doit avoir un sens : une longueur, une durée, une quantité sont positives ; on écarte la racine négative en le disant.
- Le maximum d'un trinôme est atteint en $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; la valeur maximale est $f(\alpha)$, pas α.
- « Toucher le sol » se traduit par $h(t) = 0$, et non par $t = 0$ (c'est l'instant du départ).
- Position de deux courbes : on étudie le signe de $f(x) - g(x)$, dans cet ordre.
- Un point d'intersection a deux coordonnées : après l'abscisse, on calcule l'ordonnée.
- Avant de calculer Δ, on écrit l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice 1 – Le potager contre le mur ★

Avec 20 m de grillage, on clôture un potager rectangulaire adossé à un mur : le mur ferme un côté, le grillage les trois autres. On note x la longueur (en m) de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprime la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x. Pourquoi a-t-on $0 < x < 10$?
2. Montre que l'aire du potager est $A(x) = -2x^2 + 20x$.
3. Pour quelles valeurs de x l'aire vaut-elle 42 m² ? Donne les dimensions du potager.
4. Quelle est l'aire maximale ? Pour quelles dimensions ?

Exercice 2 – Le rectangle mystère ★

Un rectangle a pour périmètre 34 cm et pour aire 60 cm². On cherche ses dimensions L et ℓ.

1. Justifie que $L + \ell = 17$ et $L \times \ell = 60$.
2. Déduis-en que L et ℓ sont les solutions de $x^2 - 17x + 60 = 0$.
3. Calcule les dimensions du rectangle.

Exercice 3 – Le dégagement du gardien ★

Un gardien dégage le ballon. Sa hauteur (en m) au bout de t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t$.

1. Calcule la hauteur du ballon au bout d'une seconde.
2. Au bout de combien de temps le ballon retombe-t-il au sol ?
3. Quelle hauteur maximale atteint-il, et à quel instant ?

Exercice 4 – Deux entiers consécutifs ★

Le produit de deux entiers consécutifs vaut 156. On note n le plus petit des deux.

1. Montre que $n^2 + n - 156 = 0$.
2. Résous cette équation.
3. Quels sont les couples d'entiers qui conviennent ?

Exercice 5 – Le bénéfice de l'atelier ★★

Un atelier fabrique et vend entre 0 et 60 lampes par mois. Pour x lampes, le bénéfice (en euros) est $B(x) = -x^2 + 80x - 1\,200$.

1. Calcule $B(10)$ et interprète le résultat.
2. Pour quelles quantités l'atelier est-il rentable, c'est-à-dire $B(x) \geqslant 0$?
3. Quel est le bénéfice maximal ? Pour combien de lampes ?
4. Pour quelles quantités le bénéfice atteint-il au moins 300 € ?

Exercice 6 – Le cadre photo ★★

Une photo de 20 cm sur 30 cm est entourée d'un cadre de largeur constante x (en cm). On veut que le cadre seul ait la même aire que la photo.

1. Exprime les dimensions extérieures du cadre en fonction de x.
2. Montre que l'aire du cadre seul est $A(x) = 4x^2 + 100x$.
3. Montre que le problème revient à résoudre $x^2 + 25x - 150 = 0$.
4. Résous cette équation et conclus.

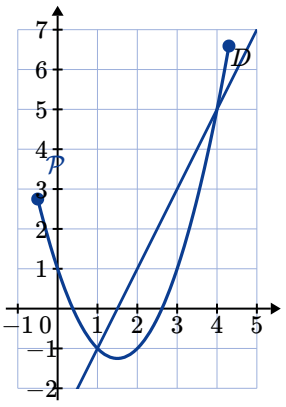
Exercice 7 – Le plongeur ★★

Un plongeur s'élance d'un plongeoir. Sa hauteur au-dessus de l'eau (en m) au bout de t secondes est $h(t) = -5t^2 + 5t + 10$, pour $t \geqslant 0$.

1. À quelle hauteur se trouve le plongeoir ?
2. Quelle hauteur maximale le plongeur atteint-il ?
3. Au bout de combien de temps entre-t-il dans l'eau ?
4. Pendant combien de temps est-il plus haut que le plongeoir ?

Exercice 8 – La parabole et la droite ★★

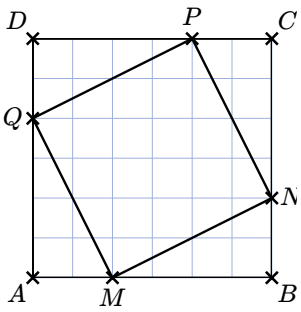
On a tracé ci-contre la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 3x + 1$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.



1. Lis graphiquement les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et D.
2. Démontre ce résultat par le calcul.
3. Étudie la position relative de $\mathcal{P}$ et D.
4. Pour $x \in [1\,;\,4]$, l'écart vertical entre D et $\mathcal{P}$ vaut $d(x) = (2x - 3) - (x^2 - 3x + 1)$. Pour quelle valeur de x est-il le plus grand ?

Exercice 9 – Le carré dans le carré ★★★

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. On place M sur $[AB]$, N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ = x$, avec $0 \leqslant x \leqslant 6$. La figure est faite pour $x = 2$. $MNPQ$ est un carré, d'aire notée $A(x)$.



1. Montre que $A(x) = 2x^2 - 12x + 36$.
2. Pour quelle valeur de x l'aire de $MNPQ$ est-elle minimale ? Que vaut-elle ?
3. Pour quelles valeurs de x l'aire de $MNPQ$ est-elle au plus 20 cm² ?

Exercice 10 – Le tir au panier ★★★

Une joueuse tire au panier. La hauteur du ballon (en m) en fonction de la distance horizontale x (en m) parcourue depuis la joueuse est $h(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2x + 2$.

1. À quelle hauteur le ballon quitte-t-il les mains de la joueuse ?
2. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?
3. Le panier est à 3 m de haut, à 5 m de la joueuse (horizontalement). Le tir est-il réussi ?
4. Si le ballon n'était pas arrêté, à quelle distance de la joueuse toucherait-il le sol ? Donne la valeur exacte, puis arrondie au centimètre.

Exercice 11 – Le trajet à vélo ★★★

Un cycliste parcourt 60 km à vitesse constante v (en km/h). S'il roulait 3 km/h plus vite, il mettrait 1 heure de moins.

1. Exprime, en fonction de v, la durée du trajet à la vitesse v, puis à la vitesse $v + 3$.
2. Montre que v vérifie $v^2 + 3v - 180 = 0$.
3. Résous cette équation et donne la vitesse du cycliste.
4. Combien de temps dure son trajet ? Vérifie l'énoncé.

Exercice 12 – Trouve l'erreur ★★

Chaque conclusion d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) Plongeon : $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$. « $h(t) = 0$ pour $t = -1$ et $t = 3$: le plongeur touche l'eau au bout de -1 s et de 3 s. »

b) Bénéfice : $B(x) = -2x^2 + 40x - 150$. « $\alpha = -\dfrac{40}{2 \times (-2)} = 10$, donc le bénéfice maximal vaut 10 €. »

c) Aire : « $x(12 - x) = 35 \iff x = 35$ ou $12 - x = 35$. »

d) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 4x - 3$. « $g(x) - f(x) = -x^2 + 4x - 3 > 0$ sur $]1\,;\,3[$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]1\,;\,3[$. »

e) « Les courbes d'équations $y = x^2 - 1$ et $y = x + 5$ se coupent aux points -2 et 3. »

f) « Deux nombres de somme 9 et de produit 20 sont les solutions de $x^2 + 9x + 20 = 0$: ce sont -4 et -5. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Un rectangle a pour périmètre 26 m et pour aire 40 m². Ses dimensions sont :

   A 4 m et 10 m **B** 6 m et 7 m **C** 5 m et 8 m **D** 2 m et 20 m

2. Le bénéfice $B(x) = -x^2 + 50x - 400$ est maximal pour :

   A $x = 25$ **B** $x = 50$ **C** $x = 225$ **D** $x = -25$

3. Une balle a pour hauteur $h(t) = -5t^2 + 15t$ (en m, t en s). Elle retombe au sol au bout de :

   A 0 s **B** 1,5 s **C** 15 s **D** 3 s

4. La parabole $y = x^2 + 1$ et la droite $y = 2x$:

   A n'ont aucun point commun **B** ont un seul point commun, $(1\,;\,2)$ **C** ont deux points communs **D** ont un seul point commun, $(1\,;\,0)$

5. La parabole $y = -x^2 + 3$ est strictement au-dessus de la droite $y = 2$ sur :

   A $]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$ **B** $]-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}[$ **C** $]1\,;\,+\infty[$ **D** $]-1\,;\,1[$

6. Une longueur x (en cm) vérifie $x^2 + 2x - 24 = 0$. Alors :

A $x = 4$ **B** $x = -6$ ou $x = 4$ **C** $x = 6$ **D** $x = -6$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).