Corrigé – Récurrence : inégalités, encadrements

Mathématiques – Terminale spécialité

Raisonnement par récurrence · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Transformer un encadrement ★

Déduis de l'encadrement de u un encadrement de l'expression demandée. Justifie chaque étape.

a) $0 \leqslant u \leqslant 2$

$\Longrightarrow 0 \leqslant 3u \leqslant 6$ *(on multiplie par $3 > 0$)*

$\Longrightarrow 1 \leqslant 3u + 1 \leqslant 7$ *(on ajoute 1)*

b) $1 \leqslant u \leqslant 4$

$\Longrightarrow -8 \leqslant -2u \leqslant -2$ *(on multiplie par $-2 < 0$: le sens change)*

$\Longrightarrow -3 \leqslant -2u + 5 \leqslant 3$ *(on ajoute 5)*

c) $2 \leqslant u \leqslant 6$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u}{4} \leqslant \dfrac{3}{2}$ *(on divise par $4 > 0$)*

$\Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u}{4} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ *(on retranche 1)*

d) $0 \leqslant u \leqslant 3$

$\Longrightarrow 0 \leqslant u^2 \leqslant 9$ *(la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$)*

e) $2 \leqslant u + 1 \leqslant 4$ *(on ajoute 1)*

$\Longrightarrow \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{u+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ *(nombres positifs : l'inverse change le sens)*

f) $4 \leqslant u + 2 \leqslant 9$ *(on ajoute 2)*

$\Longrightarrow 2 \leqslant \sqrt{u+2} \leqslant 3$ *(la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$)*

g) *u peut être négatif : on ne peut pas « élever au carré » l'encadrement.*

Si $-1 \leqslant u \leqslant 0$: $0 \leqslant u^2 \leqslant 1$ (le carré est décroissant sur $]-\infty;0]$).

Si $0 \leqslant u \leqslant 2$: $0 \leqslant u^2 \leqslant 4$.

Dans tous les cas : $0 \leqslant u^2 \leqslant 4$.

h) $2 \leqslant u + 2 \leqslant 3$ *(on ajoute 2)*

$\Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{u+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ *(inverse de nombres positifs : le sens change)*

$\Longrightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant -\dfrac{3}{u+2} \leqslant -1$ *(on multiplie par $-3 < 0$: le sens change)*

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant 2 - \dfrac{3}{u+2} \leqslant 1$ *(on ajoute 2)*

Exercice 2 – Fonction croissante et images des bornes ★

Montre que f est croissante sur l'intervalle donné, puis encadre $f(x)$ pour x dans cet intervalle.

a) $f'(x) = 3$
$3 > 0$: f est croissante sur $[1;4]$.
$f(1) = 1$ et $f(4) = 10$.
Donc, pour tout x de $[1;4]$: $1 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

b) $f'(x) = 2x$
Pour $x \geqslant 0$, $2x \geqslant 0$: f est croissante sur $[0;3]$.
$f(0) = 1$ et $f(3) = 10$.
Donc, pour tout x de $[0;3]$: $1 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

c) $f'(x) = \dfrac{3(x+2) - (3x+1) \times 1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{5}{(x+2)^2}$

Un carré non nul est strictement positif, donc $f'(x) > 0$: f est croissante sur $[0;5]$.
$f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(5) = \dfrac{16}{7}$.
Donc, pour tout x de $[0;5]$: $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{16}{7}$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$
Une racine carrée non nulle est strictement positive, donc $f'(x) > 0$: f est croissante sur $[-1;4]$.
$f(-1) = 2$ et $f(4) = 3$.
Donc, pour tout x de $[-1;4]$: $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

e) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$
Dérivée de $-\dfrac{4}{v}$: $\dfrac{4v'}{v^2}$; un carré non nul est positif, donc $f'(x) > 0$: f est croissante sur $[0;3]$.
$f(0) = 2$ et $f(3) = 5$.
Donc, pour tout x de $[0;3]$: $2 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

f) $f'(x) = \dfrac{1 \times (x+2) - x \times 1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$: f est croissante sur $[0;2]$.
$f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2}$.
Donc, pour tout x de $[0;2]$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

g) $f'(x) = e^{x-1}$
Une exponentielle est strictement positive : f est croissante sur $[0;1]$.
$f(0) = e^{-1}$ et $f(1) = 1$.
Donc, pour tout x de $[0;1]$: $e^{-1} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

h) $f'(x) = 2x - 4$
Pour $x \geqslant 2$, $2x - 4 \geqslant 0$: f est croissante sur $[2; 5]$.
$f(2) = -4$ et $f(5) = 5$.
Donc, pour tout x de $[2; 5]$: $-4 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

Exercice 3 – Divisibilité : l'étape clé ★

k et m sont des entiers naturels. Avec l'égalité donnée, écris l'expression demandée comme un multiple du nombre indiqué.

a) $7^{k+1} - 1 = 7 \times 7^k - 1 = 7(3m + 1) - 1$
$= 21m + 7 - 1$
$= 21m + 6$
$= 3(7m + 2)$

Comme $7m + 2$ est un entier, $7^{k+1} - 1$ est un multiple de 3.

b) $11^{k+1} - 1 = 11 \times 11^k - 1 = 11(10m + 1) - 1$
$= 110m + 11 - 1$
$= 10(11m + 1)$

$11m + 1$ est un entier.

c) $6^{k+1} - 1 = 6 \times 6^k - 1 = 6(5m + 1) - 1$
$= 30m + 6 - 1$
$= 5(6m + 1)$

$6m + 1$ est un entier.

d) $4^{k+1} + 2 = 4 \times 4^k + 2 = 4(3m - 2) + 2$
$= 12m - 8 + 2$
$= 12m - 6$
$= 3(4m - 2)$

On isole la puissance : $4^k = 3m - 2$, puis $4^{k+1} = 4 \times 4^k$.
$4m - 2$ est un entier.

e) $10^{k+1} - 1 = 10 \times 10^k - 1 = 10(9m + 1) - 1$
$= 90m + 10 - 1$
$= 9(10m + 1)$

$10m + 1$ est un entier.

f) $2^{3(k+1)} - 1 = 8 \times 2^{3k} - 1 = 8(7m + 1) - 1$
$= 56m + 8 - 1$
$= 7(8m + 1)$

$2^{3(k+1)} = 2^{3k+3} = 2^3 \times 2^{3k} = 8 \times 2^{3k}$.
$8m + 1$ est un entier.

g) $(k+1)^3 + 2(k+1)$
$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$
$= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3$
$= 3m + 3(k^2 + k + 1)$
$= 3(m + k^2 + k + 1)$
On a regroupé $k^3 + 2k$, remplacé par $3m$.
$m + k^2 + k + 1$ est un entier.

h) $9^{k+1} - 1 = 9 \times 9^k - 1 = 9\,(4m+1) - 1$
$= 36m + 9 - 1$
$= 36m + 8$
$= 4\,(9m + 2)$

$9m + 2$ est un entier.

Exercice 4 – Encadrer une suite ★★

Démontre l'encadrement par récurrence, pour tout entier naturel n.

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».
Initialisation. $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 2$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_k \leqslant 2$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.
$0 \leqslant u_k \leqslant 2$
$\implies 0 \leqslant 0{,}5u_k \leqslant 1$ *(on multiplie par* $0{,}5 > 0$*)*
$\implies 1 \leqslant 0{,}5u_k + 1 \leqslant 2$ *(on ajoute* 1*)*

Donc $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$, et comme $0 \leqslant 1$: $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».
Initialisation. $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant 2$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_k \leqslant 2$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.
$2 \leqslant u_k + 2 \leqslant 4$ *(on ajoute* 2*)*
$\implies \sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_k + 2} \leqslant 2$ *(la racine carrée est croissante sur* $[0; +\infty[$*)*

Donc $\sqrt{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$, et comme $0 \leqslant \sqrt{2}$: $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant 4$ ».
Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \leqslant 1 \leqslant 4$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_k \leqslant 4$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.
$3 \leqslant u_k + 2 \leqslant 6$ *(on ajoute 2)*
$\quad \Longrightarrow \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{u_k+2} \leqslant \dfrac{1}{3}$ *(nombres positifs : l'inverse change le sens)*
$\quad \Longrightarrow -2 \leqslant -\dfrac{6}{u_k+2} \leqslant -1$ *(on multiplie par $-6 < 0$: le sens change)*
$\quad \Longrightarrow 3 \leqslant 5 - \dfrac{6}{u_k+2} \leqslant 4$ *(on ajoute 5)*

Donc $3 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$, et comme $1 \leqslant 3 : 1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0 : 1 \leqslant u_n \leqslant 4$.

d) $1 - (1-x)^2 = 1 - (1 - 2x + x^2) = 2x - x^2 = x(2-x)$: donc $u_{n+1} = 1 - (1-u_n)^2$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».
Initialisation. $u_0 = 0{,}5$ et $0 < 0{,}5 < 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 < u_k < 1$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 < u_{k+1} < 1$.
$-1 < -u_k < 0$ *(on multiplie par -1 : le sens change)*
$\quad \Longrightarrow 0 < 1 - u_k < 1$ *(on ajoute 1)*
$\quad \Longrightarrow 0 < (1-u_k)^2 < 1$ *(carré de nombres positifs : le sens est conservé)*
$\quad \Longrightarrow -1 < -(1-u_k)^2 < 0$ *(on multiplie par -1)*
$\quad \Longrightarrow 0 < 1 - (1-u_k)^2 < 1$ *(on ajoute 1)*

Donc $0 < u_{k+1} < 1$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0 : 0 < u_n < 1$.

Exercice 5 – Sens de variation par récurrence ★★

Démontre par récurrence la propriété donnée, pour tout entier naturel n, puis conclus sur le sens de variation de

(u_n).

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$ ».
Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = 0{,}6 \times 0 + 2 = 2 : 0 \leqslant 2 \leqslant 5$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 5$.
$0{,}6u_k \leqslant 0{,}6u_{k+1} \leqslant 3$ *(on multiplie par* $0{,}6 > 0$*)*
$\quad \Longrightarrow 0{,}6u_k + 2 \leqslant 0{,}6u_{k+1} + 2 \leqslant 5$ *(on ajoute* 2*)*

C'est $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 5$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0 : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite est croissante (et majorée par 5).

b) f est croissante sur $[0;4]$: $x \mapsto 3x + 4$ est croissante et positive, et la racine carrée est croissante.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».
Initialisation. $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{7} \approx 2{,}65 : 0 \leqslant 1 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 4$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$.
Ces nombres sont dans $[0;4]$, où f est croissante : elle conserve l'ordre.
$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(4)$, soit $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$ (car $f(0) = \sqrt{4} = 2$ et $f(4) = \sqrt{16} = 4$).
Comme $0 \leqslant 2$, on a bien $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0 : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
La suite est croissante (et bornée par 0 et 4).

c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ ».
Initialisation. $u_1 = \sqrt{11} \approx 3{,}32 : 3 \leqslant \sqrt{11} \leqslant 5 \leqslant 5$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $3 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 5$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $3 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.
f est croissante sur $[3;5]$, qui contient ces nombres : $f(3) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(5)$,
soit $3 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{11}$ (car $f(3) = \sqrt{9} = 3$).
Comme $\sqrt{11} \leqslant 5$, on a bien $3 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0 : 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$.
Pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite est décroissante (et minorée par 3).

d) $f'(x) = \dfrac{4(x+2) - (4x+3) \times 1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$: f est croissante sur $[0;3]$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ ».
Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{3}{2}$: $0 \leqslant 0 \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant 3$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$.
f est croissante sur $[0;3]$: $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(3)$,
soit $\dfrac{3}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$ (car $f(3) = \dfrac{15}{5} = 3$).
Comme $0 \leqslant \dfrac{3}{2}$, c'est la propriété au rang $k+1$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
La suite est croissante (et bornée par 0 et 3).

Exercice 6 – Divisibilité ★★

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, le nombre donné est divisible par l'entier indiqué.

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $5^n - 1$ est divisible par 4 ».
Initialisation. $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier m tel que $5^k - 1 = 4m$, soit $5^k = 4m + 1$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier p tel que $5^{k+1} - 1 = 4p$.
$5^{k+1} - 1 = 5 \times 5^k - 1$
$= 5(4m+1) - 1$
$= 20m + 4$
$= 4(5m+1)$
On pose $p = 5m + 1$: c'est un entier.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $5^n - 1$ est divisible par 4.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $3^{2n} - 1$ est divisible par 8 ».
Initialisation. $3^0 - 1 = 0 = 8 \times 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier m tel que $3^{2k} = 8m + 1$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier p tel que $3^{2(k+1)} - 1 = 8p$.
$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k} \times 3^2 - 1 \\ &= 9(8m+1) - 1 \\ &= 72m + 8 \\ &= 8(9m+1) \end{aligned}$$
$p = 9m + 1$ est un entier.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $n^3 - n$ est divisible par 3 ».
Initialisation. $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier m tel que $k^3 - k = 3m$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier p tel que $(k+1)^3 - (k+1) = 3p$.
$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k \\ &= 3m + 3(k^2 + k) \\ &= 3(m + k^2 + k) \end{aligned}$$
On a regroupé $k^3 - k$ pour utiliser l'hypothèse.
$p = m + k^2 + k$ est un entier.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $n^3 - n$ est divisible par 3.

d) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7 ».
Initialisation. $2^2 + 3^1 = 7 = 7 \times 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier m tel que $2^{k+2} + 3^{2k+1} = 7m$, soit $2^{k+2} = 7m - 3^{2k+1}$.
Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : il existe un entier p tel que $2^{k+3} + 3^{2k+3} = 7p$.
$$\begin{aligned} 2^{k+3} + 3^{2k+3} &= 2 \times 2^{k+2} + 9 \times 3^{2k+1} \\ &= 2(7m - 3^{2k+1}) + 9 \times 3^{2k+1} \\ &= 14m + 7 \times 3^{2k+1} \\ &= 7(2m + 3^{2k+1}) \end{aligned}$$
$p = 2m + 3^{2k+1}$ est un entier.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 7 – L'inégalité de Bernoulli ★★★

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».
   Initialisation. $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1 : 1 \geqslant 1$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $(1+a)^k \geqslant 1+ka$.
   Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$.
   $1+a > 0$: on multiplie l'hypothèse par $1+a$ sans changer le sens.
   $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a)$.
   Or $(1+ka)(1+a) = 1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2$, et $ka^2 \geqslant 0$.
   Donc $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a+ka^2 \geqslant 1+(k+1)a$.
   Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
   Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

2. Avec $a = 0{,}02$: $1{,}02^n \geqslant 1 + 0{,}02n$.
   Il suffit donc que $1 + 0{,}02n \geqslant 1\,000$:
   $1 + 0{,}02n \geqslant 1000$
   $\iff 0{,}02n \geqslant 999$ *(on retranche 1)*
   $\iff n \geqslant 49\,950$ *(on divise par $0{,}02 > 0$)*

   Pour tout $n \geqslant 49\,950$, $1{,}02^n \geqslant 1\,000$: $N = 49\,950$ convient (ce n'est pas le plus petit, mais il suffit).

3. Pour tout n, $1{,}02^n \geqslant 1 + 0{,}02n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+0{,}02n) = +\infty$.
   Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}02^n = +\infty$.

Exercice 8 – Le bon rang de départ ★★★

1.

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1	2	4	8	16	32	64
n^2	0	1	4	9	16	25	36

   La propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 4, 5, 6$ et fausse pour $n = 3$ ($8 < 9$).

2. $2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2$.
   Pour $k \geqslant 3$: $k - 1 \geqslant 2$, donc $(k-1)^2 \geqslant 4$ et $(k-1)^2 - 2 \geqslant 2 \geqslant 0$.
   Donc $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 4$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant n^2$ ».
   Initialisation. $2^4 = 16$ et $4^2 = 16 : 16 \geqslant 16$.
   Donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $k \geqslant 4$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $2^k \geqslant k^2$.
   Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.
   On multiplie l'hypothèse par $2 > 0$: $2^{k+1} \geqslant 2k^2$.
   Comme $k \geqslant 4 \geqslant 3$, la question 2 donne $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
   Donc $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.
   Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
   Conclusion. La propriété est vraie au rang 4 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 4$: $2^n \geqslant n^2$.

4. L'hérédité utilise $2k^2 \geqslant (k+1)^2$, qui n'est vraie qu'à partir de $k = 3$: pour $k = 2$, $8 < 9$.
   D'ailleurs $\mathcal{P}(3)$ est fausse : la propriété n'est pas vraie pour tout n.
   On initialise au rang 4, où tout fonctionne.

Exercice 9 – La suite qui dépasse tout ★★★

1. $u_1 = 3^2 - 2 \times 3 + 2$
   $= 9 - 6 + 2$
   $= 5$

   $u_2 = 5^2 - 2 \times 5 + 2$
   $= 25 - 10 + 2$
   $= 17$

   $(u_n - 1)^2 + 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 = u_n^2 - 2u_n + 2 = u_{n+1}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 3$ ».
   Initialisation. $u_0 = 3 \geqslant 3$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k \geqslant 3$.
   Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{k+1} \geqslant 3$.
   $u_k - 1 \geqslant 2$ *(on retranche 1)*
   $\implies (u_k - 1)^2 \geqslant 4$ *(carré de nombres positifs : le sens est conservé)*
   $\implies u_{k+1} = (u_k - 1)^2 + 1 \geqslant 5$ *(on ajoute 1)*

   Comme $5 \geqslant 3$, $u_{k+1} \geqslant 3$.
   Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
   Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n \geqslant 3$.

3. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$, et $(u_n - 1)(u_n - 2) = u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$.
   D'après la question 2, $u_n \geqslant 3$: $u_n - 1 \geqslant 2$ et $u_n - 2 \geqslant 1$ (nombres positifs).
   Par produit de nombres positifs : $(u_n - 1)(u_n - 2) \geqslant 2 \times 1 = 2$.
   Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 2$: en particulier, la suite est croissante.

4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant n+3$ ».
   Initialisation. $u_0 = 3 \geqslant 0+3$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k \geqslant k+3$.
   Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{k+1} \geqslant k+4$.
   D'après la question 3, $u_{k+1} \geqslant u_k + 2$, et par hypothèse $u_k + 2 \geqslant k+5$.
   Donc $u_{k+1} \geqslant k+5 \geqslant k+4$.
   Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
   Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n \geqslant n+3$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$ et $u_n \geqslant n+3$: par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque morceau de copie contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *En multipliant par $-2<0$, le sens change : on obtient $-4 \geqslant -2u \geqslant -10$.*
Dans l'ordre : $-10 \leqslant -2u \leqslant -4$.

b) *L'inverse change le sens, et $1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ est faux.*
$\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant 1$.

c) *Pour $u=0$, $u^2 = 0 < 1$: la fonction carré n'est pas monotone sur $[-2;1]$.*
Si $u \leqslant 0$: $0 \leqslant u^2 \leqslant 4$; si $u \geqslant 0$: $0 \leqslant u^2 \leqslant 1$.
Donc $0 \leqslant u^2 \leqslant 4$.

d) *$13^{k+1} = 13 \times 13^k$, pas $13^k + 13$.*
Avec $13^k = 12m+1$: $13^{k+1} - 1 = 13 \times 13^k - 1 = 13(12m+1) - 1 = 156m + 12 = 12(13m+1)$: c'est bien un multiple de 12.

e) *f n'est pas croissante sur $[-1;3]$: elle décroît sur $[-1;2]$ et croît sur $[2;3]$ ($f'(x) = 2x-4$).*
Son minimum est $f(2) = -4$ et son maximum $f(-1) = 5$ (car $f(3) = -3$) : $-4 \leqslant f(u) \leqslant 5$.

f) *L'hérédité ne démarre qu'à $k=1$: le passage de 0 à 1 n'est pas prouvé, et $\mathcal{P}(1)$ est fausse ($2<3$).*
$\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont fausses aussi ($4<6$, $8<9$) ; $\mathcal{P}(4)$ est vraie ($16 \geqslant 12$).
On initialise à $n=4$: la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Si $2 \leqslant u \leqslant 5$, alors :
   Réponse B : $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant \dfrac{1}{2}$
   Entre nombres positifs, l'inverse change le sens : $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Si $-1 \leqslant u \leqslant 3$, alors :
   Réponse D : $0 \leqslant u^2 \leqslant 9$
   u peut valoir 0 : le minimum de u^2 est 0 ; le maximum est $3^2 = 9$.

3. Pour $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bernoulli s'écrit :

Réponse A : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
C'est $(1+a)^n \geqslant 1+na$, démontrée par récurrence en multipliant par $1+a > 0$.

4. Pour montrer par récurrence que $12^n - 1$ est divisible par 11, l'hypothèse de récurrence s'écrit :

Réponse C : il existe un entier m tel que $12^k = 11m + 1$
« Divisible par 11 » : $12^k - 1 = 11m$ avec m entier, soit $12^k = 11m + 1$, pour un k fixé.

5. La propriété « $3^n \geqslant 10n$ » est vraie :

Réponse A : pour $n = 0$ et pour tout $n \geqslant 4$
$3^1 = 3 < 10$, $3^2 = 9 < 20$, $3^3 = 27 < 30$, puis $3^4 = 81 \geqslant 40$.

6. $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est croissante sur un intervalle qui contient tous les termes, et $u_0 \leqslant u_1$. Alors :

Réponse D : (u_n) est croissante
Par récurrence, $u_k \leqslant u_{k+1}$ donne $f(u_k) \leqslant f(u_{k+1})$, soit $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$; rien ne dit qu'elle est majorée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).