Terminale spécialité / Raisonnement par récurrence — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rédiger une récurrence et formules de somme*

Ex. 1 ★☆☆ Premier rang et rang k + 1

(a) Pour $n = 1$, le membre de gauche n'a qu'un terme : $2 \times 1 = 2$. Le membre de droite vaut $1 \times 2 = 2$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(b) $\mathcal{P}(k+1)$: « $2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$ ». Le dernier terme s'obtient en remplaçant n par $k+1$ dans $2n$.

(c) La propriété est énoncée pour tout entier naturel n : on commence donc à $n_0 = 0$. Pour $n = 0$, le membre de gauche n'a qu'un terme : $5^0 = 1$. Le membre de droite vaut $\frac{5^1-1}{4} = 1$.
Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

(d) Les exposants vont de 0 à n : la somme contient donc $n+1$ termes.

(e) $\mathcal{Q}(k+1)$: « $1 + 5 + \cdots + 5^k + 5^{k+1} = \dfrac{5^{k+2}-1}{4}$ ».

(f) $\frac{5^{k+1}-1}{4} + 5^{k+1} = \frac{5^{k+1}-1+4\times5^{k+1}}{4} = \frac{5\times5^{k+1}-1}{4} = \frac{5^{k+2}-1}{4}$. C'est le calcul clé de l'hérédité de $\mathcal{Q}$: à gauche, l'hypothèse $\mathcal{Q}(k)$ plus le dernier terme 5^{k+1}.

Ex. 2 ★☆☆ Compléter une rédaction

(a) **Initialisation** : pour $n = 1$, $S_1 = 1 \times 2 = 2$ et $\frac{1\times2\times3}{3} = 2$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(b) **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Hypothèse de récurrence : $S_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.
Montrons $\mathcal{P}(k+1)$, c'est-à-dire $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

(c) Le dernier terme s'obtient en remplaçant n par $k+1$ dans $n(n+1)$: c'est $(k+1)(k+2)$.
Donc $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$.

(d) Par hypothèse de récurrence, $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

(e) **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Ex. 3 ★★☆ Cinq rédactions, cinq erreurs

(a) Hugo suppose vrai exactement ce qu'il doit démontrer. Dans l'hérédité, on ne suppose la propriété que pour UN entier fixé : « Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. »

(b) Le dernier terme est $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, et non $k^2 + 1$. On écrit $S_{k+1} = 1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = S_k + (k+1)^2$.

(c) Non. Son hérédité est juste $(6(6^k + 2) - 10 = 6^{k+1} + 2)$, mais il a oublié l'initialisation. Or pour $n = 0$, $6^0 + 2 = 3$, et pour $n = 1$, $6 + 2 = 8$: aucun des deux n'est divisible par 5. Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

(d) La propriété est énoncée pour tout entier naturel n : on initialise donc au rang 0. Pour $n = 0$, la somme n'a qu'un terme, $0 + 1 = 1$, et $\frac{1\times2}{2} = 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(e) « La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. »

Ex. 4 ★★☆ La somme des carrés

(a) $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 4 = 5$, $S_3 = 5 + 9 = 14$. Et $\frac{1\times2\times3}{6} = 1$, $\frac{2\times3\times5}{6} = 5$, $\frac{3\times4\times7}{6} = 14$.

(b) Au rang $k+1$, on veut montrer $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, car $(k+1)+1 = k+2$ et $2(k+1)+1 = 2k+3$.

(c) On note $\mathcal{P}(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». **Initialisation** : $S_1 = 1$ et $\frac{1\times2\times3}{6} = 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. On a $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$ par hypothèse de récurrence, donc $S_{k+1} = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$. Or $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 7k + 6$, donc $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) $1^2 + \cdots + 20^2 = S_{20} = \frac{20\times21\times41}{6} = 2870$.

Ex. 5 ★★☆ Une somme de fractions

(a) $T_1 = \frac{1}{3}$ et $T_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

(b) On remplace n par $k+1$ dans le terme général : $2(k+1)-1 = 2k+1$ et $2(k+1)+1 = 2k+3$. On ajoute donc $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$.

(c) $\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$.

(d) On note $\mathcal{P}(n)$: « $T_n = \frac{n}{2n+1}$ ». **Initialisation** : $T_1 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2\times1+1} = \frac{1}{3}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1) : T_{k+1} = \frac{k+1}{2k+3}$. On a $T_{k+1} = T_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ par hypothèse de récurrence, et cette somme vaut $\frac{k+1}{2k+3}$ d'après la question précédente.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, $T_n = \frac{n}{2n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Ex. 6 ★★☆ Héréditaire… mais fausse

(a) Vrai. Soit $k \geqslant 1$ un entier tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors $1 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k^2+k+2}{2} + (k+1) = \frac{k^2+3k+4}{2}$. Or $(k+1)^2 + (k+1) + 2 = k^2 + 3k + 4$, donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(b) Faux. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite $\frac{1+1+2}{2} = 2$: l'initialisation est fausse. L'hérédité seule ne prouve rien.

(c) Vrai. La somme des termes d'une suite arithmétique donne $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, et $\frac{n^2+n+2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 1 \neq 0$ pour tout n.

(d) Faux. La propriété « $n \leqslant 50$ » est vraie pour $n = 1, \ldots, 50$, mais fausse pour $n = 51$. Vérifier des rangs ne remplace pas l'hérédité.

Ex. 7 ★★☆ La tirelire de Rayan

(a) Les dépôts sont 2, 5, 8.
Donc $T_1 = 2$, $T_2 = 2 + 5 = 7$ et $T_3 = 7 + 8 = 15$.

(b) Les dépôts forment une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 : la semaine k, Rayan dépose $2 + 3(k-1) = 3k - 1$ €. La semaine $k+1$, il dépose donc $3k + 2$ €, et $T_{k+1} = T_k + 3k + 2$.

Ex. 7 (suite)

(c) On note $\mathcal{P}(n)$: « $T_n = \frac{n(3n+1)}{2}$ ». **Initialisation** : $T_1 = 2$ et $\frac{1\times4}{2} = 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1) : T_{k+1} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$. Par hypothèse de récurrence, $T_{k+1} = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \frac{3k^2+7k+4}{2}$. Or $(k+1)(3k+4) = 3k^2 + 7k + 4$, donc $T_{k+1} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, $T_n = \frac{n(3n+1)}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) T_n augmente chaque semaine, car les dépôts sont positifs. $T_{18} = \frac{18\times55}{2} = 495 \leqslant 500$ et $T_{19} = \frac{19\times58}{2} = 551 > 500$. Le total dépasse 500 € au bout de 19 semaines.

Ex. 8 ★★★ Des cubes et des triangles

(a) $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 8 = 9$, $S_3 = 9 + 27 = 36$ et $S_4 = 36 + 64 = 100$.
On remarque que $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $36 = 6^2$ et $100 = 10^2$: $S_n = T_n^2$.
Conjecture : pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) Non. Quatre vérifications ne prouvent rien pour les autres entiers : la formule pourrait être fausse dès $n = 5$. Ces calculs donnent seulement l'initialisation. Il faut encore démontrer l'hérédité pour conclure par récurrence.

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
Initialisation : $S_1 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2\times2^2}{4} = 1$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$. Montrons $\mathcal{P}(k+1) : S_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.
Le dernier terme est $(k+1)^3$, donc $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$ (hypothèse de récurrence).
On factorise par $(k+1)^2$: $S_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(d) $11^3 + 12^3 + \cdots + 20^3 = S_{20} - S_{10}$.
$S_{20} = \left(\frac{20\times21}{2}\right)^2 = 210^2 = 44\,100$ et $S_{10} = \left(\frac{10\times11}{2}\right)^2 = 55^2 = 3\,025$.
Donc la somme vaut $44\,100 - 3\,025 = 41\,075$.

Ex. 9 ★★★ **Une somme qui commence à 0**

(a) $S_0 = 1 \times 2^0 = 1$ (un seul terme).
$S_1 = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 = 1 + 4 = 5$.
$S_2 = 1 + 4 + 3 \times 2^2 = 5 + 12 = 17$.

(b) $(k+1) \times 2^k$ est le dernier terme de S_k : il y est déjà. Le terme à ajouter s'obtient en remplaçant n par $k+1$ dans $(n+1) \times 2^n$. On a donc $S_{k+1} = S_k + (k+2) \times 2^{k+1}$.

(c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $S_n = n \times 2^{n+1} + 1$ ».
Initialisation : $S_0 = 1$ et $0 \times 2^1 + 1 = 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $S_k = k \times 2^{k+1} + 1$. Montrons $\mathcal{P}(k+1) : S_{k+1} = (k+1) \times 2^{k+2} + 1$.
$S_{k+1} = S_k + (k+2) \times 2^{k+1} = k \times 2^{k+1} + 1 + (k+2) \times 2^{k+1}$ (hypothèse de récurrence).
On factorise par 2^{k+1} : $S_{k+1} = (2k+2) \times 2^{k+1} + 1 = (k+1) \times 2^{k+2} + 1$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n : $S_n = n \times 2^{n+1} + 1$.

(d) Le dernier terme est $10 \times 2^9 = (9+1) \times 2^9$. Il s'agit donc de S_9, et non de S_{10}.
$S_9 = 9 \times 2^{10} + 1 = 9 \times 1\,024 + 1 = 9\,217$.

Ex. 10 ★★★ **La pyramide de Zoé**

(a) $C_1 = 1^2 = 1$, $C_2 = 1 + 3^2 = 10$ et $C_3 = 10 + 5^2 = 35$.

(b) $\mathcal{P}(k+1)$: « $C_{k+1} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$ », car $2(k+1) - 1 = 2k+1$ et $2(k+1)+1 = 2k+3$.
Le dernier terme de C_{k+1} est $(2(k+1)-1)^2 = (2k+1)^2$, donc $C_{k+1} = C_k + (2k+1)^2$.

Ex. 10 (suite)

(c) **Initialisation** : $C_1 = 1$ et $\frac{1 \times 1 \times 3}{3} = 1$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $C_k = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$. Montrons $\mathcal{P}(k+1) : C_{k+1} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.
$C_{k+1} = C_k + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$ (hypothèse de récurrence).
On factorise par $(2k+1)$: $C_{k+1} = \frac{(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}$.
Or $(k+1)(2k+3) = 2k^2 + 5k + 3$, donc $C_{k+1} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$: $C_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

(d) $C_{11} = \frac{11 \times 21 \times 23}{3} = 1\,771$ et $C_{12} = \frac{12 \times 23 \times 25}{3} = 2\,300$.
Comme $C_{11} \leqslant 2\,000 < C_{12}$, Zoé peut construire au maximum 11 étages complets.
Il lui reste $2\,000 - 1\,771 = 229$ cubes.

2. *Encadrer une suite et étudier son sens de variation*

Ex. 11 ★★★ **Compléter une hérédité avec une fonction croissante**

(a) Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \frac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) $f(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{5}{5} = 1$.

(c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ». **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et on a bien $0 \leqslant 0 \leqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(d) **Hérédité** : soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $0 \leqslant u_k \leqslant 1$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Les nombres 0, u_k et 1 sont dans $[0\,;+\infty[$, où f est croissante, donc l'ordre est conservé : $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

(e) Comme $0 \leqslant \frac{1}{2}$ (on a bien $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 1$), on obtient $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire. **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Ex. 12 ★☆☆ **Encadrer une expression : vrai ou faux ?**

(a) Faux. Multiplier par $-3 < 0$ inverse l'ordre : $-15 \leqslant -3x \leqslant -6$, puis en ajoutant 1 : $-14 \leqslant -3x + 1 \leqslant -5$. L'encadrement proposé est d'ailleurs absurde, car $-5 > -14$.

(b) Vrai. On multiplie par $2 > 0$: $0 \leqslant 2x \leqslant 8$. On ajoute 1 : $1 \leqslant 2x + 1 \leqslant 9$. La racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $1 \leqslant \sqrt{2x+1} \leqslant 3$.

(c) Vrai. La fonction $x \mapsto \frac{4}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$: elle inverse l'ordre, donc $\frac{4}{2} \leqslant \frac{4}{x} \leqslant \frac{4}{1}$, soit $2 \leqslant \frac{4}{x} \leqslant 4$.

(d) Faux. Pour $x = 0$, on a $x^2 = 0 < 1$. La fonction carré n'est pas monotone sur $[-1\,;2]$, on ne peut donc pas l'appliquer directement à l'encadrement. On coupe l'intervalle : sur $[-1\,;0]$, le carré est décroissant, donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$; sur $[0\,;2]$, il est croissant, donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Le bon encadrement est $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

(e) Vrai. L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle conserve les inégalités strictes : $0 < x$ donne $\mathrm{e}^0 < \mathrm{e}^x$, soit $1 < \mathrm{e}^x$.

(f) Faux. Une suite positive n'est pas forcément croissante. Par exemple $u_n = \frac{1}{n+1}$ est positive, mais $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$: elle est décroissante. Pour la croissance, il faut démontrer $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

Ex. 13 ★☆☆ **Choisir la bonne propriété pour le sens de variation**

(a) La suite est définie par récurrence : chaque terme est calculé à partir du précédent, et on n'a pas de formule de u_n en fonction de n. La récurrence permet de transmettre une propriété d'un rang au suivant.

(b) $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ». Démontrer « $u_n \geqslant 0$ » ne suffirait pas : c'est admis, et cela ne dit rien sur le sens de variation.

(c) $u_1 = \sqrt{2 \times 0 + 3} = \sqrt{3}$. **Initialisation** : $u_0 = 0 \leqslant \sqrt{3} = u_1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(d) **Hérédité** : de $u_k \leqslant u_{k+1}$, on multiplie par $2 > 0$ (l'ordre est conservé) : $2u_k \leqslant 2u_{k+1}$. On ajoute 3 : $2u_k + 3 \leqslant 2u_{k+1} + 3$. Ces deux nombres sont supérieurs ou égaux à 3, donc positifs, et la racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $\sqrt{2u_k+3} \leqslant \sqrt{2u_{k+1}+3}$, c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(e) **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

Ex. 14 ★★☆ **Les truites du lac**

(a) $u_1 = 0{,}8 \times 2 + 1 = 2{,}6$ et $u_2 = 0{,}8 \times 2{,}6 + 1 = 3{,}08$.

(b) Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 5$ ». **Initialisation** : $u_0 = 2$ et $u_1 = 2{,}6$, donc $2 \leqslant 2 \leqslant 2{,}6 < 5$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $2 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} < 5$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On multiplie par $0{,}8 > 0$ (l'ordre est conservé, y compris l'inégalité stricte) : $1{,}6 \leqslant 0{,}8u_k \leqslant 0{,}8u_{k+1} < 4$. On ajoute 1 : $2{,}6 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 5$. Comme $2 \leqslant 2{,}6$, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

(c) Le nombre de truites augmente chaque année ($u_n \leqslant u_{n+1}$), reste au moins égal à 2 000, et n'atteindra jamais 5 000 ($u_n < 5$).

(d) Oui. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}8u_n + 1 - u_n = 1 - 0{,}2u_n = 0{,}2(5 - u_n)$. Si $u_n < 5$, cette différence est strictement positive, donc $u_{n+1} > u_n$: un simple calcul suffit pour le sens de variation, une fois la majoration démontrée.

Ex. 15 ★★☆ **Une fonction décroissante inverse l'ordre**

(a) $u_1 = \frac{6}{2} = 3$, $u_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{6}{5/2} = \frac{12}{5}$. Comme $u_0 < u_1$ mais $u_1 > u_2$, la suite n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone.

(b) On ne peut pas commencer au rang 0, car $u_0 = 1 < \frac{3}{2}$: $\mathcal{P}(0)$ est fausse. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$: « $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 3$ ». **Initialisation** : $u_1 = 3$ et $\frac{3}{2} \leqslant 3 \leqslant 3$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On ajoute 1 : $\frac{5}{2} \leqslant u_k + 1 \leqslant 4$. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc elle inverse l'ordre : $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{u_k+1} \leqslant \frac{2}{5}$. On multiplie par $6 > 0$: $\frac{3}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{12}{5}$. Comme $\frac{12}{5} \leqslant 3$, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 3$.

(c) Non. Une fonction décroissante inverse l'ordre : de $u_k \leqslant u_{k+1}$, on déduit $u_{k+1} \geqslant u_{k+2}$, et non $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$. L'hérédité ne marche pas, et d'ailleurs $u_1 > u_2$ (question 1) montre que la conclusion de Maé est fausse.

Ex. 16 ★★☆ **Une fonction monotone seulement sur un intervalle**

(a) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$. Le raisonnement de Tom donnerait $0 \leqslant f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;2]$, ce qui est faux puisque $f(1) = 1$. Son erreur : f n'est pas monotone sur $[0\,;2]$, on ne peut donc pas lui appliquer directement l'encadrement.

(b) $f(x) = 2x - x^2$, donc $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$. Sur $[0\,;1[$, $f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$: f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

(c) Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_n < 1$ ». **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $0 < u_k < 1$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Les nombres 0, u_k et 1 sont dans $[0\,;1]$, où f est strictement croissante : elle conserve les inégalités strictes, donc $f(0) < f(u_k) < f(1)$, soit $0 < u_{k+1} < 1$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 1$.

(d) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n(1 - u_n)$. D'après la question 3, $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

Ex. 17 ★★★ **Conjecturer sur un escalier, puis démontrer**

(a) Sur la figure, les termes $u_0 = 8$, $u_1 \approx 3{,}7$, $u_2 \approx 3{,}1\ldots$ diminuent : on conjecture que (u_n) est décroissante. $\mathcal{C}$ coupe la droite $y = x$ au point d'abscisse 3, et les termes restent au-dessus : on conjecture que $u_n \geqslant 3$.

(b) $f(3) = \sqrt{9} = 3$: le point $(3\,;3)$ est bien sur $\mathcal{C}$ et sur la droite $y = x$. La fonction $x \mapsto x + 6$ est croissante et positive sur $[-6\,;+\infty[$, et la racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc f est croissante sur $[-6\,;+\infty[$.

(c) $\mathcal{P}(n)$: « $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$ ». **Initialisation** : $u_0 = 8$ et $u_1 = \sqrt{14}$. Comme $9 \leqslant 14 \leqslant 64$, on a $3 \leqslant \sqrt{14} \leqslant 8$, donc $3 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 8$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $3 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 8$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Ces nombres sont dans $[-6\,;+\infty[$, où f est croissante, donc $f(3) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(8)$, soit $3 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{14}$. Comme $\sqrt{14} \leqslant 8$, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Ex. 17 (suite)

(d) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et $u_n \geqslant 3$: la suite (u_n) est décroissante et minorée par 3.

Ex. 18 ★★★ **Une suite construite avec $x\,\mathrm{e}^{-x}$**

(a) f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$: f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

(b) $u_1 = f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$. $u_2 = f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} \approx 0{,}255$.

(c) Non. Pour conserver l'ordre, il suffit que f soit croissante sur un intervalle qui contient tous les nombres de l'encadrement. Ici, si les termes restent dans $[0\,;1]$, on peut appliquer f, qui est croissante sur $[0\,;1]$. En revanche, on ne pourrait pas le faire avec un encadrement qui déborde de $[0\,;1]$.

(d) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$, donc $0 < u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $0 < u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Les nombres 0, u_{k+1}, u_k et 1 sont dans $[0\,;1]$, où f est strictement croissante. Elle conserve donc l'ordre, et l'inégalité stricte : $f(0) < f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$, soit $0 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Comme $\mathrm{e}^{-1} \leqslant 1$, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. En particulier, $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0.

(e) D'après la question 4, $u_0 = 1 > 0$ et $u_{n+1} > 0$ pour tout n, donc $u_n > 0$ pour tout entier naturel n. Or $u_{n+1} - u_n = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n} - u_n = u_n(\mathrm{e}^{-u_n} - 1)$. Comme $u_n > 0$, on a $-u_n < 0$, donc $\mathrm{e}^{-u_n} < \mathrm{e}^0 = 1$, car l'exponentielle est strictement croissante. Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Ex. 19 ★★★ **Même fonction, deux destins**

(a) $u_1 = f(0) = 1$, $u_2 = f(1) = \frac{5}{4} = 1{,}25$ et $u_3 = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{89}{64} \approx 1{,}39$. Sur le graphique, l'escalier monte vers le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$, d'abscisse 2 (car $f(2) = 2$). On conjecture que (u_n) est croissante et majorée par 2. Ce n'est qu'une conjecture : la suite étant définie par récurrence, on la démontre par récurrence.

Ex. 19 **(suite)**

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ ».
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = 1$, et on a bien $0 \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant 2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc f aussi. Tous les nombres sont positifs, donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(2)$, soit $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$. Comme $f(0) = 1 \geqslant 0$ et $f(2) = 2 \leqslant 2$, on a $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2.

(c) $f(x) - x = \frac{x^2-4x+4}{4} = \frac{(x-2)^2}{4}$. $v_1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4} = 3{,}25$ et $v_2 = \frac{169}{64} + 1 = \frac{233}{64} \approx 3{,}64$.

(d) On note $\mathcal{P}(n)$: « $v_n \geqslant 3 + \frac{n}{4}$ ».
Initialisation : $v_0 = 3 \geqslant 3 + 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $v_k \geqslant 3 + \frac{k}{4}$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. D'après la question précédente, $v_{k+1} = v_k + \frac{(v_k-2)^2}{4}$. Or $v_k \geqslant 3$, donc $v_k - 2 \geqslant 1 > 0$. Le carré est croissant sur $[0\,;+\infty[$, donc $(v_k-2)^2 \geqslant 1$. Ainsi $v_{k+1} \geqslant 3 + \frac{k}{4} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{k+1}{4}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 3 + \frac{n}{4}$.

(e) $3 + \frac{n}{4} \geqslant 100 \iff n \geqslant 388$. Donc, pour tout $n \geqslant 388$, $v_n \geqslant 3 + \frac{n}{4} \geqslant 100$: $N = 388$ convient.

Ex. 20 ★★★ **La méthode de Héron pour approcher $\sqrt{5}$**

(a) $u_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3}$ et $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{15}{7}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{94}{21} = \frac{47}{21}$.

(b) Pour $x > 0$: $f(x) - \sqrt{5} = \frac{x^2+5-2\sqrt{5}\,x}{2x} = \frac{(x-\sqrt{5})^2}{2x}$.

(c) On note $\mathcal{P}(n)$: « u_n est défini et $u_n > \sqrt{5}$ ».
Initialisation : $u_0 = 3$ et $3^2 = 9 > 5$, donc $3 > \sqrt{5}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On a $u_k > \sqrt{5} > 0$, donc $u_{k+1} = f(u_k)$ est défini. Par la question 2, $u_{k+1} - \sqrt{5} = \frac{(u_k-\sqrt{5})^2}{2u_k}$. Le numérateur est strictement positif car $u_k \neq \sqrt{5}$, et le dénominateur aussi.
Donc $u_{k+1} > \sqrt{5}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est défini et $u_n > \sqrt{5}$.

Ex. 20 **(suite)**

(d) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n} - u_n\right) = \frac{5-u_n^2}{2u_n}$. D'après la question 3, $u_n > \sqrt{5} > 0$. Le carré est strictement croissant sur $[0\,;+\infty[$, donc $u_n^2 > 5$. Le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif, donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

(e) On a $u_2 > \sqrt{5} > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, elle inverse l'ordre : $\frac{1}{u_2} < \frac{1}{\sqrt{5}}$. On multiplie par $5 > 0$: $\frac{5}{u_2} < \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Avec $u_2 = \frac{47}{21}$, on obtient $\frac{105}{47} < \sqrt{5} < \frac{47}{21}$. L'amplitude vaut $\frac{47}{21} - \frac{105}{47} = \frac{4}{987} \approx 0{,}004 < 10^{-2}$.

3. *Démontrer une formule explicite*

Ex. 21 ★☆☆ **Bien démarrer : initialisation et rang de départ**

(a) $u_0 = 5$ et $2 \times 4^0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$ (attention : $4^0 = 1$).
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(b) La suite commence au rang 1 (v_0 n'existe pas), donc $n_0 = 1$. On a $v_1 = 1$ et $1^2 = 1$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(c) Non. On a bien $a_1 = 1 + 2^0 = 2 = 2^1$ et $a_2 = 2 + 2^1 = 4 = 2^2$, mais quelques rangs ne prouvent rien pour tout n. Il faut aussi l'hérédité : si $a_k = 2^k$, alors $a_{k+1} = 2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

(d) On remplace n par $k+1$ au numérateur et au dénominateur : $\frac{(k+1)+3}{(k+1)+1}$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$: « $z_{k+1} = \frac{k+4}{k+2}$ ». Ensuite, $z_0 = 3$ et $\frac{0+3}{0+1} = 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Ex. 22 ★☆☆ **Une hérédité à compléter**

(a) Hypothèse de récurrence : $u_k = 2^{k+2} - 3$.

(b) $\mathcal{P}(k+1)$: « $u_{k+1} = 2^{k+3} - 3$ », car $(k+1) + 2 = k + 3$.

(c) $u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+2} - 3) + 3 = 2 \times 2^{k+2} - 6 + 3 = 2^{k+3} - 3$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

(d) Non. Pour $k = 0$: $2 \times 2^2 = 8$ alors que $4^2 = 16$. On garde la base 2 et on ajoute 1 à l'exposant : $2^{k+2} \times 2 = 2^{k+3}$.

(e) $u_0 = 1$ et $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Ex. 23 ★☆☆ **Erreurs dans des copies**

(a) Hugo part de $\mathcal{P}(k+1)$, c'est-à-dire de ce qu'il doit démontrer. Il faut partir de la relation et utiliser l'hypothèse $v_k = 6k+2$: $v_{k+1} = v_k + 6 = 6k+2+6 = 6(k+1)+2$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(b) Non, elle a oublié l'initialisation : $w_0 = 4$ alors que $3^0 + 1 = 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est fausse. D'ailleurs $w_1 = 3 \times 4 - 2 = 10$ alors que $3^1 + 1 = 4$. Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

(c) La suite commence au rang 1, donc t_0 n'existe pas. Initialisation correcte : pour $n = 1$, $t_1 = 2$ et $1 \times (1+1) = 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(d) Avec la relation : $u_1 = 5 \times 2 = 10$ et $u_2 = 5 \times 10 = 50$. Avec la formule de Léo pour $k = 1$: $u_2 = 10^2 = 100$, donc c'est faux. Correction : $u_{k+1} = 5 \times 2 \times 5^k = 2 \times 5^{k+1}$, ce qui est $\mathcal{P}(k+1)$.

Ex. 24 ★★☆ **Une suite de fractions**

(a) $2 - v_k = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{2(k+1)-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$. Comme $k \geqslant 1$, $k+2 > 0$ et $k+1 > 0$, donc $2 - v_k > 0$. En particulier, $2 - v_k \neq 0$.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = \frac{n}{n+1}$ ». **Initialisation** : $v_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: « $v_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ ». D'après la question précédente, $2 - v_k = \frac{k+2}{k+1} \neq 0$, donc $v_{k+1} = \frac{1}{2 - v_k} = \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{n}{n+1}$.

(c) Comme $n+1 > 0$: $\frac{n}{n+1} \geqslant 0{,}99 \iff n \geqslant 0{,}99n + 0{,}99 \iff 0{,}01n \geqslant 0{,}99 \iff n \geqslant 99$. Le plus petit rang est $n = 99$, et on a bien $v_{99} = \frac{99}{100} = 0{,}99$.

Ex. 25 ★★☆ **Dérivées successives de x eˣ**

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: « pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x$ ». **Initialisation** : f est un produit, donc $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: « $f^{(k+1)}(x) = (x+k+1)\,\mathrm{e}^x$ ». On a $f^{(k+1)}(x) = \left((x+k)\,\mathrm{e}^x\right)' = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+k)\,\mathrm{e}^x = (x+k+1)\,\mathrm{e}^x$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x$.

(b) $f^{(20)}(0) = (0+20)\,\mathrm{e}^0 = 20$.

Ex. 25 (suite)

(c) $f^{(7)}(x) = (x+7)\,\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f^{(7)}(x) = 0 \iff x + 7 = 0 \iff x = -7$. L'ensemble des solutions est $\{-7\}$.

Ex. 26 ★★☆ **Le placement de Maëlle**

(a) Ajouter 5 % revient à multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$. On ajoute ensuite le versement de 200 €, donc $C_{n+1} = 1{,}05 \times C_n + 200$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « $C_n = 5\,000 \times 1{,}05^n - 4\,000$ ». **Initialisation** : $C_0 = 1\,000$ et $5\,000 \times 1{,}05^0 - 4\,000 = 1\,000$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité** : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: « $C_{k+1} = 5\,000 \times 1{,}05^{k+1} - 4\,000$ ». $C_{k+1} = 1{,}05 \times C_k + 200 = 1{,}05\,(5\,000 \times 1{,}05^k - 4\,000) + 200 = 5\,000 \times 1{,}05^{k+1} - 4\,200 + 200 = 5\,000 \times 1{,}05^{k+1} - 4\,000$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc pour tout entier naturel n, $C_n = 5\,000 \times 1{,}05^n - 4\,000$.

(c) $C_{10} = 5\,000 \times 1{,}05^{10} - 4\,000 \approx 4\,144{,}47$ €.

Ex. 27 ★★☆ **La conjecture de Jade**

(a) Non. $u_3 = u_2 + 2 + 1 = 4 + 3 = 7$ alors que $2^3 = 8$. Un seul terme suffit à réfuter la formule : quelques termes calculés ne prouvent jamais une formule.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ ». **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $\frac{0 \times 1}{2} + 1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité** : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: « $u_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$ ». $u_{k+1} = u_k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

(c) $u_{30} = \frac{30 \times 31}{2} + 1 = 465 + 1 = 466$.

Ex. 28 ★★★ **Conjecturer à partir d'un tableau**

(a) $u_4 = 2u_3 - 3 + 1 = 2 \times 11 - 2 = 20$ et $u_5 = 2u_4 - 4 + 1 = 40 - 3 = 37$.

(b) $u_0 - 0 = 1$, $u_1 - 1 = 2$, $u_2 - 2 = 4$, $u_3 - 3 = 8$, $u_4 - 4 = 16$, $u_5 - 5 = 32$: on reconnaît les puissances de 2. On conjecture que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

Ex. 28 **(suite)**

(c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n + n$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $2^0 + 0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k = 2^k + k$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: $u_{k+1} = 2^{k+1} + k + 1$. On part de la relation de récurrence : $u_{k+1} = 2u_k - k + 1 = 2(2^k + k) - k + 1 = 2^k \times 2 + 2k - k + 1 = 2^{k+1} + k + 1$.

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

(d) Faux : $u_2 = 6$ est pair. Deux exemples ne prouvent rien et un seul contre-exemple suffit à réfuter l'affirmation. En fait, pour $n \geqslant 1$, 2^n est pair donc $u_n = 2^n + n$ a la même parité que n.

(e) $u_8 = 2^8 + 8 = 264 \leqslant 500$ et $u_9 = 2^9 + 9 = 521 > 500$. De plus, $u_n = 2^n + n$ est croissante (somme de deux suites croissantes), donc $u_n \leqslant 264$ pour $n \leqslant 8$. Le plus petit entier est $n = 9$.

Ex. 29 ★★★ **Passer par l'inverse pour conjecturer**

(a) $u_1 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$; $u_2 = \frac{2/3}{1+2/3} = \frac{2/3}{5/3} = \frac{2}{5}$; $u_3 = \frac{2/5}{7/5} = \frac{2}{7}$.

(b) $\frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{u_1} = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{u_2} = \frac{5}{2}$, $\frac{1}{u_3} = \frac{7}{2}$: on ajoute 1 à chaque fois. On conjecture $\frac{1}{u_n} = \frac{2n+1}{2}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

(c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{2}{2n+1}$ ».

Initialisation : $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2\times 0+1} = 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $u_k = \frac{2}{2k+1}$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: $u_{k+1} = \frac{2}{2k+3}$. D'après l'hypothèse, $u_k > 0$, donc $1 + u_k > 0$: on peut diviser. $1 + u_k = \frac{2k+1+2}{2k+1} = \frac{2k+3}{2k+1}$, d'où $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{2}{2k+1} \times \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{2}{2k+3} = \frac{2}{2(k+1)+1}$.

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

(d) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2n+3} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2(2n+1)-2(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{-4}{(2n+1)(2n+3)} < 0$.

Donc (u_n) est décroissante.

(e) $u_n < 0{,}01 \iff \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{100} \iff 2n + 1 > 200 \iff n > 99{,}5$. Le plus petit entier est $n = 100$: $u_{100} = \frac{2}{201} \approx 0{,}00995$

(et $u_{99} = \frac{2}{199} \approx 0{,}01005$).

Ex. 30 ★★★ **Les nénuphars de l'étang**

(a) D'une semaine à la suivante, la surface est multipliée par 2 puis diminuée de 5, donc $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

$u_2 = 2 \times 7 - 5 = 9$, $u_3 = 2 \times 9 - 5 = 13$,

$u_4 = 2 \times 13 - 5 = 21$.

(b) Non. Pour $n = 4$: $4^2 - 4 + 7 = 19$ alors que $u_4 = 21$. La formule est fausse. Trois termes vérifiés ne prouvent rien.

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n + 5$ ».

Initialisation : le premier rang est $n = 1$: $u_1 = 7$ et $2^1 + 5 = 7$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $u_k = 2^k + 5$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: $u_{k+1} = 2^{k+1} + 5$. On part de la relation de récurrence : $u_{k+1} = 2u_k - 5 = 2(2^k + 5) - 5 = 2^k \times 2 + 10 - 5 = 2^{k+1} + 5$.

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n + 5$.

(d) On cherche $u_n \geqslant 1\,000$, soit $2^n \geqslant 995$. $u_9 = 2^9 + 5 = 517 < 1\,000$ et $u_{10} = 2^{10} + 5 = 1\,029 \geqslant 1\,000$. Comme 2^n augmente avec n, $u_n \leqslant 517$ pour $n \leqslant 9$. L'étang est entièrement couvert à partir de la semaine 10.

4. *Démontrer une divisibilité*

Ex. 31 ★☆☆ **Compléter l'hérédité : 7 puissance n moins 1**

(a) $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 6 \times 0$ et $7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 6 \times 8$. Comme 0 et 8 sont des entiers, ces deux nombres sont divisibles par 6.

(b) $\mathcal{P}(k)$ est vraie : il existe un **entier** m tel que $7^k - 1 = 6m$.

(c) $7(7^k - 1) + 6 = 7 \times 7^k - 7 + 6 = 7^{k+1} - 1$.

(d) D'après l'hypothèse, $7^k - 1 = 6m$, donc $7^{k+1} - 1 = 7 \times 6m + 6 = 6(7m + 1)$.

(e) m est un entier, donc $7m$ est un entier (produit d'entiers) et $7m + 1$ est un entier (somme d'entiers). En posant $m' = 7m + 1$, on a $7^{k+1} - 1 = 6m'$ avec m' entier : $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

Ex. 32 ★☆☆ **L'erreur de Lou**

(a) $5^2 - 1 = 24$ et $4 \times 2 = 8$. Comme $24 \neq 8$, l'égalité $5^k - 1 = 4k$ est fausse pour $k = 2$. Pourtant, $24 = 4 \times 6$ est bien divisible par 4.

(b) Lou impose que le quotient soit égal à k. Or « divisible par 4 » signifie seulement qu'il existe **un entier** m, quelconque, tel que $5^k - 1 = 4m$. Lou suppose une égalité qui est fausse en général.

(c) Il existe un entier m tel que $5^k - 1 = 4m$, c'est-à-dire $5^k = 4m + 1$.

(d) $5^{k+1} - 1 = 5 \times 5^k - 1 = 5(4m + 1) - 1 = 20m + 4 = 4(5m + 1)$. Comme m est un entier, $5m + 1$ est un entier (produit et somme d'entiers).
Donc $5^{k+1} - 1$ est divisible par 4 : la propriété est héréditaire.

Ex. 33 ★☆☆ **Vrai ou faux : les pièges de la divisibilité**

(a) Faux. Vérifier un seul rang ne démontre rien pour les autres rangs. Il manque l'hérédité : si $13^k - 1 = 12m$ avec m entier, alors $13^{k+1} - 1 = 13(12m + 1) - 1 = 12(13m + 1)$. La propriété est donc vraie, mais ce raisonnement ne la démontrait pas.

(b) Faux. Elle est bien héréditaire : si $6^k + 2 = 5m$ avec m entier, alors $6^{k+1} + 2 = 6(5m - 2) + 2 = 5(6m - 2)$. Mais l'initialisation échoue : $6^0 + 2 = 3$, qui n'est pas divisible par 5. Sans initialisation, on ne peut rien conclure.

(c) Faux. Si m n'est pas un entier, l'égalité ne dit rien : par exemple $5 = 7 \times \frac{5}{7}$, et pourtant 5 n'est pas divisible par 7. Il faut écrire « il existe un **entier** m ».

(d) Faux. Pour $n = 0$, $2^0 + 1 = 2$, qui n'est pas divisible par 3. Un seul contre-exemple suffit.

Ex. 34 ★★☆ **Deux puissances : 8 puissance n moins 3 puissance n**

(a) $8^0 - 3^0 = 0 = 5 \times 0$; $8^1 - 3^1 = 5 = 5 \times 1$; $8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$. Ces trois nombres sont divisibles par 5.

Ex. 34 **(suite)**

(b) **Initialisation** : pour $n = 0$, $8^0 - 3^0 = 0 = 5 \times 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Il existe un entier m tel que $8^k - 3^k = 5m$, donc $8^k = 5m + 3^k$. Alors $8^{k+1} - 3^{k+1} = 8(5m + 3^k) - 3 \times 3^k = 40m + 5 \times 3^k = 5(8m + 3^k)$. Comme m et 3^k sont des entiers, $8m + 3^k$ est un entier (produit et somme d'entiers) : $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $8^n - 3^n$ est divisible par 5.

(c) Non. Pour $n = 1$, $8^1 - 3^1 = 5$, qui n'est pas divisible par 10. Ce contre-exemple suffit.

Ex. 35 ★★☆ **Un calcul plus long : divisibilité par 9**

(a) $n = 0 : 1 + 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$; $n = 1 : 4 + 15 - 1 = 18 = 9 \times 2$; $n = 2 : 16 + 30 - 1 = 45 = 9 \times 5$.

(b) Il existe un entier m tel que $4^k + 15k - 1 = 9m$, donc $4^k = 9m - 15k + 1$.

(c) $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \times 4^k + 15k + 14 = 4(9m - 15k + 1) + 15k + 14 = 36m - 60k + 4 + 15k + 14 = 36m - 45k + 18 = 9(4m - 5k + 2)$.

(d) m et k sont des entiers, donc $4m - 5k + 2$ est un entier (produits et sommes d'entiers), et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Initialisation : $4^0 + 15 \times 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$: les questions 2 et 3 donnent $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 9(4m - 5k + 2)$, avec $4m - 5k + 2$ entier, donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

Ex. 36 ★★☆ **n au cube moins n : avec ou sans récurrence**

(a) $0^3 - 0 = 0$; $1^3 - 1 = 0$; $2^3 - 2 = 6$; $3^3 - 3 = 24$. Ce sont tous des multiples de 3.

(b) $(k+1)^3 = (k+1)^2(k+1) = (k^2 + 2k + 1)(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Ex. 36 **(suite)**

(c) **Initialisation** : pour $n = 0$, $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Il existe un entier m tel que $k^3 - k = 3m$. Alors $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k^2 + 3k = 3m + 3(k^2 + k) = 3(m + k^2 + k)$. Comme m et k sont des entiers, $m + k^2 + k$ est un entier : $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 3.

(d) $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$, donc $(n-1) \times n \times (n+1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n$. Les nombres $n-1$, n et $n+1$ sont trois entiers consécutifs, donc l'un d'eux est un multiple de 3, et le produit aussi. La récurrence est donc possible, mais elle n'est pas obligatoire.

Ex. 37 ★★☆ **Les pièces de Malik**

(a) $u_1 = 7 \times 6 - 12 = 30$; $u_2 = 7 \times 30 - 12 = 198$; $u_3 = 7 \times 198 - 12 = 1374$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « u_n est divisible par 6 ».
Initialisation : $u_0 = 6 = 6 \times 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Il existe un entier m tel que $u_k = 6m$. Alors $u_{k+1} = 7 \times 6m - 12 = 42m - 12 = 6(7m - 2)$. Comme m est un entier, $7m - 2$ est un entier : $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 6.

(c) Non. On a bien $u_2 = 198 = 9 \times 22$, mais un seul rang ne suffit pas : $u_0 = 6$ et $u_1 = 30$ ne sont pas divisibles par 9 (la somme des chiffres de 1374 vaut 15, donc u_3 non plus).

Ex. 38 ★★★ **Chercher le diviseur caché**

(a) $A_0 = 3^1 + 2^2 = 7$; $A_1 = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 = 5 \times 7$; $A_2 = 3^5 + 2^4 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$. Le seul facteur premier commun est 7 : on conjecture que A_n est divisible par 7 pour tout entier naturel n.

Ex. 38 **(suite)**

(b) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « A_n est divisible par 7 ».
Initialisation : $A_0 = 7 = 7 \times 1$, et 1 est un entier.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Il existe un entier m tel que $3^{2k+1} + 2^{k+2} = 7m$, soit $3^{2k+1} = 7m - 2^{k+2}$.
$A_{k+1} = 3^{2k+3} + 2^{k+3} = 9 \times 3^{2k+1} + 2 \times 2^{k+2} = 9(7m - 2^{k+2}) + 2 \times 2^{k+2} = 63m - 7 \times 2^{k+2} = 7(9m - 2^{k+2})$.
Comme m et 2^{k+2} sont des entiers, $m' = 9m - 2^{k+2}$ est un entier et $A_{k+1} = 7m'$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, A_n est divisible par 7.

(c) Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, $A_n = 7p$ avec p entier. Or $3^{2n+1} \geqslant 3^3 = 27$, donc $A_n > 7$, d'où $p \geqslant 2$. Ainsi 7 est un diviseur de A_n différent de 1 et de A_n : A_n n'est pas premier.

Ex. 39 ★★★ **Un lemme avant la récurrence principale**

(a) $n = 0 : 0 = 6 \times 0$; $n = 1 : 5 + 1 = 6 = 6 \times 1$; $n = 2 : 40 + 2 = 42 = 6 \times 7$; $n = 3 : 135 + 3 = 138 = 6 \times 23$.

(b) On note $\mathcal{Q}(n)$: « $n^2 + n$ est divisible par 2 ».
Initialisation : $0^2 + 0 = 0 = 2 \times 0$.
Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{Q}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{Q}(k+1)$. Il existe un entier p tel que $k^2 + k = 2p$.
$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2k + 2 = 2p + 2(k+1) = 2(p + k + 1)$, et $p + k + 1$ est un entier (somme d'entiers).
Donc $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $n^2 + n$ est divisible par 2.

(c) $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, donc $5(k+1)^3 + (k+1) = 5k^3 + 15k^2 + 15k + 5 + k + 1 = (5k^3 + k) + 15(k^2 + k) + 6$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) On note $\mathcal{P}(n)$: « $5n^3 + n$ est divisible par 6 ».
Initialisation : $5 \times 0^3 + 0 = 0 = 6 \times 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Il existe un entier m tel que $5k^3 + k = 6m$.
D'après la question 2, $k^2 + k = 2p$ avec p entier. Avec la question 3 : $5(k+1)^3 + (k+1) = 6m + 15 \times 2p + 6 = 6m + 30p + 6 = 6(m + 5p + 1)$. Comme m et p sont des entiers, $m + 5p + 1$ est un entier.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

Ex. 40 ★★★ **Le cas général : a puissance n moins 1**

(a) $6^2 - 1 = 35 = 5 \times 7$ et $6^3 - 1 = 215 = 5 \times 43$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$ ».
Initialisation : $a^0 - 1 = 0 = (a-1) \times 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Il existe un entier m tel que $a^k - 1 = (a-1)m$, soit $a^k = (a-1)m + 1$.
$a^{k+1} - 1 = a \times a^k - 1 = a\big((a-1)m + 1\big) - 1 = a(a-1)m + (a-1) = (a-1)(am+1)$.
Comme a et m sont des entiers, $am + 1$ est un entier (produit et somme d'entiers).
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$.

(c) Avec $a = 11$: pour tout entier naturel n, $11^n - 1 = 10m$ avec m entier. Comme $11^n \geqslant 1$, on a $m \geqslant 0$, et $11^n = 10m + 1$. Le chiffre des unités de 11^n est donc 1.

(d) Non. Pour $n = 1$: $6^1 - 1 = 5$, qui n'est pas divisible par 35. Un seul rang où la propriété est vraie ($n = 2$) ne prouve rien pour tous les rangs.

(e) Pour tout entier naturel n, $6^{2n} = (6^2)^n = 36^n$. D'après la question 2 avec $a = 36$, $36^n - 1$ est divisible par $36 - 1 = 35$.
Donc $6^{2n} - 1$ est divisible par 35 pour tout entier naturel n.

5. *Démontrer une inégalité : Bernoulli et rang de départ*

Ex. 41 ★☆☆ **Tester les petits rangs avant d'initialiser**

(a) $2^0 = 1 \geqslant 0 = 0^2$; $2^1 = 2 \geqslant 1 = 1^2$; $2^2 = 4 \geqslant 4 = 2^2$.
Donc $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

(b) $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$. Comme $8 < 9$, $\mathcal{P}(3)$ est fausse.

(c) $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. On a $16 \geqslant 16$, donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

(d) Si l'hérédité était vraie pour tout $k \geqslant 0$, alors pour $k = 2$: $\mathcal{P}(2)$ vraie entraînerait $\mathcal{P}(3)$ vraie. Or $\mathcal{P}(2)$ est vraie et $\mathcal{P}(3)$ est fausse : l'hérédité ne peut pas être vraie pour $k = 2$. Sa rédaction contient donc une erreur.

(e) Comme $\mathcal{P}(3)$ est fausse, la conclusion ne peut pas porter sur $n = 3$: il faut $n_0 \geqslant 4$. Comme $\mathcal{P}(4)$ est vraie, on choisit $n_0 = 4$
(il faudra alors démontrer l'hérédité pour tout $k \geqslant 4$).

Ex. 42 ★☆☆ **Bernoulli pour $a > -1$: hérédité à compléter**

(a) $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$.

(b) Comme $a > -1$, on a $1 + a > 0$: $1 + a$ est strictement positif.

(c) Par hypothèse, $(1+a)^k \geqslant 1 + ka$. On multiplie par $1 + a > 0$, donc le sens est conservé :
$(1+a)^{k+1} \geqslant (1+ka)(1+a)$.

(d) $(1+ka)(1+a) = 1 + a + ka + ka^2 = 1 + (k+1)a + ka^2$.

(e) $ka^2 \geqslant 0$ car $k \geqslant 0$ et $a^2 \geqslant 0$.
Donc $(1+ka)(1+a) \geqslant 1 + (k+1)a$. Finalement $(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)a$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(f) $(1 - 0{,}2)^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512$ et $1 + 3 \times (-0{,}2) = 0{,}4$. On a bien $0{,}512 \geqslant 0{,}4$.

Ex. 43 ★☆☆ **L'erreur de Tom : multiplier par un négatif**

(a) $(-2)^5 = -32$ et $1 - 15 = -14$. Comme $-32 < -14$, $\mathcal{P}(5)$ est fausse.

(b) Tom multiplie les deux membres par -2, qui est strictement négatif, sans changer le sens de l'inégalité. Or multiplier par un nombre négatif inverse le sens.

(c) $(1 - 3k) \times (-2) = 6k - 2$, donc $(-2)^{k+1} \leqslant 6k - 2$.

(d) La preuve multiplie l'hypothèse par $1 + a$: il faut $1 + a > 0$, c'est-à-dire $a > -1$. Ici $1 + a = -2 < 0$: la preuve ne s'applique pas, et la question 1 montre que l'inégalité est même fausse.

Ex. 44 ★★☆ **Le placement d'Inès**

(a) On note $\mathcal{P}(n)$: « $1{,}04^n \geqslant 1 + 0{,}04n$ ».
Initialisation : $1{,}04^0 = 1$ et $1 + 0{,}04 \times 0 = 1$, et on a $1 \geqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. $1{,}04^{k+1} = 1{,}04 \times 1{,}04^k$. Comme $1{,}04 > 0$, $1{,}04^{k+1} \geqslant 1{,}04(1 + 0{,}04k) = 1{,}04 + 0{,}0416k = 1 + 0{,}04(k+1) + 0{,}0016k$. Or $0{,}0016k \geqslant 0$, donc $1{,}04^{k+1} \geqslant 1 + 0{,}04(k+1)$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $1{,}04^n \geqslant 1 + 0{,}04n$.

(b) On multiplie par $500 > 0$, le sens est conservé : $C_n = 500 \times 1{,}04^n \geqslant 500(1 + 0{,}04n) = 500 + 20n$.

(c) $500 + 20n \geqslant 1\,000 \iff 20n \geqslant 500 \iff n \geqslant 25$. Au bout de 25 ans, on est sûr que $C_n \geqslant 1\,000$.

(d) $500 + 20n$ devient aussi grand qu'on veut, et C_n reste au-dessus. $500 + 20n \geqslant 1\,000\,000 \iff n \geqslant 49\,975$: pour $n \geqslant 49\,975$, on a $C_n \geqslant 1\,000\,000$.

Ex. 45 ★★☆ **$2^n \geqslant n^2$ à partir du bon rang**

(a) $2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2$. Si $k \geqslant 3$, alors $k - 1 \geqslant 2$, donc $(k-1)^2 \geqslant 4$ et $(k-1)^2 - 2 \geqslant 2 > 0$.
Donc $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.

(b) **Initialisation** : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 4$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. $2^{k+1} = 2 \times 2^k$. Comme $2 > 0$, $2^{k+1} \geqslant 2k^2$. Comme $k \geqslant 4 \geqslant 3$, la question 1 donne $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
Donc $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(4)$ est vraie et la propriété est héréditaire à partir du rang 4. Donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

(c) Pour $n \geqslant 4$: $2^n \geqslant n^2 > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc $\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$. On multiplie par $n > 0$: $\frac{n}{2^n} \leqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Ex. 46 ★★☆ **Les étagères de Lina : $n! \geqslant 2^{n-1}$**

(a) $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$; $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$.

(b) $(k+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times k \times (k+1) = k! \times (k+1)$.

Ex. 46 **(suite)**

(c) On note $\mathcal{P}(n)$: « $n! \geqslant 2^{n-1}$ ».
Initialisation : $1! = 1$ et $2^0 = 1$, et on a $1 \geqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. $(k+1)! = (k+1) \times k!$. Comme $k + 1 > 0$, $(k+1)! \geqslant (k+1) \times 2^{k-1}$. Or $k + 1 \geqslant 2$ et $2^{k-1} > 0$, donc $(k+1) \times 2^{k-1} \geqslant 2 \times 2^{k-1} = 2^k$.
Donc $(k+1)! \geqslant 2^k$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

(d) Avec $n = 20$: $20! \geqslant 2^{19} = 524\,288 > 500\,000$.

Ex. 47 ★★☆ **Deux colonies de bactéries**

(a) 3^n : 1, 3, 9, 27 ; $n^2 + 4n$: 0, 5, 12, 21. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont fausses ($3 < 5$ et $9 < 12$).

(b) **Initialisation** : $3^3 = 27$ et $3^2 + 4 \times 3 = 21$; $27 \geqslant 21$, donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel, $k \geqslant 3$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$, c'est-à-dire $3^{k+1} \geqslant (k+1)^2 + 4(k+1) = k^2 + 6k + 5$. Comme $3 > 0$, $3^{k+1} = 3 \times 3^k \geqslant 3k^2 + 12k$. Or $3k^2 + 12k - (k^2 + 6k + 5) = 2k^2 + 6k - 5 \geqslant 2 \times 9 + 6 \times 3 - 5 = 31 > 0$ car $k \geqslant 3$.
Donc $3^{k+1} \geqslant (k+1)^2 + 4(k+1)$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(3)$ est vraie et la propriété est héréditaire à partir du rang 3. Donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 3$, $3^n \geqslant n^2 + 4n$.

(c) D'après la question 1, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, mais $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont fausses. D'après la question 2, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.
Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 3$, et seulement pour ces entiers. Une propriété vraie au rang 0 peut être fausse aux rangs suivants : avant d'initialiser, on teste les petits rangs.

Ex. 48 ★★★ **Les abonnés de Sacha : améliorer Bernoulli**

(a) On applique Bernoulli avec $a = 0{,}2 > 0$: pour tout entier naturel n, $1{,}2^n \geqslant 1 + 0{,}2n$. Or $1 + 0{,}2n \geqslant 100 \iff 0{,}2n \geqslant 99 \iff n \geqslant 495$. Donc, pour tout $n \geqslant 495$, on a $1{,}2^n \geqslant 1 + 0{,}2n \geqslant 100$: $N = 495$ convient.

Ex. 48 **(suite)**

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « $(1+a)^n \geqslant 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$ ».
Initialisation : pour $n=0$, $(1+a)^0=1$ et $1+0+0=1$, et on a bien $1\geqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k\geqslant 0$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On a $(1+a)^{k+1}=(1+a)^k\times(1+a)$.
Comme $1+a>0$, on peut multiplier l'hypothèse par $1+a$ sans changer le sens : $(1+a)^{k+1}\geqslant \left(1+ka+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)(1+a)$. On développe : $\left(1+ka+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)(1+a)=1+(k+1)a+\left(k+\frac{k(k-1)}{2}\right)a^2+\frac{k(k-1)}{2}a^3$. De plus, $k+\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(k+1)k}{2}$.
Le terme $\frac{k(k-1)}{2}a^3$ est positif, car $k(k-1)\geqslant 0$ pour tout entier naturel k et $a\geqslant 0$. On le retire et on obtient $(1+a)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)a+\frac{(k+1)k}{2}a^2$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Donc, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(c) Avec $a=0{,}2$, on obtient $1{,}2^n\geqslant 1+0{,}2n+0{,}02n(n-1)$. On cherche les n tels que $1+0{,}2n+0{,}02n(n-1)\geqslant 100$. En multipliant par $50>0$, cela revient à $50+10n+n^2-n\geqslant 5000$, c'est-à-dire $n^2+9n-4950\geqslant 0$.
Le discriminant vaut $\Delta=81+19\,800=19\,881=141^2$, donc les racines sont $\frac{-9-141}{2}=-75$ et $\frac{-9+141}{2}=66$.
Ainsi $n^2+9n-4950=(n-66)(n+75)$, et ce produit est positif pour $n\geqslant 66$.
Donc $N'=66$: pour tout $n\geqslant 66$, $1{,}2^n\geqslant 100$.

(d) $1{,}2^{25}\approx 95{,}40<100$ et $1{,}2^{26}\approx 114{,}48\geqslant 100$, donc le plus petit entier est 26. On a $26<66<495$: les deux inégalités donnent des seuils trop grands, mais ils sont démontrés. L'inégalité améliorée donne un seuil beaucoup plus proche du vrai.

Ex. 49 ★★★ **$2^n\geqslant n^3$: l'hérédité ne suffit pas**

(a) $n=0:1\geqslant 0$; $n=1:2\geqslant 1$. $n=2:4<8$; $n=3:8<27$; $n=4:16<64$; $n=5:32<125$; $n=6:64<216$; $n=7:128<343$; $n=8:256<512$; $n=9:512<729$. $n=10:1024\geqslant 1000$. Parmi ces entiers, $\mathcal{P}(n)$ est vraie seulement pour $n=0$, $n=1$ et $n=10$.

(b) $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$.
Donc $2k^3-(k+1)^3=k^3-3k^2-3k-1=k^2(k-3)-3k-1$.

(c) Soit $k\geqslant 4$. Alors $k-3\geqslant 1$ et $k^2>0$, donc $k^2(k-3)\geqslant k^2$. Il vient $2k^3-(k+1)^3\geqslant k^2-3k-1=k(k-3)-1$. Or $k\geqslant 4$ et $k-3\geqslant 1$, donc $k(k-3)\geqslant 4$.
On en déduit $2k^3-(k+1)^3\geqslant 4-1=3>0$.
Donc $2k^3\geqslant (k+1)^3$.

Ex. 49 **(suite)**

(d) Non. L'hérédité n'est établie que pour $k\geqslant 4$, donc on ne peut pas passer de $\mathcal{P}(0)$ à $\mathcal{P}(1)$, puis à $\mathcal{P}(2)$, etc. D'ailleurs $\mathcal{P}(2)$ est fausse ($4<8$). Il faut initialiser à un rang $n_0\geqslant 4$ où la propriété est vraie. Or $\mathcal{P}(4)$, …, $\mathcal{P}(9)$ sont fausses : le premier rang possible est $n_0=10$.

(e) **Initialisation** : pour $n=10$, $2^{10}=1024$ et $10^3=1000$. On a $1024\geqslant 1000$, donc $\mathcal{P}(10)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k\geqslant 10$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On a $2^{k+1}=2\times 2^k$. Comme $2>0$, on multiplie l'hypothèse $2^k\geqslant k^3$ par 2 : $2^{k+1}\geqslant 2k^3$.
Comme $k\geqslant 10\geqslant 4$, la question précédente donne $2k^3\geqslant (k+1)^3$.
Donc $2^{k+1}\geqslant (k+1)^3$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(10)$ est vraie et la propriété est héréditaire à partir du rang 10. Donc, par récurrence, pour tout entier $n\geqslant 10$, $2^n\geqslant n^3$.

Ex. 50 ★★★ **Les carrés de Jade : renforcer la propriété**

(a) $S_1=1$, $S_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ et $S_3=\frac{5}{4}+\frac{1}{9}=\frac{45+4}{36}=\frac{49}{36}$.

(b) $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)^2}$, donc $S_{k+1}\leqslant 2+\frac{1}{(k+1)^2}$. Ce majorant est strictement supérieur à 2, donc Jade ne peut pas conclure $S_{k+1}\leqslant 2$: l'hérédité est bloquée. L'hypothèse est trop faible, et il faut démontrer une propriété plus forte.

(c) On met au même dénominateur $k(k+1)^2$: $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}$. Le numérateur vaut $k^2+2k+1-k^2-k-k=1$, d'où l'égalité.

(d) On note $\mathcal{P}(n)$: « $S_n\leqslant 2-\frac{1}{n}$ ». **Initialisation** : pour $n=1$, $S_1=1$ et $2-\frac{1}{1}=1$. On a $1\leqslant 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : soit k un entier naturel, $k\geqslant 1$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On a $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)^2}$. On ajoute $\frac{1}{(k+1)^2}$ aux deux membres de l'hypothèse : $S_{k+1}\leqslant 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$. On étudie la différence : $\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left(2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$.
Donc $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{k+1}$, puis $S_{k+1}\leqslant 2-\frac{1}{k+1}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier $n\geqslant 1$, $S_n\leqslant 2-\frac{1}{n}$.

(e) Pour tout $n\geqslant 1$, $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$, donc (S_n) est croissante. De plus, $S_n\leqslant 2-\frac{1}{n}<2$, donc (S_n) est majorée par 2 : l'aire totale des carrés de Jade reste toujours inférieure à 2.