Corrigé – Représentations paramétriques

Mathématiques – Terminale spécialité

Droites de l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Lire un point et un vecteur directeur ★

Donne un point et un vecteur directeur de la droite (sauf consigne différente).

a) Pour $t = 0$, on obtient le point $A(1\,;\,-3\,;\,4)$ (les constantes).
Les coefficients de t donnent un vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,-5)$.

b) Pour $t = 0$, on obtient le point $A(0\,;\,2\,;\,3)$ (les constantes).
Les coefficients de t donnent un vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;\,0\,;\,1)$.
$y = 2$ ne dépend pas de t : la coordonnée du vecteur est 0, pas 1 ni 2.

c) Pour $t = 0$, on obtient le point $A(-1\,;\,4\,;\,0)$ (les constantes).
Les coefficients de t donnent un vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-3\,;\,1)$.
L'ordre d'écriture ne change rien : dans $x = 2t - 1$, la constante est -1 et le coefficient de t est 2.

d) Pour $t = 0$, on obtient le point $A(5\,;\,1\,;\,-2)$ (les constantes).
Les coefficients de t donnent un vecteur directeur $\vec{u}\,(0\,;\,-1\,;\,0)$.
Deux coordonnées constantes : deux zéros dans le vecteur directeur.

e) Pour $t = 2$: $x = 3 - 2 = 1$, $y = 2 \times 2 = 4$, $z = 1 + 4 \times 2 = 9$, soit le point $(1\,;\,4\,;\,9)$.
Pour $t = -1$: $x = 3 - (-1) = 4$, $y = 2 \times (-1) = -2$, $z = 1 + 4 \times (-1) = -3$, soit le point $(4\,;\,-2\,;\,-3)$.

f) Pour $t = 0$: le point $(1\,;\,0\,;\,2)$.
Les coefficients de t : $\vec{u}\,\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,1\right)$.
Tout vecteur colinéaire non nul dirige aussi la droite : $6\vec{u}\,(3\,;\,-2\,;\,6)$ a des coordonnées entières.

g) Pour $t = 0$, on obtient le point $A(0\,;\,0\,;\,0)$ (les constantes).
Les coefficients de t donnent un vecteur directeur $\vec{u}\,(4\,;\,-2\,;\,6)$.
La droite passe par l'origine.
$\dfrac{1}{2}\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ est un vecteur directeur plus simple.

h) On résout $-1 + 2t = 7$: $2t = 8$, donc $t = 4$.
Puis $y = 3 - 4 = -1$ et $z = 2 \times 4 = 8$: le point est $(7\,;\,-1\,;\,8)$.

Exercice 2 – Écrire une représentation paramétrique ★

Écris une représentation paramétrique de la droite décrite.

a) Avec le point $(2\,;\,-1\,;\,0)$ et le vecteur $(3\,;\,1\,;\,-2)$:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t \end{cases}$$

b) Avec le point $(0\,;\,0\,;\,5)$ et le vecteur $(1\,;\,-1\,;\,0)$:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 \end{cases}$$
La cote est constante : $z = 5$ pour tout t.

c) (AB) passe par A et elle est dirigée par $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,-2\,;\,4)$ (arrivée moins départ).
Avec le point $(1\,;\,2\,;\,-3)$ et le vecteur $(3\,;\,-2\,;\,4)$:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

d) (CD) passe par C et elle est dirigée par $\overrightarrow{CD}\,(0\,;\,-4\,;\,2)$ (arrivée moins départ).
Avec le point $(-2\,;\,5\,;\,1)$ et le vecteur $(0\,;\,-4\,;\,2)$:
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 - 4t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
On pouvait aussi prendre $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}\,(0\,;\,-2\,;\,1)$ comme vecteur directeur.

e) L'axe des cotes est dirigé par $\vec{k}\,(0\,;\,0\,;\,1)$: une droite parallèle a le même vecteur directeur.
Avec le point $(3\,;\,-1\,;\,2)$ et le vecteur $(0\,;\,0\,;\,1)$:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$$

f) Deux droites parallèles ont le même vecteur directeur : celui de d est $(-1\,;\,3\,;\,2)$ (les coefficients de t).
On garde le point F, pas le point $(2\,;\,0\,;\,5)$ de d.
Avec le point $(1\,;\,0\,;\,-4)$ et le vecteur $(-1\,;\,3\,;\,2)$:
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

g) $D(0\,;\,1\,;\,0)$ et $F(1\,;\,0\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{DF}\,(1\,;\,-1\,;\,1)$.
Avec le point $(0\,;\,1\,;\,0)$ et le vecteur $(1\,;\,-1\,;\,1)$:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

h) $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{BG}\,(0\,;\,1\,;\,1)$.
Avec le point $(1\,;\,0\,;\,0)$ et le vecteur $(0\,;\,1\,;\,1)$:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$
L'abscisse est constante : $x = 1$ pour tout t (la droite est dans la face $BCGF$).

Exercice 3 – Le point est-il sur la droite ? ★

On donne $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, $d_2 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d_3 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Réponds en cherchant un même t pour les trois coordonnées.

a) On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de M.
Les abscisses : $1 + 2t = 5$, donc $t = 2$.
Les ordonnées : $-1 + 2 = 1$: c'est bien 1.
Les cotes : $3 - 2 = 1$: c'est bien 1.
Le même t convient pour les trois équations : $M \in d_1$.

b) On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de N.
Les abscisses : $1 + 2t = -3$, donc $t = -2$.
Les ordonnées : $-1 + (-2) = -3$: c'est bien -3.
Les cotes : $3 - (-2) = 5$, et $5 \neq 6$.
Pas de t commun : $N \notin d_1$.
Les deux premières coordonnées marchaient : seule la troisième décide.

c) On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de P.
Les abscisses : $4 - t = 6$, donc $t = -2$.
Les ordonnées : $y = 2$ pour tout t : c'est bien 2.
Les cotes : $3 \times (-2) = -6$: c'est bien -6.
Le même t convient pour les trois équations : $P \in d_2$.

d) On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de Q.
Les abscisses : $4 - t = 1$, donc $t = 3$.
Les ordonnées : $y = 2$ pour tout t, et $2 \neq -2$.
Pas de t commun : $Q \notin d_2$.

e) On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de R.
Les abscisses : $-2 + 3t = -1$, donc $t = \dfrac{1}{3}$.
Les ordonnées : $5 - 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{13}{3}$: c'est bien $\dfrac{13}{3}$.
Les cotes : $1 + 4 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$: c'est bien $\dfrac{7}{3}$.
Le même t convient pour les trois équations : $R \in d_3$.

f) On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de T.
Les abscisses : $-2 + 3t = 7$, donc $t = 3$.
Les ordonnées : $5 - 2 \times 3 = -1$: c'est bien -1.
Les cotes : $1 + 4 \times 3 = 13$, et $13 \neq 12$.
Pas de t commun : $T \notin d_3$.
$t = 3$ marche pour x et y, pas pour z.

g) $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,2\,;\,2)$, donc $(AB) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de U.

Les abscisses : $2 + t = 5$, donc $t = 3$.

Les ordonnées : $2 \times 3 = 6$: c'est bien 6.

Les cotes : $-1 + 2 \times 3 = 5$: c'est bien 5.

$t = 3$ convient partout : $U \in (AB)$.

h) On connaît la cote : $3 - t = 7$, donc $t = -4$.

Alors $a = 1 + 2 \times (-4) = -7$ et $b = -1 + (-4) = -5$.

Le point $K(-7\,;\,-5\,;\,7)$ est sur d_1.

Exercice 4 – Parallèles : strictement ou confondues ? ★★

Montre que les droites sont parallèles, puis dis si elles sont confondues ou strictement parallèles.

a) d est dirigée par $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et d' par $\vec{v}\,(-4\,;\,2\,;\,-6)$.

On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Les abscisses : $-4 = k \times 2$, donc $k = -2$.

Les ordonnées : $-2 \times (-1) = 2$: c'est bien 2.

Les cotes : $-2 \times 3 = -6$: c'est bien -6.

Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.

On teste le point $B(5\,;\,0\,;\,6)$ de d' sur d.

On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.

Les abscisses : $1 + 2t = 5$, donc $t = 2$.

Les ordonnées : $2 - 2 = 0$: c'est bien 0.

Les cotes : $3 \times 2 = 6$: c'est bien 6.

B est sur d : les droites sont confondues.

b) d est dirigée par $\vec{u}\,(1\,;\,3\,;\,-1)$ et d' par $\vec{v}\,(2\,;\,6\,;\,-2)$.

On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Les abscisses : $2 = k \times 1$, donc $k = 2$.

Les ordonnées : $2 \times 3 = 6$: c'est bien 6.

Les cotes : $2 \times (-1) = -2$: c'est bien -2.

Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.

On teste le point $B(2\,;\,4\,;\,0)$ de d' sur d.

On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.

Les abscisses : $t = 2$.

Les ordonnées : $1 + 3 \times 2 = 7$, et $7 \neq 4$.

B n'est pas sur d : les droites sont strictement parallèles.

c) d est dirigée par $\vec{u}\,(0\,;\,2\,;\,1)$ et d' par $\vec{v}\,(0\,;\,-4\,;\,-2)$.
On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les ordonnées : $-4 = k \times 2$, donc $k = -2$.
Les abscisses : $-2 \times 0 = 0$: c'est bien 0.
Les cotes : $-2 \times 1 = -2$: c'est bien -2.
Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.
On teste le point $B(3\,;\,5\,;\,4)$ de d' sur d.
On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.
Les ordonnées : $-1 + 2t = 5$, donc $t = 3$.
Les abscisses : $x = 3$ pour tout t : c'est bien 3.
Les cotes : $1 + 3 = 4$: c'est bien 4.
B est sur d : les droites sont confondues.

d) d est dirigée par $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et d' par $\vec{v}\,(-1\,;\,-2\,;\,1)$.
On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $-1 = k \times 1$, donc $k = -1$.
Les ordonnées : $-1 \times 2 = -2$: c'est bien -2.
Les cotes : $-1 \times (-1) = 1$: c'est bien 1.
Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.
On teste le point $B(1\,;\,1\,;\,1)$ de d' sur d.
On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.
Les abscisses : $t = 1$.
Les ordonnées : $2 \times 1 = 2$, et $2 \neq 1$.
B n'est pas sur d : les droites sont strictement parallèles.

e) d est dirigée par $\vec{u}\,(1\,;\,1\,;\,-2)$ et d' par $\vec{v}\,(-3\,;\,-3\,;\,6)$.
On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $-3 = k \times 1$, donc $k = -3$.
Les ordonnées : $-3 \times 1 = -3$: c'est bien -3.
Les cotes : $-3 \times (-2) = 6$: c'est bien 6.
Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.
On teste le point $B(0\,;\,-3\,;\,8)$ de d' sur d.
On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.
Les abscisses : $2 + t = 0$, donc $t = -2$.
Les ordonnées : $-1 + (-2) = -3$: c'est bien -3.
Les cotes : $4 - 2 \times (-2) = 8$: c'est bien 8.
B est sur d : les droites sont confondues.
Les écritures sont différentes, mais c'est la même droite : une représentation paramétrique n'est pas unique.

Exercice 5 – Droites sécantes : le point d'intersection ★★

Montre que les droites sont sécantes et calcule les coordonnées de leur point d'intersection I.

a) Les vecteurs directeurs $(1\,;\,1\,;\,-1)$ et $(2\,;\,1\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$$\begin{cases} 1+t=5+2s \\ t=3+s \\ 2-t=1+s \end{cases}$$
On regroupe les inconnues à gauche :
$$\begin{cases} t-2s=4 \\ t-s=3 \\ -t-s=-1 \end{cases}$$
La 1re équation donne $t=2s+4$.
On remplace dans la 2e équation : $(2s+4)-s=3$, donc $s+4=3$, donc $s=-1$.
Puis $t=2$ (on remplace s par -1).
On teste la 3e équation : $-2-(-1)=-1$: c'est bien -1.
On remplace t par 2 dans la représentation de d : le point commun est $I(3\,;\,2\,;\,0)$.
Contrôle avec $s=-1$ dans d' : on retrouve bien $(3\,;\,2\,;\,0)$.

b) Les vecteurs directeurs $(2\,;\,0\,;\,1)$ et $(1\,;\,-3\,;\,2)$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$$\begin{cases} -2+2t=-2+s \\ -1=5-3s \\ 3+t=2s \end{cases}$$
On regroupe les inconnues à gauche :
$$\begin{cases} 2t-s=0 \\ 3s=6 \\ t-2s=-3 \end{cases}$$
La 2e équation s'écrit $3s=6$, donc $s=2$.
On remplace dans la 1re équation : $2t-2=0$, donc $2t=2$, donc $t=1$.
On teste la 3e équation : $1-2\times 2=-3$: c'est bien -3.
On remplace t par 1 dans la représentation de d : le point commun est $I(0\,;\,-1\,;\,4)$.
Contrôle avec $s=2$ dans d' : on retrouve bien $(0\,;\,-1\,;\,4)$.

c) Les vecteurs directeurs $(3\,;\,-1\,;\,2)$ et $(0\,;\,2\,;\,-1)$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$$\begin{cases} 4+3t=1 \\ -t=-5+2s \\ 3+2t=4-s \end{cases}$$
On regroupe les inconnues à gauche :
$$\begin{cases} 3t=-3 \\ -t-2s=-5 \\ 2t+s=1 \end{cases}$$
La 1re équation s'écrit $3t=-3$, donc $t=-1$.
On remplace dans la 2e équation : $-(-1)-2s=-5$, donc $-2s=-6$, donc $s=3$.
On teste la 3e équation : $2\times(-1)+3=1$: c'est bien 1.
On remplace t par -1 dans la représentation de d : le point commun est $I(1\,;\,1\,;\,1)$.
Contrôle avec $s=3$ dans d' : on retrouve bien $(1\,;\,1\,;\,1)$.

d) Les vecteurs directeurs $(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $(2\,;\,-1\,;\,3)$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$\begin{cases} t = 4 + 2s \\ -7 + 2t = -4 - s \\ 2 - t = 3 + 3s \end{cases}$
On regroupe les inconnues à gauche :
$\begin{cases} t - 2s = 4 \\ 2t + s = 3 \\ -t - 3s = 1 \end{cases}$
La 1re équation donne $t = 2s + 4$.
On remplace dans la 2e équation : $2\,(2s + 4) + s = 3$, donc $5s + 8 = 3$, donc $5s = -5$, donc $s = -1$.
Puis $t = 2$ (on remplace s par -1).
On teste la 3e équation : $-2 - 3 \times (-1) = 1$: c'est bien 1.
On remplace t par 2 dans la représentation de d : le point commun est $I(2\,;\,-3\,;\,0)$.
Contrôle avec $s = -1$ dans d' : on retrouve bien $(2\,;\,-3\,;\,0)$.

e) $J\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$: le vecteur $(1\,;\,2\,;\,2) = 2\overrightarrow{AJ}$ dirige bien (AJ), et (BH) passe par B avec $\overrightarrow{BH}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$.
Les vecteurs directeurs $(1\,;\,2\,;\,2)$ et $(-1\,;\,1\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$\begin{cases} t = 1 - s \\ 2t = s \\ 2t = s \end{cases}$
On regroupe les inconnues à gauche :
$\begin{cases} t + s = 1 \\ 2t - s = 0 \\ 2t - s = 0 \end{cases}$
La 1re équation donne $t = 1 - s$.
On remplace dans la 2e équation : $2\,(1 - s) - s = 0$, donc $2 - 3s = 0$, donc $-3s = -2$, donc $s = \dfrac{2}{3}$.
Puis $t = \dfrac{1}{3}$ (on remplace s par $\dfrac{2}{3}$).
On teste la 3e équation : $2 \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = 0$: c'est bien 0.
On remplace t par $\dfrac{1}{3}$ dans la représentation de d : le point commun est $I(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3})$.
Contrôle avec $s = \dfrac{2}{3}$ dans d' : on retrouve bien $(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3})$.

Exercice 6 – Étudier la position relative ★★

Les droites sont-elles confondues, strictement parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifie.

a) d est dirigée par $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ et d' par $\vec{v}\,(1\,;\,1\,;\,2)$.

On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Les abscisses : $1 = k \times 2$, donc $k = \dfrac{1}{2}$.

Les ordonnées : $\dfrac{1}{2} \times (-1) = -\dfrac{1}{2}$, et $-\dfrac{1}{2} \neq 1$.

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires : les droites sont sécantes ou non coplanaires.

Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :

$$\begin{cases} 2t = 1 + s \\ 1 - t = s \\ 3 + t = -1 + 2s \end{cases}$$

On regroupe les inconnues à gauche :

$$\begin{cases} 2t - s = 1 \\ -t - s = -1 \\ t - 2s = -4 \end{cases}$$

La 1re équation donne $s = 2t - 1$.

On remplace dans la 2e équation : $-t - (2t - 1) = -1$, donc $1 - 3t = -1$, donc $-3t = -2$, donc $t = \dfrac{2}{3}$.

Puis $s = \dfrac{1}{3}$ (on remplace t par $\dfrac{2}{3}$).

On teste la 3e équation : $\dfrac{2}{3} - 2 \times \dfrac{1}{3} = 0$, et $0 \neq -4$.

Le système n'a pas de solution : pas de point commun, et les droites ne sont pas parallèles : elles sont non coplanaires.

b) d est dirigée par $\vec{u}\,(1\,;\,-1\,;\,2)$ et d' par $\vec{v}\,(3\,;\,1\,;\,0)$.

On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Les abscisses : $3 = k \times 1$, donc $k = 3$.

Les ordonnées : $3 \times (-1) = -3$, et $-3 \neq 1$.

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires : les droites sont sécantes ou non coplanaires.

Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :

$$\begin{cases} 3 + t = -1 + 3s \\ -1 - t = -1 + s \\ 1 + 2t = -1 \end{cases}$$

On regroupe les inconnues à gauche :

$$\begin{cases} t - 3s = -4 \\ -t - s = 0 \\ 2t = -2 \end{cases}$$

La 3e équation s'écrit $2t = -2$, donc $t = -1$.

On remplace dans la 1re équation : $-1 - 3s = -4$, donc $-3s = -3$, donc $s = 1$.

On teste la 2e équation : $-(-1) - 1 = 0$: c'est bien 0.

On remplace t par -1 dans la représentation de d : le point commun est $I(2\,;\,0\,;\,-1)$.

Contrôle avec $s = 1$ dans d' : on retrouve bien $(2\,;\,0\,;\,-1)$.

Les droites sont sécantes en I.

c) d est dirigée par $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ et d' par $\vec{v}\,(-2\,;\,4\,;\,-6)$.
On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $-2 = k \times 1$, donc $k = -2$.
Les ordonnées : $-2 \times (-2) = 4$: c'est bien 4.
Les cotes : $-2 \times 3 = -6$: c'est bien -6.
Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.
On teste le point $B(0\,;\,0\,;\,1)$ de d' sur d.
On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.
Les abscisses : $2 + t = 0$, donc $t = -2$.
Les ordonnées : $1 - 2 \times (-2) = 5$, et $5 \neq 0$.
B n'est pas sur d : les droites sont strictement parallèles.

d) d est dirigée par $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$ et d' par $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$.
On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $0 = k \times 1$, donc $k = 0$.
Les ordonnées : $0 \times 0 = 0$, et $0 \neq 1$.
Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires : les droites sont sécantes ou non coplanaires.
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$$\begin{cases} t = 1 \\ 1 = 3 + s \\ 2t = 1 - s \end{cases}$$
On regroupe les inconnues à gauche :
$$\begin{cases} t = 1 \\ -s = 2 \\ 2t + s = 1 \end{cases}$$
La 1re équation s'écrit $t = 1$.
La 2e équation s'écrit $-s = 2$, donc $s = -2$.
On teste la 3e équation : $2 \times 1 + (-2) = 0$, et $0 \neq 1$.
Le système n'a pas de solution : pas de point commun, et les droites ne sont pas parallèles : elles sont non coplanaires.
Non parallèles ne veut pas dire sécantes : dans l'espace, deux droites peuvent n'avoir aucun point commun sans être parallèles.

e) $(1\,;\,1\,;\,0)$ et $(1\,;\,0\,;\,-2)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.
Un point commun vérifie $\begin{cases} 1 + t = s \\ t = m \\ 2 = 4 - 2s \end{cases}$
La 3e équation donne $2s = 2$, donc $s = 1$.
La 1re donne alors $1 + t = 1$, donc $t = 0$.
La 2e impose $m = t = 0$.
Pour $m = 0$, les droites sont sécantes au point $(1\,;\,0\,;\,2)$; pour $m \neq 0$, elles sont non coplanaires.

Exercice 7 – Les droites du cube ★★★

1. $\overrightarrow{AG}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ et $A(0\,;\,0\,;\,0)$: $(AG) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

   $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$: $(EC) : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

2. Les vecteurs $(1\,;\,1\,;\,1)$ et $(1\,;\,1\,;\,-1)$ ne sont pas colinéaires.

   Un point commun a un paramètre t sur (AG) et un paramètre s sur (EC) :

   $\begin{cases} t = s \\ t = s \\ t = 1 - s \end{cases}$

   On regroupe les inconnues à gauche :

   $\begin{cases} t - s = 0 \\ t - s = 0 \\ t + s = 1 \end{cases}$

   La 1re équation donne $t = s$.

   On remplace dans la 3e équation : $s + s = 1$, donc $2s = 1$, donc $s = \dfrac{1}{2}$.

   Puis $t = \dfrac{1}{2}$ (on remplace s par $\dfrac{1}{2}$).

   On teste la 2e équation : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$: c'est bien 0.

   On remplace t par $\dfrac{1}{2}$ dans la représentation de (AG) : le point commun est $\Omega(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2})$.

   Contrôle avec $s = \dfrac{1}{2}$ dans (EC) : on retrouve bien $(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2})$.

   Ω est le centre du cube.

3. $\overrightarrow{AF}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{DG}\,(1\,;\,0\,;\,1)$: les vecteurs sont égaux, les droites sont parallèles.

   $(AF) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

   On teste $D(0\,;\,1\,;\,0)$:

   On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de D.

   Les abscisses : $t = 0$.

   Les ordonnées : $y = 0$ pour tout t, et $0 \neq 1$.

   $D \notin (AF)$: les droites sont strictement parallèles.

4. $\overrightarrow{AF}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$ ne sont pas colinéaires (ordonnée nulle pour $\overrightarrow{AF}$ seulement).
   On reprend $(EC) : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$ (question 1).
   Un point commun a un paramètre t sur (AF) et un paramètre s sur (EC) :
   $\begin{cases} t = s \\ 0 = s \\ t = 1 - s \end{cases}$
   On regroupe les inconnues à gauche :
   $\begin{cases} t - s = 0 \\ -s = 0 \\ t + s = 1 \end{cases}$
   La 2e équation s'écrit $-s = 0$, donc $s = 0$.
   On remplace dans la 1re équation : $t - 0 = 0$, donc $t = 0$.
   On teste la 3e équation : $0 + 0 = 0$, et $0 \neq 1$.
   Pas de point commun et pas parallèles : (AF) et (EC) sont non coplanaires.

Exercice 8 – Deux drones ★★★

1. Pour $t = 0$: D_1 est en $(0\,;\,1\,;\,12)$ et D_2 en $(1\,;\,4\,;\,4)$.
   Les coefficients de t : $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ pour D_1 et $\vec{v}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ pour D_2.

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (ordonnée nulle pour $\vec{v}$ seulement).
   Un point commun a un paramètre t sur la trajectoire de D_1 et un paramètre s sur celle de D_2 :
   $\begin{cases} 2t = 1 + s \\ 1 + t = 4 \\ 12 - t = 4 + s \end{cases}$
   On regroupe les inconnues à gauche :
   $\begin{cases} 2t - s = 1 \\ t = 3 \\ -t - s = -8 \end{cases}$
   La 2e équation s'écrit $t = 3$.
   On remplace dans la 1re équation : $2 \times 3 - s = 1$, donc $-s = -5$, donc $s = 5$.
   On teste la 3e équation : $-3 - 5 = -8$: c'est bien -8.
   On remplace t par 3 dans la représentation de D_1 : le point commun est $I(6\,;\,4\,;\,9)$.
   Contrôle avec $s = 5$ pour D_2 : on retrouve bien $(6\,;\,4\,;\,9)$.
   Les trajectoires se croisent au point $I(6\,;\,4\,;\,9)$.

3. Pour se percuter, ils doivent être au même point au même instant t.
   D_1 passe en I à $t = 3$ et D_2 à $t = 5$.
   À $t = 3$, D_2 est en $(4\,;\,4\,;\,7)$; à $t = 5$, D_1 est en $(10\,;\,6\,;\,7)$.
   Avec le même t : les abscisses donnent $2t = 1 + t$, soit $t = 1$, et les ordonnées $1 + t = 4$, soit $t = 3$: impossible.
   Les drones ne se percutent pas.

4. $\vec{w} = -2\vec{u}$: les trajectoires sont parallèles.
   On teste C sur la trajectoire de D_1 :
   On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de C.
   Les abscisses : $2t = 1$, donc $t = \dfrac{1}{2}$.
   Les ordonnées : $1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, et $\dfrac{3}{2} \neq 0$.
   C n'est pas sur la trajectoire de D_1 : les droites sont strictement parallèles, elles ne se croisent jamais.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *Ce sont les constantes : elles donnent un point, pas un vecteur directeur.*
Les coefficients de t donnent le vecteur directeur $(3\,;\,1\,;\,-2)$; le point de paramètre 0 est $(2\,;\,-1\,;\,4)$.

b) $y = 5$ *ne contient pas* t *: le coefficient de* t *est* 0.
Le vecteur directeur est $(1\,;\,0\,;\,-2)$.

c) *La cote n'a pas été testée.*
On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de M.
Les abscisses : $3 + t = 5$, donc $t = 2$.
Les ordonnées : $1 - 2 \times 2 = -3$: c'est bien -3.
Les cotes : $2 + 2 = 4$, et $4 \neq 3$.
Donc $M \notin d$.

d) *L'élève a utilisé le même paramètre* t *pour les deux droites : il faut* t *pour* d *et* s *pour* d'.
Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :
$$\begin{cases} 1 + t = 4 - s \\ 2t = 3 + s \\ 3 = 1 + 2s \end{cases}$$
On regroupe les inconnues à gauche :
$$\begin{cases} t + s = 3 \\ 2t - s = 3 \\ -2s = -2 \end{cases}$$
La 3e équation s'écrit $-2s = -2$, donc $s = 1$.
On remplace dans la 1re équation : $t + 1 = 3$, donc $t = 2$.
On teste la 2e équation : $2 \times 2 - 1 = 3$: c'est bien 3.
On remplace t par 2 dans la représentation de d : le point commun est $I(3\,;\,4\,;\,3)$.
Contrôle avec $s = 1$ dans d' : on retrouve bien $(3\,;\,4\,;\,3)$.

e) *Dans l'espace, non parallèles ne veut pas dire sécantes : il faut résoudre le système.*

Un point commun a un paramètre t sur d et un paramètre s sur d' :

$$\begin{cases} t = 1 \\ 0 = 1 + s \\ t = s \end{cases}$$

On regroupe les inconnues à gauche :

$$\begin{cases} t = 1 \\ -s = 1 \\ t - s = 0 \end{cases}$$

La 1re équation s'écrit $t = 1$.

La 2e équation s'écrit $-s = 1$, donc $s = -1$.

On teste la 3e équation : $1 - (-1) = 2$, et $2 \neq 0$.

Le système n'a pas de solution : les droites sont non coplanaires.

f) *Une représentation paramétrique n'est pas unique : on compare les vecteurs directeurs, puis un point.*

d est dirigée par $\vec{u}\,(2\,;\,-2\,;\,4)$ et d' par $\vec{v}\,(-1\,;\,1\,;\,-2)$.

On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Les abscisses : $-1 = k \times 2$, donc $k = -\dfrac{1}{2}$.

Les ordonnées : $-\dfrac{1}{2} \times (-2) = 1$: c'est bien 1.

Les cotes : $-\dfrac{1}{2} \times 4 = -2$: c'est bien -2.

Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites sont parallèles.

On teste le point $B(3\,;\,0\,;\,7)$ de d' sur d.

On cherche t tel que les trois équations donnent les coordonnées de B.

Les abscisses : $1 + 2t = 3$, donc $t = 1$.

Les ordonnées : $2 - 2 \times 1 = 0$: c'est bien 0.

Les cotes : $3 + 4 \times 1 = 7$: c'est bien 7.

B est sur d : les droites sont confondues.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un vecteur directeur de la droite $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est :

Réponse C : $(-1\,;\,3\,;\,0)$

Les coefficients de t : -1, 3 et 0 (la cote ne dépend pas de t).

2. Quel point est sur la droite $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$?

Réponse A : $(5\,;\,-2\,;\,5)$

$t = 2$ donne $x = 5$, $y = -2$, $z = 5$. Pour $(3\,;\,-1\,;\,5)$, $t = 1$ convient pour x et y mais donne $z = 4$.

3. $A(1\,;\,0\,;\,-2)$ et $B(3\,;\,-1\,;\,2)$. Une représentation paramétrique de (AB) est :

Réponse D : $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = -2 + 4t$

Le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-1\,;\,4)$.

4. d est dirigée par $(1\,;\,2\,;\,-1)$, d' par $(-2\,;\,-4\,;\,2)$, et un point de d' n'est pas sur d. Les droites sont :

Réponse B : strictement parallèles

Les vecteurs sont colinéaires (facteur -2) : parallèles ; un point de d' hors de d : strictement parallèles.

5. $d : x = t,\ y = 1 + t,\ z = 2t$ et $d' : x = 3 - s,\ y = s,\ z = s$. Les droites :

Réponse D : se coupent en $(1\,;\,2\,;\,2)$

$t = 3 - s$ et $1 + t = s$ donnent $t = 1$, $s = 2$; cotes : $2 \times 1 = 2$, vérifiée. Point $(1\,;\,2\,;\,2)$.

6. Deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles :

Réponse A : sont sécantes ou non coplanaires

Dans l'espace, il existe des droites sans point commun qui ne sont pas parallèles : elles sont non coplanaires.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).