Récurrence : inégalités, encadrements – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Raisonnement par récurrence · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Multiplier une inégalité par un nombre négatif change son sens : $1 \leqslant u \leqslant 3$ donne $-9 \leqslant -3u \leqslant -3$.
- Entre nombres strictement positifs, passer à l'inverse change le sens des inégalités.
- La fonction carré n'est croissante que sur $[0;+\infty[$: $-4 \leqslant u \leqslant 2$ donne $0 \leqslant u^2 \leqslant 16$.
- On n'applique une fonction f à un encadrement que si f est croissante sur un intervalle qui contient les termes, et on le dit.
- Divisible par d : « il existe un **entier** m tel que … $= dm$ » ; à la fin, on justifie que le facteur obtenu est un entier.
- On initialise au rang où l'hérédité commence à marcher : une inégalité peut être fausse pour les petites valeurs de n.

Exercice 1 – Transformer un encadrement ★

Déduis de l'encadrement de u un encadrement de l'expression demandée. Justifie chaque étape.

a) $0 \leqslant u \leqslant 2$: encadre $3u+1$.

b) $1 \leqslant u \leqslant 4$: encadre $-2u+5$.

c) $2 \leqslant u \leqslant 6$: encadre $\dfrac{u}{4}-1$.

d) $0 \leqslant u \leqslant 3$: encadre u^2.

e) $1 \leqslant u \leqslant 3$: encadre $\dfrac{1}{u+1}$.

f) $2 \leqslant u \leqslant 7$: encadre $\sqrt{u+2}$.

g) $-1 \leqslant u \leqslant 2$: encadre u^2.

h) $0 \leqslant u \leqslant 1$: encadre $2-\dfrac{3}{u+2}$.

Exercice 2 – Fonction croissante et images des bornes ★

Montre que f est croissante sur l'intervalle donné, puis encadre $f(x)$ pour x dans cet intervalle.

a) $f(x)=3x-2$ sur $[1;4]$

b) $f(x)=x^2+1$ sur $[0;3]$

c) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$ sur $[0;5]$

d) $f(x)=\sqrt{x+5}$ sur $[-1;4]$

e) $f(x)=6-\dfrac{4}{x+1}$ sur $[0;3]$

f) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ sur $[0;2]$

g) $f(x)=e^{x-1}$ sur $[0;1]$

h) $f(x)=x^2-4x$ sur $[2;5]$

Exercice 3 – Divisibilité : l'étape clé ★

k et m sont des entiers naturels. Avec l'égalité donnée, écris l'expression demandée comme un multiple du nombre indiqué.

a) $7^k = 3m + 1$. Écris $7^{k+1} - 1$ comme un multiple de 3.

b) $11^k = 10m + 1$. Écris $11^{k+1} - 1$ comme un multiple de 10.

c) $6^k = 5m + 1$. Écris $6^{k+1} - 1$ comme un multiple de 5.

d) $4^k + 2 = 3m$. Écris $4^{k+1} + 2$ comme un multiple de 3.

e) $10^k = 9m + 1$. Écris $10^{k+1} - 1$ comme un multiple de 9.

f) $2^{3k} = 7m + 1$. Écris $2^{3(k+1)} - 1$ comme un multiple de 7.

g) $k^3 + 2k = 3m$. Écris $(k+1)^3 + 2(k+1)$ comme un multiple de 3.

h) $9^k = 4m + 1$. Écris $9^{k+1} - 1$ comme un multiple de 4.

Exercice 4 – Encadrer une suite ★★

Démontre l'encadrement par récurrence, pour tout entier naturel n.

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1 : 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} : 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{u_n + 2} : 1 \leqslant u_n \leqslant 4$.

d) $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n) : 0 < u_n < 1$. *(Vérifie d'abord que $x(2-x) = 1 - (1-x)^2$.)*

Exercice 5 – Sens de variation par récurrence ★★

Démontre par récurrence la propriété donnée, pour tout entier naturel n, puis conclus sur le sens de variation de (u_n).

a) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 2 : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.

b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. *On pose $f(x) = \sqrt{3x+4}$.*

c) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} : 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$. *On pose $f(x) = \sqrt{x+6}$, croissante sur $[3;5]$.*

d) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2} : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. *On pose $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$.*

Exercice 6 – Divisibilité ★★

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, le nombre donné est divisible par l'entier indiqué.

a) $5^n - 1$ est divisible par 4.

b) $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

c) $n^3 - n$ est divisible par 3.

d) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 7 – L'inégalité de Bernoulli ★★★

Soit a un réel strictement positif.

1. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
2. Déduis-en un entier N tel que $1{,}02^n \geqslant 1\,000$ pour tout $n \geqslant N$.
3. Déduis-en la limite de $1{,}02^n$.

Exercice 8 – Le bon rang de départ ★★★

On s'intéresse à la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant n^2$ ».

1. Recopie et complète le tableau. Pour quelles valeurs de n la propriété est-elle vraie ?

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n							
n^2							

2. Montre que, pour tout entier $k \geqslant 3$, $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
3. Démontre que $2^n \geqslant n^2$ pour tout entier $n \geqslant 4$.
4. Pourquoi ne pouvait-on pas initialiser à $n = 0$ et conclure pour tout n ?

Exercice 9 – La suite qui dépasse tout ★★★

On définit (u_n) par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

1. Calcule u_1 et u_2. Vérifie que $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.
2. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 3$.
3. Montre que $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Déduis-en que $u_{n+1} - u_n \geqslant 2$ pour tout n.
4. Démontre par récurrence que $u_n \geqslant n + 3$ pour tout n, puis donne la limite de (u_n).

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque morceau de copie contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) « $2 \leqslant u \leqslant 5$, donc $-4 \leqslant -2u \leqslant -10$. »

b) « $1 \leqslant u \leqslant 2$, donc $1 \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant \dfrac{1}{2}$. »

c) « $-2 \leqslant u \leqslant 1$, donc $1 \leqslant u^2 \leqslant 4$. »

d) « $13^k - 1 = 12m$. Alors $13^{k+1} - 1 = 13^k + 13 - 1 = 12m + 13$. »

e) « $f(x) = x^2 - 4x$ et $-1 \leqslant u \leqslant 3$, donc $f(-1) \leqslant f(u) \leqslant f(3)$, soit $5 \leqslant f(u) \leqslant -3$. »

f) « $\mathcal{P}(n) : 2^n \geqslant 3n$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie ($1 \geqslant 0$) et la propriété est héréditaire pour $k \geqslant 1$, donc elle est vraie pour tout n. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Si $2 \leqslant u \leqslant 5$, alors :

   A $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant \dfrac{1}{5}$ **B** $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant \dfrac{1}{2}$ **C** $-5 \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant -2$ **D** $2 \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant 5$

2. Si $-1 \leqslant u \leqslant 3$, alors :

   A $1 \leqslant u^2 \leqslant 9$ **B** $-1 \leqslant u^2 \leqslant 9$ **C** $1 \leqslant u^2 \leqslant 3$ **D** $0 \leqslant u^2 \leqslant 9$

3. Pour $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bernoulli s'écrit :

   A $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ **B** $(1+a)^n \geqslant 1 + a^n$ **C** $(1+a)^n \leqslant 1 + na$ **D** $(1+a)^n \geqslant n + a$

4. Pour montrer par récurrence que $12^n - 1$ est divisible par 11, l'hypothèse de récurrence s'écrit :

   A $12^k - 1 = 11$ **B** il existe un entier m tel que $12^k = 11m$

   C il existe un entier m tel que $12^k = 11m + 1$ **D** $12^n - 1 = 11m$ pour tout n

5. La propriété « $3^n \geqslant 10n$ » est vraie :

   A pour $n = 0$ et pour tout $n \geqslant 4$ **B** pour tout $n \geqslant 3$ **C** pour tout $n \in \mathbb{N}$ **D** pour tout $n \geqslant 1$

6. $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est croissante sur un intervalle qui contient tous les termes, et $u_0 \leqslant u_1$. Alors :

A (u_n) est décroissante **B** (u_n) converge **C** (u_n) est majorée **D** (u_n) est croissante

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).