Corrigé – Radians et cercle trigonométrique

Mathématiques – Première spécialité

Trigonométrie · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Des degrés aux radians ★

Convertis en radians. Donne la valeur exacte, avec une fraction simplifiée.

a) $40^\circ = 40 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{40\pi}{180}$
$= \dfrac{2\pi}{9}$ rad (on simplifie par 20)

b) $135^\circ = 135 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{135\pi}{180}$
$= \dfrac{3\pi}{4}$ rad (on simplifie par 45)

c) $160^\circ = 160 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{160\pi}{180}$
$= \dfrac{8\pi}{9}$ rad (on simplifie par 20)

d) $300^\circ = 300 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{300\pi}{180}$
$= \dfrac{5\pi}{3}$ rad (on simplifie par 60)

e) $18^\circ = 18 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{18\pi}{180}$
$= \dfrac{\pi}{10}$ rad (on simplifie par 18)

f) $270^\circ = 270 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{270\pi}{180}$
$= \dfrac{3\pi}{2}$ rad (on simplifie par 90)

g) $330^\circ = 330 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{330\pi}{180}$
$= \dfrac{11\pi}{6}$ rad (on simplifie par 30)

h) $80^\circ = 80 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{80\pi}{180}$
$= \dfrac{4\pi}{9}$ rad (on simplifie par 20)

Exercice 2 – Des radians aux degrés ★

Convertis en degrés. Pour h), arrondis au dixième de degré (calculatrice autorisée pour h seulement).

a) $\dfrac{5\pi}{12} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{5 \times 180}{12}$
$= 75^\circ$ (on simplifie par π, puis on calcule)

b) $\dfrac{7\pi}{4} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{7 \times 180}{4}$
$= 315^\circ$ (on simplifie par π, puis on calcule)

c) $\dfrac{\pi}{12} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{1 \times 180}{12}$
$= 15°$ (on simplifie par π, puis on calcule)

d) $\dfrac{4\pi}{5} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{4 \times 180}{5}$
$= 144°$ (on simplifie par π, puis on calcule)

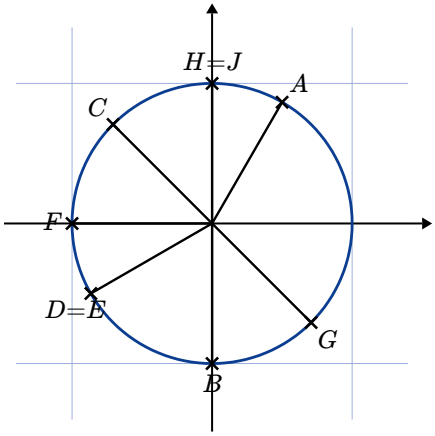
e) $\dfrac{4\pi}{3} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{4 \times 180}{3}$
$= 240°$ (on simplifie par π, puis on calcule)

f) $\dfrac{13\pi}{18} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{13 \times 180}{18}$
$= 130°$ (on simplifie par π, puis on calcule)

g) $\dfrac{3\pi}{8} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{3 \times 180}{8} = \dfrac{540}{8}$
$= 67{,}5°$ (un résultat décimal est possible)

h) Une mesure en radians n'est pas toujours un multiple de π.
$2 \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{360}{\pi} \approx 114{,}6°$: un peu moins d'un tiers de tour.

Exercice 3 – Placer des points ★



1. $\dfrac{\pi}{3}$ est entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$: premier quadrant, aux deux tiers du quart de cercle en partant de I.
2. $-\dfrac{\pi}{2}$: un quart de tour dans le sens indirect (sens des aiguilles d'une montre).
   B est le point $J'(0\,;\,-1)$.
3. $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$: deuxième quadrant, au milieu de l'arc qui va de J à I'.
4. $-\dfrac{5\pi}{6}$: on tourne dans le sens indirect de $\dfrac{5\pi}{6}$, presque un demi-tour : troisième quadrant, près de I'.
5. $\dfrac{7\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{12\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}$: la différence est un tour, donc E est le même point que D.
6. π : un demi-tour.
   F est le point $I'(-1\,;\,0)$.
7. $-\dfrac{\pi}{4}$: un demi-quart de tour dans le sens indirect, quatrième quadrant, au milieu de l'arc de I à J'.

8. $\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi$: un tour de plus que $\dfrac{\pi}{2}$, donc H est le point J.

Exercice 4 – Longueur d'arc ★★

Rappel : $\ell = r\alpha$, avec α en radians. Donne la valeur exacte, puis une valeur arrondie au dixième (calculatrice autorisée).

a) $\ell = r\alpha = 5 \times \dfrac{2\pi}{5} = 2\pi$ cm, soit environ 6,3 cm.

b) *L'angle est en degrés : on le convertit d'abord.*
$100^\circ = \dfrac{100\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{9}$ rad.
$\ell = 9 \times \dfrac{5\pi}{9} = 5\pi$ cm, soit environ 15,7 cm.

c) $\ell = r\alpha$, donc $\alpha = \dfrac{\ell}{r} = \dfrac{14}{4} = 3{,}5$ rad.
En degrés : $3{,}5 \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{630}{\pi} \approx 200{,}5^\circ$ (un peu plus d'un demi-tour).

d) Angle : $3 \times 2\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{12\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{13\pi}{2}$ rad.
$\ell = 30 \times \dfrac{13\pi}{2} = 195\pi$ cm, soit environ 612,6 cm.

e) En 60 minutes, l'aiguille fait un tour, soit 2π rad.
En 25 minutes : $\alpha = \dfrac{25}{60} \times 2\pi = \dfrac{50\pi}{60} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad.
$\ell = 12 \times \dfrac{5\pi}{6} = 10\pi$ cm, soit environ 31,4 cm.

f) $\ell = r\alpha$, donc $r = \dfrac{\ell}{\alpha} = 3\pi \div \dfrac{3\pi}{4} = 3\pi \times \dfrac{4}{3\pi} = 4$ cm.

Exercice 5 – Même image ? ★★

Les deux réels ont-ils la même image sur le cercle trigonométrique ? Justifie par un calcul.

a) $\dfrac{21\pi}{5} - \dfrac{\pi}{5} = 4\pi$.
$4\pi = 2 \times 2\pi$: la différence est un nombre entier de tours.
Les deux réels ont la même image.

b) $-\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = -2\pi$.
$-2\pi = -1 \times 2\pi$: la différence est un nombre entier de tours.
Les deux réels ont la même image.

c) $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \pi$.
$\pi = \dfrac{1}{2} \times 2\pi$: ce n'est pas un nombre entier de tours.
Les images sont différentes (elles sont symétriques par rapport à O, car la différence vaut un demi-tour de plus qu'un nombre entier de tours).

d) $\dfrac{17\pi}{6} - \left(-\dfrac{7\pi}{6}\right) = 4\pi$.
$4\pi = 2 \times 2\pi$: la différence est un nombre entier de tours.
Les deux réels ont la même image.

e) $-\dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{9\pi}{4} = -\dfrac{9\pi}{2}$.
$-\dfrac{9\pi}{2} = -\dfrac{9}{4} \times 2\pi$: ce n'est pas un nombre entier de tours.
Les images sont différentes.

Exercice 6 – Mesure principale ★★

Détermine la mesure principale (dans $]-\pi\,;\,\pi]$) de chaque réel.

a) $2\pi = \dfrac{12\pi}{6}$.
On retire 2 tours : $\dfrac{19\pi}{6} - 2 \times \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{19\pi - 24\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}$.
$-\dfrac{5\pi}{6} \in]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale.

b) $2\pi = \dfrac{8\pi}{4}$.
On ajoute 2 tours : $-\dfrac{13\pi}{4} + 2 \times \dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{-13\pi + 16\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.
$\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale.

c) $2\pi = \dfrac{10\pi}{5}$.
On retire 3 tours : $\dfrac{31\pi}{5} - 3 \times \dfrac{10\pi}{5} = \dfrac{31\pi - 30\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.
$\dfrac{\pi}{5} \in]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale.

d) $-7\pi + 3 \times 2\pi = -\pi$ *ne convient pas : l'intervalle est ouvert en* $-\pi$.
On ajoute 4 tours : $-7\pi + 4 \times 2\pi = \pi$.
$\pi \in]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale.

e) $2\pi = \dfrac{16\pi}{8}$.
On retire 3 tours : $\dfrac{47\pi}{8} - 3 \times \dfrac{16\pi}{8} = \dfrac{47\pi - 48\pi}{8} = -\dfrac{\pi}{8}$.
$-\dfrac{\pi}{8} \in]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale.

f) $2026 = 6 \times 337 + 4$, donc $\dfrac{2026\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3} + 337 \times 2\pi$, et $\dfrac{4\pi}{3} > \pi$: il faut retirer un tour de plus.
$2\pi = \dfrac{6\pi}{3}$.
On retire 338 tours : $\dfrac{2026\pi}{3} - 338 \times \dfrac{6\pi}{3} = \dfrac{2026\pi - 2028\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$.
$-\dfrac{2\pi}{3} \in]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale.

Exercice 7 – Le cercle partagé en douze ★★★

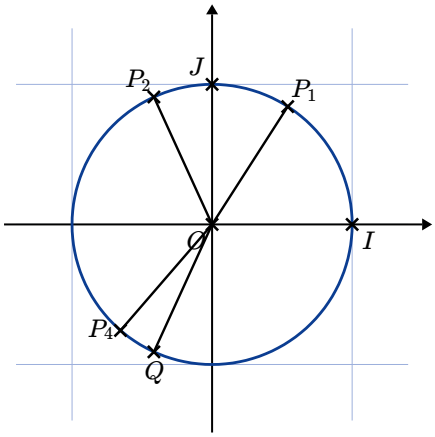
1. Un tour mesure 2π, partagé en 12 : chaque arc mesure $\dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$.
   C est à 2 arcs de A : $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.
   F est à 5 arcs : $\dfrac{5\pi}{6}$.
   K est à 8 arcs : $\dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3} > \pi$; on retire un tour : $\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{6\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$.
   M est à 10 arcs : $\dfrac{10\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{6\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$.

2. $\dfrac{23\pi}{6} - 2 \times \dfrac{12\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}$: un arc dans le sens indirect à partir de A, c'est le point N.
   $-\dfrac{17\pi}{3} + 3 \times \dfrac{6\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$: c'est le point C.

3. E est à 4 arcs de A : $\dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$.
   Les réels associés à E sont les $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, k entier relatif.
   Positif : $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Négatif ($k = -1$) : $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{6\pi}{3} = -\dfrac{4\pi}{3}$.
   Supérieur à $10\pi = \dfrac{30\pi}{3}$ ($k = 6$) : $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{36\pi}{3} = \dfrac{38\pi}{3}$.

4. B est l'image de $\dfrac{\pi}{6}$ et H celle de $\dfrac{7\pi}{6}$.
   $\dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{6} = \pi$: on passe de B à H par un demi-tour.
   Donc B et H sont symétriques par rapport à O.

Exercice 8 – L'enroulement de la droite (calculatrice autorisée) ★★★



1. On compare aux repères $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $\pi \approx 3{,}14$ et $\dfrac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$.
   $0 < 1 < \dfrac{\pi}{2}$: premier quadrant.
   $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \pi$: deuxième quadrant.
   $\pi < 4 < \dfrac{3\pi}{2}$: troisième quadrant.
   $-\pi < -2 < -\dfrac{\pi}{2}$: on tourne dans le sens indirect de plus d'un quart de tour, troisième quadrant.

2. Un radian correspond à environ $57°$: P_1 est vers $57°$, P_2 vers $115°$, P_4 vers $229°$, et Q vers $-115°$ (voir la figure).

3. Les réels qui ont pour image I sont les $2k\pi$, k entier relatif.
   $0 \leqslant 2k\pi \leqslant 20 \iff 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{20}{2\pi} \approx 3{,}18$, donc $k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$.
   Il y en a 4 : 0, 2π, 4π et 6π.

4. On compte les tours : $\dfrac{100}{2\pi} \approx 15{,}92$, donc un peu moins de 16 tours.
   $100 - 16 \times 2\pi \approx -0{,}53$, qui a la même image que 100.
   $-\dfrac{\pi}{2} < -0{,}53 < 0$: l'image de 100 est dans le quatrième quadrant.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Vers les radians, on multiplie par* $\dfrac{\pi}{180}$*, pas par* $\dfrac{180}{\pi}$*.*
$36° = \dfrac{36\pi}{180} = \dfrac{\pi}{5}$ rad.

b) $\ell = r\alpha$ *demande un angle en radians.*
$60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad, donc $\ell = 10 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{10\pi}{3} \approx 10{,}5$ cm.

c) *Un tour mesure* 2π*, pas* π *; et* $\dfrac{4\pi}{3}$ *n'est même pas dans l'intervalle.*
$\dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{6\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$: c'est la mesure principale.

d) *L'intervalle* $]-\pi\,;\,\pi]$ *est ouvert en* $-\pi$*.*
$-\pi + 2\pi = \pi$: la mesure principale de $-\pi$ est π.

e) *Il faut une différence multiple de* 2π *;* π *n'est qu'un demi-tour.*
Les deux images sont différentes : elles sont symétriques par rapport à O.

f) *La mesure principale se cherche dans* $]-\pi\,;\,\pi]$*.*
$\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{4\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$: la mesure principale est $-\dfrac{\pi}{2}$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $210°$ en radians vaut :
Réponse D : $\dfrac{7\pi}{6}$
$210 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{210\pi}{180} = \dfrac{7\pi}{6}$.

2. La mesure principale de $\dfrac{17\pi}{6}$ est :
Réponse B : $\dfrac{5\pi}{6}$
$\dfrac{17\pi}{6} - \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, qui est dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

3. Sur un cercle de rayon 6 cm, un angle au centre de $150°$ intercepte un arc de longueur :
Réponse A : 5π cm
$150° = \dfrac{5\pi}{6}$ rad, donc $\ell = 6 \times \dfrac{5\pi}{6} = 5\pi$ cm.

4. Quel réel a la même image que $\dfrac{3\pi}{5}$?
Réponse C : $\dfrac{13\pi}{5}$
$\dfrac{13\pi}{5} - \dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{10\pi}{5} = 2\pi$: un tour exactement.

5. L'image de $-\dfrac{3\pi}{4}$ est dans le :
Réponse A : troisième quadrant
$-\pi < -\dfrac{3\pi}{4} < -\dfrac{\pi}{2}$: troisième quadrant.

6. Combien de réels de $[0\,;\,10\pi[$ ont la même image que $\dfrac{\pi}{2}$?

Réponse D : 5
Ce sont $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (avec $k = 5$, on dépasse 10π).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).