Corrigé – Développer avec des racines, dénominateur sans racine

Mathématiques – Seconde

Racines carrées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Distributivité ★

Développe et réduis.

a) $\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)$
$= \sqrt{2}\times 3+\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^{2}$
$= 3\sqrt{2}+2$

b) $3\left(2-\sqrt{5}\right)$
$= 6-3\sqrt{5}$

c) $-2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$
$= -2\sqrt{3}\times\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times 1$
$= -2\times 3+2\sqrt{3}$
$= -6+2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5}\left(\sqrt{20}+1\right)$
$= \sqrt{5}\times\sqrt{20}+\sqrt{5}\times 1$
$= \sqrt{5\times 20}+\sqrt{5}$
$= \sqrt{100}+\sqrt{5}$
$= 10+\sqrt{5}$

e) $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$
$= 1\times 3-1\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 3-\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
$= 3-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2$
$= 1+2\sqrt{2}$

f) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+2\sqrt{3}\right)$
$= 2\times 1+2\times 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 1+\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$
$= 2+4\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\times 3$
$= 8+5\sqrt{3}$

g) $\left(4-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$
$= 4\times\sqrt{7}+4\times 2-\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times 2$
$= 4\sqrt{7}+8-7-2\sqrt{7}$
$= 1+2\sqrt{7}$

Exercice 2 – Identités remarquables ★

Développe avec la bonne identité remarquable, puis réduis.

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$
$= 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2$
$= 1 + 2\sqrt{2} + 2$
$= 3 + 2\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$
$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2$
$= 3 - 4\sqrt{3} + 4$
$= 7 - 4\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
$= \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$
$= 5 - 3$
$= 2$

d) $\left(2\sqrt{3}+1\right)^2$
$= \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 + 1^2$
$= 12 + 4\sqrt{3} + 1$
$= 13 + 4\sqrt{3}$

e) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$
$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} + \left(\sqrt{6}\right)^2$
$= 2 + 2\sqrt{12} + 6$
$= 8 + 2\sqrt{4 \times 3}$
$= 8 + 2 \times 2\sqrt{3}$
$= 8 + 4\sqrt{3}$

f) $\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{2}+1\right)$
$= \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 1^2$
$= 18 - 1$
$= 17$

g) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)^2$
$= \left(\sqrt{10}\right)^2 - 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= 10 - 2\sqrt{50} + 5$
$= 15 - 2\sqrt{25 \times 2}$
$= 15 - 2 \times 5\sqrt{2}$
$= 15 - 10\sqrt{2}$

Exercice 3 – Dénominateur sans racine ★

Écris sans racine au dénominateur : multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine du dénominateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$= \dfrac{6\sqrt{3}}{3}$

$= 2\sqrt{3}$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

$= \dfrac{5 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

$= \dfrac{5\sqrt{5}}{2 \times 5}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\dfrac{10}{\sqrt{8}}$

$= \dfrac{10}{\sqrt{4 \times 2}}$

$= \dfrac{10}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

e) $\dfrac{-4}{3\sqrt{2}}$

$= \dfrac{-4 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{-4\sqrt{2}}{3 \times 2}$

$= \dfrac{-4\sqrt{2}}{6}$

$= -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{1 \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$

Exercice 4 – Expressions longues ★★

Développe et réduis. *Garde les parenthèses après un signe moins.*

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2-\sqrt{3}\right)^2$
$=\left(4+4\sqrt{3}+3\right)-\left(4-4\sqrt{3}+3\right)$
$=\left(7+4\sqrt{3}\right)-\left(7-4\sqrt{3}\right)$
$=7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}$
$=8\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+2\right)$
$=\left(2+2\sqrt{2}+1\right)-\left(2+2\sqrt{2}\right)$
$=3+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}$
$=1$

c) $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)^2$
$=\left(3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right)-\left(5-2\sqrt{5}+1\right)$
$=4-\left(6-2\sqrt{5}\right)$
$=4-6+2\sqrt{5}$
$=-2+2\sqrt{5}$

d) $2\left(\sqrt{5}-1\right)^2+4\sqrt{5}$
$=2\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+4\sqrt{5}$
$=2\left(6-2\sqrt{5}\right)+4\sqrt{5}$
$=12-4\sqrt{5}+4\sqrt{5}$
$=12$

e) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$
$=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$
$=2\times2+4\sqrt{6}-\sqrt{6}-2\times3$
$=4+3\sqrt{6}-6$
$=3\sqrt{6}-2$

Exercice 5 – Avec la quantité conjuguée ★★

Écris sans racine au dénominateur : multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée du dénominateur.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$
$=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$
$=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}$
$=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$
$=\sqrt{3}+1$

b) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}}{4-3}$

$= 2-\sqrt{3}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$

$= \dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$

$= \dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}$

$= \dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{3}$

$= \sqrt{7}+2$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2-1}$

$= \sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$= 2-\sqrt{2}$

e) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{1-5}$

$= \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{-4}$

$= \dfrac{2(3+\sqrt{5})}{-4}$

$= -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$= \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Exercice 6 – Vérifier qu'un nombre est solution ★★

Remplace x par le nombre, calcule, puis conclus.

a) On remplace x par $1+\sqrt{2}$ dans le membre de gauche.

$(1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) - 1$

$= (1+2\sqrt{2}+2) - 2 - 2\sqrt{2} - 1$

$= 3+2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1$

$= 0$

Les deux membres sont égaux : $1+\sqrt{2}$ **est** solution.

b) On remplace x par $\sqrt{3}-1$ dans le membre de gauche.

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)\\&=\left(3-2\sqrt{3}+1\right)+2\sqrt{3}-2\\&=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\\&=2\end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux : $\sqrt{3}-1$ **est** solution.

c) On remplace x par $2-\sqrt{5}$ dans le membre de gauche.

$$\begin{aligned}&\left(2-\sqrt{5}\right)^2-4\left(2-\sqrt{5}\right)+1\\&=\left(4-4\sqrt{5}+5\right)-8+4\sqrt{5}+1\\&=9-4\sqrt{5}-8+4\sqrt{5}+1\\&=2\end{aligned}$$

Le membre de gauche vaut 2 et non 0 : $2-\sqrt{5}$ **n'est pas** solution.

Exercice 7 – Calculs longs ★★★

Calcule et donne le résultat le plus simple.

a) $\left(1+\sqrt{3}\right)^3$

$$\begin{aligned}&=\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(1+\sqrt{3}\right)\\&=\left(1+2\sqrt{3}+3\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\\&=\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\\&=4\times1+4\times\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times1+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}\\&=4+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+6\\&=10+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}-\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\\&=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\\&=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)\\&=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1\\&=2\end{aligned}$$

c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}\\&=\frac{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}{3-1}\\&=\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{8}{2}\\&=4\end{aligned}$$

Exercice 8 – Longueurs et aires exactes ★★★

Rédige. Donne des valeurs exactes, sans racine au dénominateur.

a) On cherche l'aire $\mathcal{A}$: c'est le côté au carré.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left(3+\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 3^2 + 2\times 3\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{2} + 2 \\ &= 11 + 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'aire vaut $11+6\sqrt{2}$ cm².

La diagonale d coupe le carré en deux triangles rectangles.

Pythagore : $d^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$, donc $d = \sqrt{2}\,c$.

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{2}\times\left(3+\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\times 3 + \sqrt{2}\times\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 2\end{aligned}$$

La diagonale mesure $3\sqrt{2}+2$ cm.

b) Aire d'un rectangle : longueur × largeur.

On reconnaît $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2 \\ &= 5 - 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

L'aire vaut 4 cm².

La diagonale d est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont la longueur et la largeur.

Pythagore :

$$\begin{aligned}d^2 &= \left(\sqrt{5}+1\right)^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^2 \\ &= \left(5 + 2\sqrt{5} + 1\right) + \left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) \\ &= \left(6 + 2\sqrt{5}\right) + \left(6 - 2\sqrt{5}\right) \\ &= 12\end{aligned}$$

Donc $d = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$.

La diagonale mesure $2\sqrt{3}$ cm.

c) On cherche l'autre côté b.

L'aire d'un triangle rectangle est le produit des côtés de l'angle droit divisé par 2.

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)b}{2} = 1 \\ &\iff \left(\sqrt{2}+1\right)b = 2 \\ &\iff b = \frac{2}{\sqrt{2}+1}\end{aligned}$$

On enlève la racine du dénominateur avec la quantité conjuguée $\sqrt{2}-1$.

$$\begin{aligned}b &= \frac{2}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} \\ &= 2\sqrt{2} - 2\end{aligned}$$

L'autre côté de l'angle droit mesure $2\sqrt{2}-2$ cm.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon résultat.

a) *Oubli du double produit* $2 \times 1 \times \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}&\left(1+\sqrt{3}\right)^2\\&= 1 + 2\sqrt{3} + 3\\&= 4 + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) *Le* 3 *est élevé au carré lui aussi :* $3^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2$.

$$\begin{aligned}&\left(3\sqrt{2}\right)^2\\&= 9 \times 2\\&= 18\end{aligned}$$

c) *C'est* $a^2 - b^2$ *: on soustrait,* $7 - 3$.

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\\&= 7 - 3\\&= 4\end{aligned}$$

d) *Le numérateur aussi est multiplié par* $\sqrt{3}$ *:* $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$*, qui se simplifie par* 3.

$$\begin{aligned}&\frac{3}{\sqrt{3}}\\&= \frac{3\sqrt{3}}{3}\\&= \sqrt{3}\end{aligned}$$

e) *Le conjugué de* $\sqrt{5} - 1$ *est* $\sqrt{5} + 1$ *: on change le signe entre les deux termes.*

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\sqrt{5}-1}\\&= \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}\\&= \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}\\&= \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\\&= \frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{aligned}$$

f) *Le signe* $-$ *porte sur tout le produit :* $-(2 - \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}&3 - \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\\&= 3 - \left(\sqrt{2}\times\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)\\&= 3 - \left(2 - \sqrt{2}\right)\\&= 3 - 2 + \sqrt{2}\\&= 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $(\sqrt{2} - 3)^2$ est égal à :

Réponse C : $11 - 6\sqrt{2}$
$(\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 + 3^2 = 2 - 6\sqrt{2} + 9$.

2. $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ est égal à :

Réponse A : $3\sqrt{2}$

$\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$

3. $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)$ est égal à :

Réponse D : 2

$(\sqrt{6})^2 - 2^2 = 6 - 4 = 2.$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ s'écrit :

Réponse B : $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{3-1}.$

5. $\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-2)$ est égal à :

Réponse D : $5-2\sqrt{5}$

$\sqrt{5}\times\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5}.$

6. $1-\sqrt{2}$ est solution de :

Réponse A : $x^2 - 2x - 1 = 0$

$(1-\sqrt{2})^2 - 2(1-\sqrt{2}) - 1 = 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0.$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).