Représentations paramétriques – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Droites de l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Les constantes donnent un point ; les coefficients du paramètre donnent un vecteur directeur.
- Une coordonnée constante ($z = 4$) donne un 0 dans le vecteur directeur.
- Un point est sur la droite si le même paramètre vérifie les trois équations : deux ne suffisent pas.
- Deux droites : deux paramètres différents, t et s.
- Non parallèles ne veut pas dire sécantes : elles peuvent être non coplanaires.
- Une représentation n'est pas unique : on compare les vecteurs directeurs et un point, pas les écritures.

Exercice 1 – Lire un point et un vecteur directeur ★

Donne un point et un vecteur directeur de la droite (sauf consigne différente).

a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

d) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

e) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$: donne les points de paramètres $t = 2$ et $t = -1$.

f) $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{2}t \\ y = -\dfrac{1}{3}t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$: donne un point, puis un vecteur directeur à coordonnées entières.

g) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -2t \\ z = 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

h) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$: quel est le point de la droite d'abscisse 7 ?

Exercice 2 – Écrire une représentation paramétrique ★

Écris une représentation paramétrique de la droite décrite.

a) La droite passant par $A(2\,;\,-1\,;\,0)$ dirigée par $\vec{u}\,(3\,;\,1\,;\,-2)$.

b) La droite passant par $K(0\,;\,0\,;\,5)$ dirigée par $\vec{w}\,(1\,;\,-1\,;\,0)$.

c) La droite (AB) avec $A(1\,;\,2\,;\,-3)$ et $B(4\,;\,0\,;\,1)$.

d) La droite (CD) avec $C(-2\,;\,5\,;\,1)$ et $D(-2\,;\,1\,;\,3)$.

e) La droite passant par $E(3\,;\,-1\,;\,2)$ et parallèle à l'axe des cotes.

f) La droite passant par $F(1\,;\,0\,;\,-4)$ et parallèle à $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

g) $ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D) muni du repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. La droite (DF).

h) Dans le même cube, la droite (BG).

Exercice 3 – Le point est-il sur la droite ? ★

On donne $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, $d_2 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d_3 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Réponds en cherchant un même t pour les trois coordonnées.

a) $M(5\,;\,1\,;\,1)$ et la droite d_1

b) $N(-3\,;\,-3\,;\,6)$ et la droite d_1

c) $P(6\,;\,2\,;\,-6)$ et la droite d_2

d) $Q(1\,;\,-2\,;\,9)$ et la droite d_2

e) $R(-1\,;\,\dfrac{13}{3}\,;\,\dfrac{7}{3})$ et la droite d_3

f) $T(7\,;\,-1\,;\,12)$ et la droite d_3

g) $A(2\,;\,0\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,2\,;\,1)$: le point $U(5\,;\,6\,;\,5)$ est-il sur la droite (AB) ?

h) Trouve a et b pour que $K(a\,;\,b\,;\,7)$ soit sur d_1.

Exercice 4 – Parallèles : strictement ou confondues ? ★★

Montre que les droites sont parallèles, puis dis si elles sont confondues ou strictement parallèles.

a) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 5 - 4s \\ y = 2s \\ z = 6 - 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

b) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 4 + 6s \\ z = -2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

c) $d : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 4s \\ z = 4 - 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

d) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 1 - 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

e) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = -3s \\ y = -3 - 3s \\ z = 8 + 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

Exercice 5 – Droites sécantes : le point d'intersection ★★

Montre que les droites sont sécantes et calcule les coordonnées de leur point d'intersection I.

a) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 5 + 2s \\ y = 3 + s \\ z = 1 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

b) $d : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 5 - 3s \\ z = 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

c) $d : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 + 2s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

d) $d : \begin{cases} x = t \\ y = -7 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 4 + 2s \\ y = -4 - s \\ z = 3 + 3s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

e) $ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D) muni du repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. J est le milieu de $[GH]$. Les droites (AJ) et (BH) : $d : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

Exercice 6 – Étudier la position relative ★★

Les droites sont-elles confondues, strictement parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifie.

a) $d : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

b) $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = -1 + s \\ z = -1 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

c) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = -2s \\ y = 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

d) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + s \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

e) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = s \\ y = m \\ z = 4 - 2s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$: trouve m pour que d et d' soient sécantes.

Exercice 7 – Les droites du cube ★★★

$ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D) muni du repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note t le paramètre de la première droite et s celui de la seconde.

1. Écris une représentation paramétrique de (AG) et de (EC).
2. Montre que (AG) et (EC) sont sécantes et donne leur point d'intersection Ω.
3. Montre que (AF) et (DG) sont strictement parallèles.
4. Montre que (AF) et (EC) sont non coplanaires.

Exercice 8 – Deux drones ★★★

Dans un repère orthonormé (unité : le mètre), la position d'un drone D_1 à l'instant t (en secondes) est $(2t\,;\,1+t\,;\,12-t)$, celle d'un drone D_2 est $(1+t\,;\,4\,;\,4+t)$. Chaque drone se déplace en ligne droite.

1. Donne la position de chaque drone à l'instant $t = 0$ et un vecteur directeur de chaque trajectoire.
2. Les deux trajectoires se coupent-elles ? Utilise t pour D_1 et s pour D_2.
3. Les drones risquent-ils de se percuter ?
4. Un drone D_3 part de $C(1\,;\,0\,;\,0)$ dans la direction $\vec{w}\,(-4\,;\,-2\,;\,2)$. Sa trajectoire peut-elle croiser celle de D_1 ?

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ a pour vecteur directeur $(2\,;\,-1\,;\,4)$.

b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 \\ z = -2t \end{cases}$ a pour vecteur directeur $(1\,;\,1\,;\,-2)$.

c) $M(5\,;\,-3\,;\,3)$ et $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$: $5 = 3 + t$ donne $t = 2$, puis $1 - 2 \times 2 = -3$, donc $M \in d$.

d) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$: $1 + t = 4 - t$ donne $t = \dfrac{3}{2}$, puis $2t = 3$ et $3 + t = \dfrac{9}{2}$: pas de point commun.

e) d dirigée par $(1\,;\,0\,;\,1)$ passant par $O(0\,;\,0\,;\,0)$, d' dirigée par $(0\,;\,1\,;\,1)$ passant par $B(1\,;\,1\,;\,0)$: les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc d et d' sont sécantes.

f) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = 7 - 2s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$ n'ont pas la même écriture : ce sont deux droites différentes.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Un vecteur directeur de la droite $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est :

   A $(4\,;\,2\,;\,-1)$ **B** $(-1\,;\,3\,;\,-1)$ **C** $(-1\,;\,3\,;\,0)$ **D** $(1\,;\,3\,;\,0)$

2. Quel point est sur la droite $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$?

   A $(5\,;\,-2\,;\,5)$ **B** $(3\,;\,-1\,;\,5)$ **C** $(1\,;\,0\,;\,0)$ **D** $(2\,;\,-1\,;\,1)$

3. $A(1\,;\,0\,;\,-2)$ et $B(3\,;\,-1\,;\,2)$. Une représentation paramétrique de (AB) est :

   A $x = 3 + t,\ y = -1,\ z = 2 - 2t$ **B** $x = 2 + t,\ y = -1,\ z = 4 - 2t$

   C $x = 1 - 2t,\ y = t,\ z = -2 + 4t$ **D** $x = 1 + 2t,\ y = -t,\ z = -2 + 4t$

4. d est dirigée par $(1\,;\,2\,;\,-1)$, d' par $(-2\,;\,-4\,;\,2)$, et un point de d' n'est pas sur d. Les droites sont :

   A confondues **B** strictement parallèles **C** sécantes **D** non coplanaires

5. $d : x = t,\ y = 1 + t,\ z = 2t$ et $d' : x = 3 - s,\ y = s,\ z = s$. Les droites :

   A se coupent en $(0\,;\,1\,;\,0)$ **B** se coupent en $(3\,;\,0\,;\,0)$ **C** sont non coplanaires

   D se coupent en $(1\,;\,2\,;\,2)$

6. Deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles :

   A sont sécantes ou non coplanaires **B** sont toujours sécantes **C** sont toujours non coplanaires

   D sont toujours orthogonales

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).