Corrigé – Problèmes du second degré

Mathématiques – Première spécialité

Second degré · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Le potager contre le mur ★

1. Le grillage fait deux côtés de longueur x et un côté parallèle au mur : ce côté mesure $20 - 2x$.
   Les longueurs sont positives : $x > 0$ et $20 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < 10$.

2. Aire d'un rectangle = longueur × largeur :
   $$\begin{aligned} A(x) &= x\,(20 - 2x) \\ &= x \times 20 - x \times 2x \\ &= -2x^2 + 20x \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} & -2x^2 + 20x = 42 \\ \iff\ & -2x^2 + 20x - 42 = 0 \quad \textit{(on retranche } 42\textit{)} \\ \iff\ & x^2 - 10x + 21 = 0 \quad \textit{(on divise par } -2\textit{)} \end{aligned}$$

   $a = 1$, $b = -10$, $c = 21$.
   $$\begin{aligned} \Delta &= (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 \\ &= 100 - 84 \\ &= 16 \end{aligned}$$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$.
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 4}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 4}{2 \times 1} = \frac{14}{2} = 7$$
   Les deux valeurs sont dans $]0\,;\,10[$: elles conviennent.
   Pour $x = 3$: potager de 3 m sur $20 - 6 = 14$ m.
   Pour $x = 7$: potager de 7 m sur $20 - 14 = 6$ m.

4. $a = -2 < 0$: l'aire est maximale au sommet de la parabole.
   $$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{20}{2 \times (-2)} \\ &= 5 \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} A(5) &= -2 \times 5^2 + 20 \times 5 \\ &= -50 + 100 \\ &= 50 \end{aligned}$$
   L'aire maximale est 50 m², pour un potager de 5 m sur $20 - 10 = 10$ m.

Exercice 2 – Le rectangle mystère ★

1. Périmètre : $2(L + \ell) = 34$, donc $L + \ell = 17$.
   Aire : $L \times \ell = 60$.

2. Deux nombres de somme s et de produit p sont les solutions de $x^2 - sx + p = 0$.
   Ici $s = 17$ et $p = 60$: $x^2 - 17x + 60 = 0$.

3. $a = 1, b = -17, c = 60$.
   $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 1 \times 60$
   $= 289 - 240$
   $= 49$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-17) - 7}{2 \times 1} = \dfrac{10}{2} = 5$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-17) + 7}{2 \times 1} = \dfrac{24}{2} = 12$
   Le rectangle mesure 12 cm sur 5 cm.
   Contrôle : $2 \times (12 + 5) = 34$ et $12 \times 5 = 60$.

Exercice 3 – Le dégagement du gardien ★

1. $h(1) = -5 \times 1^2 + 20 \times 1$
   $= -5 + 20$
   $= 15$
   Au bout d'une seconde, le ballon est à 15 m de haut.

2. Le ballon est au sol quand $h(t) = 0$:
   $-5t^2 + 20t = 0$
   $\iff -5t\,(t - 4) = 0$ *(on factorise par $-5t$)*
   $\iff t = 0$ ou $t = 4$ *(produit nul)*

   $t = 0$ est l'instant du dégagement.
   Le ballon retombe au bout de 4 secondes.

3. $a = -5 < 0$: le maximum est atteint au sommet.
   $\alpha = -\dfrac{20}{2 \times (-5)}$
   $= 2$
   $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2$
   $= -20 + 40$
   $= 20$
   Le ballon monte jusqu'à 20 m, au bout de 2 secondes.

Exercice 4 – Deux entiers consécutifs ★

1. Le suivant est $n + 1$, et leur produit vaut 156 :
   $n\,(n + 1) = 156$
   $\iff n^2 + n = 156$ *(on développe)*
   $\iff n^2 + n - 156 = 0$ *(on retranche 156)*

2. $a = 1, b = 1, c = -156$.
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-156)$
   $= 1 + 624$
   $= 625$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$.
   $n_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 25}{2 \times 1} = \dfrac{-26}{2} = -13$
   $n_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + 25}{2 \times 1} = \dfrac{24}{2} = 12$

3. Les deux solutions sont des entiers, elles conviennent toutes les deux.
   Si $n = 12$: les entiers 12 et 13 ($12 \times 13 = 156$).
   Si $n = -13$: les entiers -13 et -12 ($(-13) \times (-12) = 156$).

Exercice 5 – Le bénéfice de l'atelier ★★

1. $B(10) = -10^2 + 80 \times 10 - 1200$
   $= -100 + 800 - 1200$
   $= -500$
   Le bénéfice est négatif : avec 10 lampes, l'atelier perd 500 €.

2. $a = -1, b = 80, c = -1200$.
   $\Delta = 80^2 - 4 \times (-1) \times (-1200)$
   $= 6400 - 4800$
   $= 1600$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1600} = 40$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-80 - 40}{2 \times (-1)} = \dfrac{-120}{-2} = 60$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-80 + 40}{2 \times (-1)} = \dfrac{-40}{-2} = 20$
   $a = -1$ est négatif : le trinôme est négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles, nul en 20 et en 60.
   Inégalité large : racines incluses.
   $S = [20\,;\,60]$
   L'intervalle est bien dans $[0\,;\,60]$: l'atelier est rentable entre 20 et 60 lampes.

3. $a = -1 < 0$: maximum au sommet.
   $\alpha = -\dfrac{80}{2 \times (-1)}$
   $= 40$
   $B(40) = -40^2 + 80 \times 40 - 1200$
   $= -1600 + 3200 - 1200$
   $= 400$
   Le bénéfice maximal est 400 €, pour 40 lampes.

4. $-x^2 + 80x - 1200 \geqslant 300$
   $\iff -x^2 + 80x - 1500 \geqslant 0$ *(on retranche* 300*)*

   $a = -1$, $b = 80$, $c = -1500$.
   $\Delta = 80^2 - 4 \times (-1) \times (-1500)$
   $= 6400 - 6000$
   $= 400$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-80 - 20}{2 \times (-1)} = \dfrac{-100}{-2} = 50$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-80 + 20}{2 \times (-1)} = \dfrac{-60}{-2} = 30$
   $a = -1$ est négatif : le trinôme est négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles, nul en 30 et en 50.
   $S = [30\,;\,50]$
   Le bénéfice atteint au moins 300 € pour 30 à 50 lampes.

Exercice 6 – Le cadre photo ★★

1. Le cadre ajoute x de chaque côté, donc $2x$ sur chaque dimension : $20 + 2x$ et $30 + 2x$.

2. Aire du cadre = aire extérieure − aire de la photo :
   $A(x) = (20 + 2x)(30 + 2x) - 20 \times 30$
   $= 600 + 40x + 60x + 4x^2 - 600$
   $= 4x^2 + 100x$

3. On veut $A(x) = 600$ (aire de la photo) :
   $4x^2 + 100x = 600$
   $\iff 4x^2 + 100x - 600 = 0$ *(on retranche* 600*)*
   $\iff x^2 + 25x - 150 = 0$ *(on divise par* 4*)*

4. $a = 1$, $b = 25$, $c = -150$.
   $\Delta = 25^2 - 4 \times 1 \times (-150)$
   $= 625 + 600$
   $= 1225$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1225} = 35$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-25 - 35}{2 \times 1} = \dfrac{-60}{2} = -30$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-25 + 35}{2 \times 1} = \dfrac{10}{2} = 5$
   x est une largeur : on écarte -30.
   Le cadre doit avoir 5 cm de large ; il mesure alors 30 cm sur 40 cm à l'extérieur.

Exercice 7 – Le plongeur ★★

1. Au départ, $t = 0$: $h(0) = 10$.
   Le plongeoir est à 10 m de haut.

2. $a = -5 < 0$: maximum au sommet.
   $\alpha = -\dfrac{5}{2 \times (-5)}$
   $= \dfrac{1}{2}$
   $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = -5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \dfrac{1}{2} + 10$
   $= -\dfrac{5}{4} + \dfrac{10}{4} + \dfrac{40}{4}$
   $= \dfrac{45}{4}$
   Il monte jusqu'à $\dfrac{45}{4} = 11{,}25$ m, au bout d'une demi-seconde.

3. Il entre dans l'eau quand $h(t) = 0$:
   $-5t^2 + 5t + 10 = 0$
   $\iff t^2 - t - 2 = 0$ *(on divise par -5)*

   $a = 1, b = -1, c = -2$.
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$
   $= 1 + 8$
   $= 9$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.
   $t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) - 3}{2 \times 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$
   $t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) + 3}{2 \times 1} = \dfrac{4}{2} = 2$
   On a $t \geqslant 0$: on écarte -1.
   Il entre dans l'eau au bout de 2 secondes.

4. On résout $h(t) > 10$:
   $-5t^2 + 5t + 10 > 10$
   $\iff -5t^2 + 5t > 0$ *(on retranche 10)*
   $\iff -5t\,(t - 1) > 0$ *(on factorise par $-5t$)*

   Racines 0 et 1, $a = -5 < 0$: positif entre les racines.
   $S =]0\,;\,1[$
   Il est plus haut que le plongeoir pendant 1 seconde.

Exercice 8 – La parabole et la droite ★★

1. On repère les deux points où la droite coupe la parabole, puis on lit leurs coordonnées sur le quadrillage : $(1\,;\,-1)$ et $(4\,;\,5)$.

2. Les abscisses des points communs vérifient :
$x^2 - 3x + 1 = 2x - 3$
$\iff x^2 - 5x + 4 = 0$ *(on retranche $2x - 3$)*

$a = 1, b = -5, c = 4.$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4$
$= 25 - 16$
$= 9$
$\Delta > 0$: deux racines.
On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3.$
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) - 3}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) + 3}{2 \times 1} = \dfrac{8}{2} = 4$
On calcule les ordonnées avec l'équation de D :
$y = 2 \times 1 - 3$
$= -1$
$y = 2 \times 4 - 3$
$= 5$
Les points d'intersection sont $(1\,;\,-1)$ et $(4\,;\,5)$.

3. $\left(x^2 - 3x + 1\right) - (2x - 3)$
$= x^2 - 3x + 1 - 2x + 3$
$= x^2 - 5x + 4$
Racines 1 et 4 (question 2), $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur des racines, négatif entre.
$\mathcal{P}$ est au-dessus de D sur $]-\infty\,;\,1[\cup]4\,;\,+\infty[$ et en dessous sur $]1\,;\,4[$.

4. $d(x) = (2x - 3) - \left(x^2 - 3x + 1\right)$
$= 2x - 3 - x^2 + 3x - 1$
$= -x^2 + 5x - 4$
$a = -1 < 0$: maximum au sommet.
$\alpha = -\dfrac{5}{2 \times (-1)}$
$= \dfrac{5}{2}$
$d\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \dfrac{5}{2} - 4$
$= -\dfrac{25}{4} + \dfrac{50}{4} - \dfrac{16}{4}$
$= \dfrac{9}{4}$
L'écart est le plus grand pour $x = \dfrac{5}{2}$; il vaut alors $\dfrac{9}{4}$.

Exercice 9 – Le carré dans le carré ★★★

1. On retire au grand carré les quatre triangles rectangles des coins.

   Le triangle MBN est rectangle en B, avec $MB = 6 - x$ et $BN = x$: son aire vaut $\dfrac{x(6-x)}{2}$.

   Les quatre triangles sont identiques.

   $$\begin{aligned} A(x) &= 36 - 4 \times \frac{x\,(6-x)}{2} \\ &= 36 - 2x\,(6-x) \\ &= 36 - 12x + 2x^2 \\ &= 2x^2 - 12x + 36 \end{aligned}$$

2. $a = 2 > 0$: minimum au sommet.

   $$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{-12}{2 \times 2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} A(3) &= 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 36 \\ &= 18 - 36 + 36 \\ &= 18 \end{aligned}$$

   L'aire est minimale pour $x = 3$ (M, N, P, Q sont alors les milieux des côtés) ; elle vaut 18 cm², la moitié du grand carré.

3. $$\begin{aligned} & 2x^2 - 12x + 36 \leqslant 20 \\ \iff\ & 2x^2 - 12x + 16 \leqslant 0 \quad \textit{(on retranche } 20\textit{)} \\ \iff\ & x^2 - 6x + 8 \leqslant 0 \quad \textit{(on divise par } 2 > 0\textit{)} \end{aligned}$$

   $a = 1, b = -6, c = 8$.

   $$\begin{aligned} \Delta &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 \\ &= 36 - 32 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   $\Delta > 0$: deux racines.

   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$.

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - 2}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + 2}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$$

   $a = 1$ est positif : le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles, nul en 2 et en 4.

   Inégalité large : racines incluses.

   $$S = [2\,;\,4]$$

   Cet intervalle est bien dans $[0\,;\,6]$: l'aire est au plus 20 cm² pour x entre 2 et 4 cm.

Exercice 10 – Le tir au panier ★★★

1. Au départ, $x = 0$: $h(0) = 2$.

   Le ballon part à 2 m de haut.

2. $a = -0{,}2 < 0$: maximum au sommet.
   $\alpha = -\dfrac{1{,}2}{2 \times (-0{,}2)}$
   $= -\dfrac{1{,}2}{-0{,}4}$
   $= 3$
   $h(3) = -0{,}2 \times 3^2 + 1{,}2 \times 3 + 2$
   $= -1{,}8 + 3{,}6 + 2$
   $= 3{,}8$
   Le ballon monte jusqu'à 3,8 m, à 3 m de la joueuse.

3. $h(5) = -0{,}2 \times 5^2 + 1{,}2 \times 5 + 2$
   $= -5 + 6 + 2$
   $= 3$
   À 5 m de la joueuse, le ballon est à 3 m de haut : il passe par le panier, le tir est réussi.

4. On résout $h(x) = 0$:
   $-0{,}2x^2 + 1{,}2x + 2 = 0$
   $\iff x^2 - 6x - 10 = 0$ *(on multiplie par -5)*

   $a = 1$, $b = -6$, $c = -10$.
   $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-10)$
   $= 36 + 40$
   $= 76$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) - 2\sqrt{19}}{2 \times 1} = \dfrac{6 - 2\sqrt{19}}{2} = 3 - \sqrt{19}$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) + 2\sqrt{19}}{2 \times 1} = \dfrac{6 + 2\sqrt{19}}{2} = 3 + \sqrt{19}$
   $3 - \sqrt{19} < 0$ *: une distance négative n'a pas de sens, on l'écarte.*
   Le ballon toucherait le sol à $3 + \sqrt{19} \approx 7{,}36$ m de la joueuse.

Exercice 11 – Le trajet à vélo ★★★

1. Durée = distance ÷ vitesse : $\dfrac{60}{v}$ heures à la vitesse v, et $\dfrac{60}{v+3}$ heures à la vitesse $v + 3$.

2. La deuxième durée est plus courte d'une heure : $\dfrac{60}{v} - \dfrac{60}{v+3} = 1$, avec $v > 0$.
   $\dfrac{60}{v} - \dfrac{60}{v+3} = 1$
   $\iff 60(v+3) - 60v = v(v+3)$ *(on multiplie par $v(v+3) > 0$)*
   $\iff 180 = v^2 + 3v$ *(on développe et on réduit)*
   $\iff v^2 + 3v - 180 = 0$ *(on passe tout à gauche)*

3. $a = 1$, $b = 3$, $c = -180$.
   $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-180)$
   $= 9 + 720$
   $= 729$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{729} = 27$.
   $v_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 27}{2 \times 1} = \dfrac{-30}{2} = -15$
   $v_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 27}{2 \times 1} = \dfrac{24}{2} = 12$
   Une vitesse est positive : on écarte -15.
   Le cycliste roule à 12 km/h.

4. durée $= \dfrac{60}{12}$
   $= 5$
   Le trajet dure 5 heures.
   Contrôle : à 15 km/h, il durerait $\dfrac{60}{15} = 4$ heures, soit bien 1 heure de moins.

Exercice 12 – Trouve l'erreur ★★

Chaque conclusion d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *Un temps est positif :* $t = -1$ *n'a pas de sens ici.*
Le plongeur touche l'eau une seule fois, au bout de 3 secondes.

b) α *est la quantité qui donne le maximum ; le bénéfice maximal est* $B(\alpha)$.
$B(10) = -2 \times 10^2 + 40 \times 10 - 150$
$= -200 + 400 - 150$
$= 50$
Le bénéfice maximal vaut 50 €, pour 10 objets.

c) *La règle du produit nul ne marche qu'avec* 0 *dans le membre de droite.*
$x\,(12 - x) = 35$
$\iff -x^2 + 12x - 35 = 0$ *(on développe et on retranche* 35*)*
$\iff x^2 - 12x + 35 = 0$ *(on multiplie par* -1*)*
$\iff (x - 5)\,(x - 7) = 0$ *(*$5 + 7 = 12$ *et* $5 \times 7 = 35$*)*
$S = \{5\,;\,7\}$

d) $g(x) - f(x) > 0$ *signifie* $g(x) > f(x)$ *: c'est* $\mathcal{C}_g$ *qui est au-dessus.*
Sur $]1\,;\,3[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$; elle est au-dessus à l'extérieur de $[1\,;\,3]$.

e) -2 *et* 3 *sont les abscisses ; un point a aussi une ordonnée.*
$y = -2 + 5$
$= 3$
$y = 3 + 5$
$= 8$
Les points d'intersection sont $(-2\,;\,3)$ et $(3\,;\,8)$.

f) *L'équation est* $x^2 - sx + p = 0$ *:* $-9x$*, et non* $+9x$*.*
$x^2 - 9x + 20 = 0$
$\iff (x-4)(x-5) = 0$ *(*$4+5=9$ *et* $4\times 5 = 20$*)*
$S = \{4\,;\,5\}$

Les nombres sont 4 et 5.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un rectangle a pour périmètre 26 m et pour aire 40 m². Ses dimensions sont :

Réponse C : 5 m et 8 m
Somme 13 et produit 40 : solutions de $x^2 - 13x + 40 = 0$, soit 5 et 8.

2. Le bénéfice $B(x) = -x^2 + 50x - 400$ est maximal pour :

Réponse A : $x = 25$
$\alpha = -\dfrac{50}{2\times(-1)} = 25$; 225 est la valeur du bénéfice maximal, pas la quantité.

3. Une balle a pour hauteur $h(t) = -5t^2 + 15t$ (en m, t en s). Elle retombe au sol au bout de :

Réponse D : 3 s
$-5t(t-3) = 0$: $t = 0$ est le départ, la balle retombe à $t = 3$.

4. La parabole $y = x^2 + 1$ et la droite $y = 2x$:

Réponse B : ont un seul point commun, $(1\,;\,2)$
$x^2 + 1 = 2x \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$, et $y = 2\times 1 = 2$.

5. La parabole $y = -x^2 + 3$ est strictement au-dessus de la droite $y = 2$ sur :

Réponse D : $]-1\,;\,1[$
$-x^2 + 3 - 2 = 1 - x^2 > 0$ entre les racines -1 et 1.

6. Une longueur x (en cm) vérifie $x^2 + 2x - 24 = 0$. Alors :

Réponse A : $x = 4$
Les solutions sont -6 et 4 ; une longueur est positive, donc $x = 4$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).