Terminale spécialité / Raisonnement par récurrence

benprof particulier.fr

50 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rédiger une récurrence et formules de somme*

À retenir : Rédige en trois temps : **initialisation** au premier rang n_0, **hérédité** pour UN entier k fixé, **conclusion** qui cite les deux. Pour une somme, $S_{k+1} = S_k + (\text{dernier terme})$, par exemple $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2$, puis factorise par $(k+1)$.

Ex. 1 ★☆☆ **Premier rang et rang k + 1** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$ ». Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{Q}(n)$ la propriété : « $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$ ».

(a) Vérifie que $\mathcal{P}(1)$ est vraie en calculant séparément les deux membres.

(b) Écris $\mathcal{P}(k+1)$ en entier, sans rien calculer.

(c) À quel rang commence-t-on pour $\mathcal{Q}$? Vérifie $\mathcal{Q}$ à ce rang.

(d) Combien de termes la somme de $\mathcal{Q}(n)$ contient-elle ?

(e) Écris $\mathcal{Q}(k+1)$ en entier, sans rien calculer.

(f) Vérifie que, pour tout entier naturel k, $\frac{5^{k+1}-1}{4} + 5^{k+1} = \frac{5^{k+2}-1}{4}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Compléter une rédaction** — On veut démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. On note $\mathcal{P}(n)$ cette propriété. Complète la rédaction étape par étape.

(a) Rédige l'initialisation.

(b) Soit $k \geqslant 1$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Écris l'hypothèse de récurrence, puis ce qu'il faut montrer.

(c) Quel est le dernier terme de S_{k+1} ? Exprime S_{k+1} en fonction de S_k.

(d) Remplace S_k grâce à l'hypothèse, puis factorise par $(k+1)(k+2)$ pour terminer l'hérédité.

(e) Rédige la conclusion.

Ex. 3 ★☆☆ **Cinq rédactions, cinq erreurs** — Chaque élève a commis une erreur dans sa récurrence. Repère-la et corrige-la.

(a) Hugo commence son hérédité par : « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. » Quelle est l'erreur ? Écris la bonne phrase.

(b) Pour la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, Inès écrit qu'au rang $k+1$ elle vaut $1^2 + \cdots + k^2 + k^2 + 1$. Corrige le dernier terme.

Ex. 3 (suite)

(c) Malik montre que si $6^k + 2$ est divisible par 5, alors $6^{k+1} + 2 = 6(6^k + 2) - 10$ l'est aussi. Il en conclut que $6^n + 2$ est divisible par 5 pour tout entier naturel n. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Pour démontrer que $\sum_{i=0}^{n}(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ pour tout entier naturel n, Nora fait l'initialisation au rang 1. Corrige son initialisation.

(e) Tom a démontré l'initialisation au rang 1 et l'hérédité. Il conclut : « Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie. » Réécris une conclusion complète.

Ex. 4 ★★☆ **La somme des carrés** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

(a) Calcule S_1, S_2 et S_3, puis vérifie qu'ils sont égaux à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n = 1$, 2 et 3.

(b) Écris l'égalité qu'il faudra démontrer au rang $k+1$, en simplifiant chaque facteur.

(c) Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Factorise par $(k+1)$ plutôt que de tout développer.

(d) Déduis-en la valeur de $1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2$.

Ex. 5 ★★☆ **Une somme de fractions** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

(a) Calcule T_1 et T_2 sous forme de fractions irréductibles.

(b) Quel terme faut-il ajouter à T_k pour obtenir T_{k+1} ?

(c) Vérifie que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$.

(d) Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $T_n = \frac{n}{2n+1}$.

Ex. 6 ★★☆ **Héréditaire… mais fausse** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2+n+2}{2}$ ». Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « La propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire. »

(b) « $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. »

(c) « $\mathcal{P}(n)$ n'est vraie pour aucun entier $n \geqslant 1$. »

(d) « Une propriété vraie pour $n = 1, 2, \ldots, 50$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. »

Ex. 7 ★★☆ **La tirelire de Rayan** — La semaine 1, Rayan met 2 € dans sa tirelire. Ensuite, chaque semaine, il met 3 € de plus que la semaine précédente. On note T_n le total épargné après n semaines ($n \geqslant 1$).

(a) Calcule T_1, T_2 et T_3.

(b) Quel montant Rayan dépose-t-il la semaine $k+1$? Exprime T_{k+1} en fonction de T_k.

(c) Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $T_n = \frac{n(3n+1)}{2}$.

(d) Au bout de combien de semaines le total dépasse-t-il 500 € ?

Ex. 8 ★★★ **Des cubes et des triangles** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ et $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

n	1	2	3	4
T_n	1	3	6	10

(a) Calcule S_1, S_2, S_3 et S_4. Compare-les aux valeurs de T_n du tableau, puis conjecture une expression de S_n en fonction de n.

(b) Mila a vérifié ta conjecture pour $n = 1$, 2, 3 et 4. Elle affirme : « C'est démontré. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Démontre ta conjecture par récurrence, en factorisant par $(k+1)^2$ dans l'hérédité.

(d) Déduis-en la valeur de $11^3 + 12^3 + \cdots + 20^3$.

Ex. 9 ★★★ **Une somme qui commence à 0** — Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + (n+1) \times 2^n$.

(a) Écris S_0, S_1 et S_2 sous forme de sommes, puis calcule-les.

(b) Pour son hérédité, Léna écrit : « $S_{k+1} = S_k + (k+1) \times 2^k$ ». Explique son erreur et donne le bon terme à ajouter.

(c) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $S_n = n \times 2^{n+1} + 1$.

(d) Calcule $1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + 10 \times 2^9$ en précisant à quel rang n correspond cette somme.

Ex. 10 ★★★ **La pyramide de Zoé** — Zoé construit une pyramide avec des cubes en bois. L'étage du haut compte 1 cube. Chaque étage est un carré dont le côté a 2 cubes de plus que celui de l'étage du dessus. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $C_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$ est le nombre de cubes d'une pyramide à n étages.

(a) Calcule C_1, C_2 et C_3.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $C_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ ». Écris $\mathcal{P}(k+1)$ en simplifiant, puis exprime C_{k+1} en fonction de C_k.

(c) Démontre par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, en factorisant par $(2k+1)$ dans l'hérédité.

Ex. 10 (suite)

(d) Zoé a 2 000 cubes. Combien d'étages complets peut-elle construire au maximum ? Combien de cubes lui reste-t-il ?

2. *Encadrer une suite et étudier son sens de variation*

À retenir : Si f est croissante, $a \leqslant u_k \leqslant b$ donne $f(a) \leqslant u_{k+1} \leqslant f(b)$: vérifie ensuite $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$. Une fonction décroissante ou un facteur négatif inverse l'ordre ($1 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow -6 \leqslant -2x \leqslant -2$). Pour la croissance, $\mathcal{P}(n)$ est « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

Ex. 11 ★★☆ **Compléter une hérédité avec une fonction croissante** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On veut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

(a) Calcule $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Calcule $f(0)$ et $f(1)$.

(c) Rédige l'initialisation.

(d) Soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant u_k \leqslant 1$. Quel encadrement de u_{k+1} obtiens-tu en appliquant f ? Justifie.

(e) Explique pourquoi cet encadrement donne bien $\mathcal{P}(k+1)$, puis rédige la conclusion.

Ex. 12 ★★☆ **Encadrer une expression : vrai ou faux ?** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) « Si $2 \leqslant x \leqslant 5$, alors $-5 \leqslant -3x + 1 \leqslant -14$. »

(b) « Si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $1 \leqslant \sqrt{2x+1} \leqslant 3$. »

(c) « Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $2 \leqslant \frac{4}{x} \leqslant 4$. »

(d) « Si $-1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$. »

(e) « Si $0 < x \leqslant 3$, alors $1 < \mathrm{e}^x$. »

(f) « Pour démontrer qu'une suite (u_n) est croissante, il suffit de démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n. »

Ex. 13 ★★☆ **Choisir la bonne propriété pour le sens de variation** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On admet que tous ses termes sont positifs. On veut démontrer que (u_n) est croissante.

(a) Explique pourquoi un raisonnement par récurrence est adapté ici.

(b) Écris la propriété $\mathcal{P}(n)$ qu'il faut démontrer.

(c) Calcule u_1 et rédige l'initialisation.

(d) Soit k un entier naturel tel que $u_k \leqslant u_{k+1}$. Démontre que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$ en justifiant chaque étape.

Ex. 13 (suite)

(e) Rédige la conclusion.

Ex. 14 ★★☆ **Les truites du lac** — Au 1er janvier 2026, un lac compte 2 000 truites. Chaque année, 20 % des truites disparaissent et on en relâche 1 000. On note u_n le nombre de truites, en milliers, au 1er janvier $2026+n$. Ainsi $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.

(a) Calcule u_1 et u_2.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

(c) Interprète ce résultat pour la population de truites.

(d) Inès affirme qu'il suffisait de savoir que $u_n < 5$ pour en déduire que la population augmente. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 15 ★★☆ **Une fonction décroissante inverse l'ordre** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

(a) Calcule u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifie.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 3$. Pourquoi ne commence-t-on pas au rang 0 ?

(c) Maé écrit : « $x \mapsto \dfrac{6}{x+1}$ est décroissante, donc à partir de $u_0 \leqslant u_1$ j'obtiens par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 16 ★★☆ **Une fonction monotone seulement sur un intervalle** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

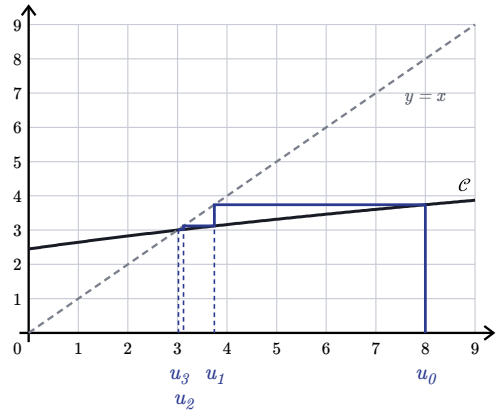
(a) Tom écrit : « $0 \leqslant x \leqslant 2$ donne $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$. » Calcule $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$, puis explique son erreur.

(b) Étudie le sens de variation de f sur $[0\,;1]$.

(c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 1$.

(d) Exprime $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n, puis déduis-en le sens de variation de (u_n).

Ex. 17 ★★★ **Conjecturer sur un escalier, puis démontrer** — Soit f la fonction définie sur $[-6\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure montre la courbe $\mathcal{C}$ de f, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite.



(a) Conjecture le sens de variation de (u_n). Quel minorant entier suggère le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $y = x$?

(b) Vérifie ta lecture en calculant l'image de ce minorant par f, puis justifie que f est croissante sur $[-6\,;+\infty[$.

(c) Écris une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui traduit ta conjecture (sens de variation et minorant, avec le majorant 8), puis démontre-la par récurrence.

(d) Que peux-tu conclure sur la suite (u_n) ?

Ex. 18 ★★★ **Une suite construite avec $x\,\mathrm{e}^{-x}$** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Calcule $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

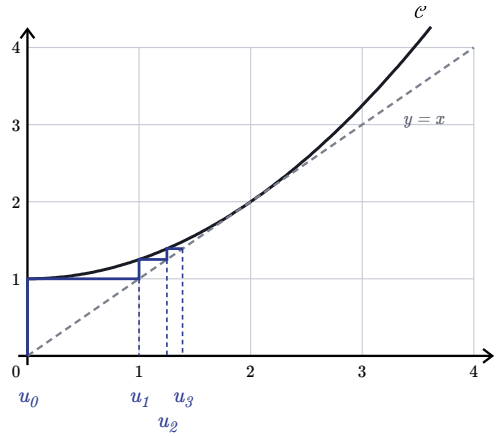
(b) Calcule u_1 (valeur exacte), puis donne une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} près.

(c) Léa affirme : « f n'est pas croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc on ne peut pas appliquer f à un encadrement de u_n. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. Conclus sur le sens de variation de (u_n).

(e) Retrouve ce sens de variation d'une autre façon : en utilisant $u_n > 0$ (question 4), étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Ex. 19 ★★★ **Même fonction, deux destins** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et (v_n) définie par $v_0 = 3$, avec, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.



(a) Calcule u_1, u_2 et u_3. Avec le graphique et le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $y = x$, conjecture le sens de variation de (u_n) et un majorant entier.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

(c) Démontre que pour tout réel x, $f(x) - x = \frac{(x-2)^2}{4}$, puis calcule v_1 et v_2.

(d) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $v_n \geqslant 3 + \frac{n}{4}$.

(e) Détermine un entier N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $v_n \geqslant 100$.

Ex. 20 ★★★ **La méthode de Héron pour approcher $\sqrt{5}$** — Ben montre à Sacha une méthode très ancienne pour approcher $\sqrt{5}$. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Calcule u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

(b) Démontre que pour tout réel $x > 0$, $f(x) - \sqrt{5} = \frac{(x-\sqrt{5})^2}{2x}$.

(c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n > \sqrt{5}$ (inégalité stricte).

(d) Étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis déduis-en le sens de variation de (u_n).

(e) Déduis de la question 3 que $\frac{5}{u_2} < \sqrt{5} < u_2$, puis donne un encadrement de $\sqrt{5}$ par deux fractions, d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

3. *Démontrer une formule explicite*

À retenir : Hérédité : on part de $u_{k+1} = f(u_k)$, on remplace u_k par la formule, on arrive à la formule au rang $k+1$. On initialise au premier rang (u_0 ou u_1). Ex. : $2 \times 2^k = 2^{k+1}$. Des termes calculés ne prouvent rien.

Ex. 21 ★☆☆ **Bien démarrer : initialisation et rang de départ** — Dans chaque cas, la suite et la propriété $\mathcal{P}(n)$ sont données.

(a) $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n - 9$; $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2 \times 4^n + 3$ ». Vérifie $\mathcal{P}(0)$.

(b) (v_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$; $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = n^2$ ». Quel est le premier rang ? Vérifie l'initialisation.

(c) $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + 2^n$. Mehdi vérifie « $a_n = 2^n$ » pour $n = 0$, 1 et 2, puis dit que c'est démontré. A-t-il raison ? Justifie.

(d) $z_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = z_n - \frac{2}{(n+1)(n+2)}$; $\mathcal{P}(n)$: « $z_n = \frac{n+3}{n+1}$ ». Écris $\mathcal{P}(k+1)$ en simplifiant, puis vérifie $\mathcal{P}(0)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Une hérédité à compléter** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. On veut démontrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^{n+2} - 3$ ».

(a) Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Écris l'hypothèse de récurrence.

(b) Écris l'égalité qu'il faut obtenir, c'est-à-dire $\mathcal{P}(k+1)$, avec un exposant simplifié.

(c) Pars de $u_{k+1} = 2u_k + 3$ et remplace u_k grâce à l'hypothèse. Simplifie avec une seule puissance de 2.

(d) Lina écrit $2 \times 2^{k+2} = 4^{k+2}$. A-t-elle raison ? Justifie avec $k = 0$.

(e) Vérifie $\mathcal{P}(0)$, puis rédige la conclusion de la récurrence.

Ex. 23 ★☆☆ **Erreurs dans des copies** — Voici des extraits de rédactions d'élèves.

(a) Hugo : $v_0 = 2$, $v_{n+1} = v_n + 6$, $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 6n + 2$ ». Hérédité : « $v_{k+1} = 6(k+1) + 2 = 6k + 8 = v_k + 6$ ». Repère l'erreur et corrige-la.

(b) Inès : $w_0 = 4$, $w_{n+1} = 3w_n - 2$. Elle démontre l'hérédité de « $w_n = 3^n + 1$ » et conclut que c'est vrai pour tout entier naturel n. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Sami : $t_1 = 2$ et, pour $n \geqslant 1$, $t_{n+1} = t_n + 2(n+1)$; $\mathcal{P}(n)$: « $t_n = n(n+1)$ ». Initialisation : « $t_0 = 0 \times 1 = 0$ ». Corrige-la.

(d) Léo : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 5u_n$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2 \times 5^n$ ». Hérédité : « $u_{k+1} = 5 \times 2 \times 5^k = 10^{k+1}$ ». Calcule u_2 de deux façons pour montrer l'erreur, puis corrige.

Ex. 24 ★★☆ **Une suite de fractions** — Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \frac{1}{2-v_n}$.

(a) Soit $k \geqslant 1$ un entier tel que $v_k = \frac{k}{k+1}$. Exprime $2 - v_k$ en fonction de k et justifie que $2 - v_k \neq 0$.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{n}{n+1}$.

(c) Détermine le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $v_n \geqslant 0{,}99$.

Ex. 25 ★★☆ **Dérivées successives de x eˣ** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$. On note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième ($f^{(1)} = f'$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$).

(a) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x$.

(b) Calcule $f^{(20)}(0)$.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f^{(7)}(x) = 0$.

Ex. 26 ★★☆ **Le placement de Maëlle** — Au début, Maëlle place 1 000 € à 5 % d'intérêts par an. Chaque fin d'année, une fois les intérêts ajoutés, elle verse 200 € de plus. On note C_n le capital après n années, avec $C_0 = 1\,000$.

(a) Justifie que pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1{,}05 \times C_n + 200$.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $C_n = 5\,000 \times 1{,}05^n - 4\,000$.

(c) Calcule le capital après 10 ans, arrondi au centime.

Ex. 27 ★★☆ **La conjecture de Jade** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Jade a calculé :

n	0	1	2
u_n	1	2	4

(a) Jade en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

(c) Calcule u_{30}.

Ex. 28 ★★★ **Conjecturer à partir d'un tableau** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$. Voici ses premiers termes :

n	0	1	2	3
u_n	1	3	6	11

(a) Calcule u_4 et u_5.

(b) Calcule $u_n - n$ pour n allant de 0 à 5. Conjecture une expression de u_n en fonction de n.

(c) Démontre par récurrence ta conjecture pour tout entier naturel n.

(d) Rayan affirme : « u_n est impair pour tout entier naturel n, car u_1 et u_3 le sont. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 28 (suite)

(e) Détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 500$.

Ex. 29 ★★★ **Passer par l'inverse pour conjecturer** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Calcule u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.

(b) Calcule $\frac{1}{u_n}$ pour n allant de 0 à 3. Conjecture une expression de $\frac{1}{u_n}$, puis de u_n, en fonction de n.

(c) Démontre ta conjecture sur u_n par récurrence. Justifie que le dénominateur $1 + u_k$ n'est pas nul.

(d) Démontre que la suite (u_n) est décroissante.

(e) Détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$.

Ex. 30 ★★★ **Les nénuphars de l'étang** — La semaine 1, des nénuphars couvrent 7 m² d'un étang de 1 000 m². Chaque semaine, leur surface double, puis Noé en retire 5 m². On note u_n la surface (en m²) couverte la semaine n, pour tout entier $n \geqslant 1$. Ainsi $u_1 = 7$.

(a) Justifie que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Calcule u_2, u_3 et u_4.

(b) Noé remarque que $n^2 - n + 7$ donne u_1, u_2 et u_3. A-t-il prouvé que $u_n = n^2 - n + 7$ pour tout entier $n \geqslant 1$? Justifie.

(c) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n + 5$.

(d) À partir de quelle semaine les nénuphars couvrent-ils tout l'étang ? Justifie.

4. *Démontrer une divisibilité*

À retenir : « a est divisible par 6 » s'écrit : il existe un **entier** m tel que $a = 6m$. Exemple : $3^{k+1} - 1 = 3(3^k - 1) + 2 = 3 \times 2m + 2 = 2(3m+1)$, et $3m+1$ est un entier. Vérifier un seul rang ne suffit pas. Pas de congruences dans cette fiche.

Ex. 31 ★☆☆ **Compléter l'hérédité : 7 puissance n moins 1** — Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $7^n - 1$ est divisible par 6 ».

(a) Calcule $7^0 - 1$ et $7^2 - 1$, puis écris chacun sous la forme $6 \times$ (un entier).

(b) Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Traduis $\mathcal{P}(k)$ par une égalité faisant intervenir un entier m.

(c) Vérifie que $7^{k+1} - 1 = 7(7^k - 1) + 6$.

(d) Déduis-en une écriture de $7^{k+1} - 1$ sous la forme $6 \times (\ldots)$, en fonction de m.

(e) Justifie que le facteur obtenu est un entier et conclus l'hérédité.

Ex. 32 ★☆☆ **L'erreur de Lou** — Lou veut démontrer que $5^n - 1$ est divisible par 4 pour tout entier naturel n. Voici sa rédaction.
« Initialisation : $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$. Hérédité : on suppose que $5^k - 1 = 4k$. Alors $5^{k+1} - 1 = 5 \times 5^k - 1 = 5(4k + 1) - 1 = 4(5k + 1)$. »

(a) Calcule $5^2 - 1$ et 4×2. L'égalité $5^k - 1 = 4k$ est-elle vraie pour $k = 2$? Justifie.

(b) Explique l'erreur que Lou commet dans l'hypothèse de récurrence.

(c) Écris correctement l'hypothèse de récurrence, puis isole 5^k.

(d) Corrige le calcul de $5^{k+1} - 1$ et conclus l'hérédité.

Ex. 33 ★☆☆ **Vrai ou faux : les pièges de la divisibilité** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) « Comme $13^1 - 1 = 12$, on a démontré que $13^n - 1$ est divisible par 12 pour tout entier naturel n. »

(b) « La propriété « $6^n + 2$ est divisible par 5 » est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n. »

(c) « Dans l'hérédité, on peut écrire l'hypothèse « $8^k - 1 = 7m$ » sans préciser ce qu'est m. »

(d) « $2^n + 1$ est divisible par 3 pour tout entier naturel n. »

Ex. 34 ★★☆ **Deux puissances : 8 puissance n moins 3 puissance n** — Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $8^n - 3^n$ est divisible par 5 ».

(a) Calcule $8^n - 3^n$ pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, puis vérifie que ces nombres sont divisibles par 5.

(b) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $8^n - 3^n$ est divisible par 5.

(c) Pierre affirme : « $8^n - 3^n$ est même divisible par 10 pour tout entier naturel n. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 35 ★★☆ **Un calcul plus long : divisibilité par 9** — Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9 ».

(a) Calcule $4^n + 15n - 1$ pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, et écris chaque résultat sous la forme $9 \times$ (un entier).

(b) Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Exprime 4^k en fonction de k et d'un entier m.

(c) Exprime $4^{k+1} + 15(k + 1) - 1$ en fonction de m et de k, puis factorise par 9.

(d) Justifie que le facteur obtenu est un entier et rédige la conclusion de la récurrence.

Ex. 36 ★★☆ **n au cube moins n : avec ou sans récurrence** — Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $n^3 - n$ est divisible par 3 ».

(a) Calcule $n^3 - n$ pour $n = 0$, 1, 2 et 3.

(b) Développe $(k + 1)^3$, où k est un entier naturel.

Ex. 36 (suite)

(c) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 3.

(d) Inès propose une preuve sans récurrence. Vérifie que $n^3 - n = (n - 1) \times n \times (n + 1)$, puis explique pourquoi ce produit est divisible par 3.

Ex. 37 ★★☆ **Les pièces de Malik** — Dans un jeu vidéo, Malik possède u_n pièces après n niveaux. Au départ, $u_0 = 6$. À chaque niveau, son nombre de pièces est multiplié par 7, puis il paie 12 pièces : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 7u_n - 12$.

(a) Calcule u_1, u_2 et u_3.

(b) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 6.

(c) Malik remarque que u_2 est divisible par 9. Il en déduit que u_n est divisible par 9 pour tout entier naturel n. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 38 ★★★ **Chercher le diviseur caché** — Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

(a) Calcule A_0, A_1 et A_2, puis décompose chacun en produit de facteurs premiers. Quel entier $d > 1$ divise, d'après toi, tous les A_n ?

(b) Démontre ta conjecture par récurrence. Indication : dans l'hérédité, isole 3^{2k+1} dans l'hypothèse.

(c) Déduis-en que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, A_n n'est pas un nombre premier.

Ex. 39 ★★★ **Un lemme avant la récurrence principale** — On veut démontrer que, pour tout entier naturel n, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

(a) Calcule $5n^3 + n$ pour $n = 0$, 1, 2 et 3, et écris chaque résultat sous la forme $6 \times$ (un entier).

(b) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n^2 + n$ est divisible par 2.

(c) Soit k un entier naturel. Développe $5(k + 1)^3 + (k + 1)$ et montre qu'il est égal à $(5k^3 + k) + 15(k^2 + k) + 6$.

(d) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

Ex. 40 ★★★ **Le cas général : a puissance n moins 1** — Soit a un entier, $a \geqslant 2$. On s'intéresse aux nombres $a^n - 1$, pour tout entier naturel n.

(a) Écris $6^2 - 1$ et $6^3 - 1$ sous la forme $5 \times$ (un entier).

(b) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$.

(c) Déduis-en le chiffre des unités de 11^n pour tout entier naturel n.

(d) Noé affirme : « Comme $6^2 - 1 = 35$, le nombre $6^n - 1$ est divisible par 35 pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 40 (suite)

(e) Démontre que, pour tout entier naturel n, $6^{2n} - 1$ est divisible par 35.

5. *Démontrer une inégalité : Bernoulli et rang de départ*

À retenir : On initialise à un rang n_0 où $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et à partir duquel l'hérédité marche : $2^n \geqslant n^2$ est faux pour $n = 3$, donc $n_0 = 4$. Multiplier par un nombre < 0 inverse le sens : justifie le signe, comme $1 + a > 0$.

Ex. 41 ★☆☆ **Tester les petits rangs avant d'initialiser** — On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $2^n \geqslant n^2$ ».

(a) Vérifie que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

(b) $\mathcal{P}(3)$ est-elle vraie ? Justifie par un calcul.

(c) Vérifie que $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

(d) Maël initialise au rang 0, puis affirme avoir démontré l'hérédité pour tout entier $k \geqslant 0$. Explique pourquoi son hérédité contient forcément une erreur.

(e) Quel rang de départ n_0 choisis-tu pour démontrer $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$? Justifie.

Ex. 42 ★☆☆ **Bernoulli pour $a > -1$: hérédité à compléter** — Soit a un réel tel que $a > -1$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ ». Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

(a) Écris $(1+a)^{k+1}$ à l'aide de $(1+a)^k$.

(b) Quel est le signe de $1 + a$? Justifie.

(c) Déduis de l'hypothèse de récurrence une minoration de $(1+a)^{k+1}$.

(d) Développe et réduis le minorant obtenu à la question précédente.

(e) Conclus que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(f) Pour $a = -0{,}2$, calcule les deux membres de $\mathcal{P}(3)$ et vérifie l'inégalité.

Ex. 43 ★☆☆ **L'erreur de Tom : multiplier par un négatif** — Tom veut appliquer Bernoulli avec $a = -3$, c'est-à-dire démontrer $\mathcal{P}(n)$: « $(-2)^n \geqslant 1 - 3n$ » pour tout entier naturel n.

(a) Calcule $(-2)^5$ et $1 - 3 \times 5$. $\mathcal{P}(5)$ est-elle vraie ?

(b) Tom écrit : « Par hypothèse, $(-2)^k \geqslant 1 - 3k$. Je multiplie par -2 : $(-2)^{k+1} \geqslant -2 + 6k$. » Repère son erreur.

(c) Écris l'inégalité correcte obtenue en multipliant l'hypothèse par -2.

(d) Quelle condition sur a manque ici pour que la preuve de Bernoulli fonctionne ? Justifie.

Ex. 44 ★★☆ **Le placement d'Inès** — Inès place 500 € à intérêts composés au taux annuel de 4 %. Au bout de n années, son capital vaut $C_n = 500 \times 1{,}04^n$ euros.

(a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $1{,}04^n \geqslant 1 + 0{,}04n$.

(b) Déduis-en que pour tout entier naturel n : $C_n \geqslant 500 + 20n$.

(c) D'après cette minoration, à partir de combien d'années le capital est-il sûr d'atteindre 1 000 € ?

(d) Explique comment cette minoration garantit que le capital dépassera un jour 1 000 000 €. Donne un rang qui convient.

Ex. 45 ★★☆ **$2^n \geqslant n^2$ à partir du bon rang** — On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $2^n \geqslant n^2$ ».

(a) Démontre que pour tout entier $k \geqslant 3$: $2k^2 \geqslant (k+1)^2$. Tu pourras écrire $2k^2 - (k+1)^2$ sous la forme $(k-1)^2 - c$.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$: $2^n \geqslant n^2$.

(c) Déduis-en que pour tout entier $n \geqslant 4$: $\frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Ex. 46 ★★☆ **Les étagères de Lina : $n! \geqslant 2^{n-1}$** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (« factorielle n »). C'est le nombre de façons dont Lina peut ranger n livres différents sur son étagère.

(a) Calcule $n!$ et 2^{n-1} pour $n = 1, 2, 3$ et 4.

(b) Justifie que pour tout entier $k \geqslant 1$: $(k+1)! = (k+1) \times k!$.

(c) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $n! \geqslant 2^{n-1}$.

(d) Déduis-en que Lina peut ranger 20 livres de plus de 500 000 façons.

Ex. 47 ★★☆ **Deux colonies de bactéries** — Au bout de n heures, une colonie A compte 3^n milliers de bactéries et une colonie B compte $n^2 + 4n$ milliers. On note $\mathcal{P}(n)$: « $3^n \geqslant n^2 + 4n$ ».

(a) Calcule 3^n et $n^2 + 4n$ pour $n = 0$, 1, 2 et 3. Pour quelles valeurs $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie ?

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 3$: $3^n \geqslant n^2 + 4n$.

(c) Déduis des questions précédentes l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Ex. 48 ★★★ **Les abonnés de Sacha : améliorer Bernoulli** — Chaque mois, le nombre d'abonnés de la chaîne de Sacha est multiplié par 1,2. Sacha veut montrer que $1{,}2^n$ finit par dépasser 100. On admet l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

(a) Déduis-en que pour tout entier naturel n, $1{,}2^n \geqslant 1 + 0{,}2n$. Trouve ensuite un entier N tel que $1{,}2^n \geqslant 100$ pour tout $n \geqslant N$.

Ex. 48 **(suite)**

(b) Soit a un réel, $a \geqslant 0$. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.

(c) Applique l'inégalité de la question précédente avec $a = 0{,}2$. Trouve le plus petit entier N' à partir duquel elle garantit $1{,}2^n \geqslant 100$
(tu pourras multiplier par 50).

(d) À la calculatrice, trouve le plus petit entier n tel que $1{,}2^n \geqslant 100$. Compare avec N et N', puis commente.

Ex. 49 ★★★ **$2^n \geqslant n^3$: l'hérédité ne suffit pas** — Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $2^n \geqslant n^3$ ».

(a) Pour n allant de 0 à 10, compare 2^n et n^3. Pour lesquels de ces entiers $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie ?

(b) Développe $(k+1)^3$, puis montre que pour tout entier k : $2k^3 - (k+1)^3 = k^2(k-3) - 3k - 1$.

(c) Déduis-en que pour tout entier $k \geqslant 4$: $2k^3 \geqslant (k+1)^3$.

(d) Léo affirme : « L'hérédité marche pour $k \geqslant 4$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 10$: $2^n \geqslant n^3$.

Ex. 50 ★★★ **Les carrés de Jade : renforcer la propriété** — Jade aligne des carrés de côtés 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …, $\frac{1}{n}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, leur aire totale est $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Elle se demande si cette aire reste inférieure ou égale à 2.

(a) Calcule S_1, S_2 et S_3 sous forme de fractions irréductibles.

(b) Jade suppose que $S_k \leqslant 2$ pour un entier $k \geqslant 1$. Quelle majoration obtient-elle pour S_{k+1} ? Peut-elle conclure que $S_{k+1} \leqslant 2$? Justifie.

(c) Montre que pour tout entier $k \geqslant 1$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)^2}$.

(d) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

(e) Montre que la suite (S_n) est croissante, puis déduis de la question précédente qu'elle est majorée par 2.