49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 4e : définition et carrés parfaits

À retenir : Pour $a \geqslant 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre positif ou nul dont le carré vaut a : $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ car $1{,}2 \geqslant 0$ et $1{,}2^2 = 1{,}44$. On a $(\sqrt{a})^2 = a$. $\sqrt{-4}$ n'existe pas, mais $-\sqrt{4} = -2$ existe.

Ex. 1 ★☆☆ **Calculs en ligne** — Calcule sans calculatrice.

a) $\sqrt{169}$ b) $\sqrt{0}$ c) $(\sqrt{11})^2$

d) $\sqrt{0{,}09}$ e) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ f) $\sqrt{5^2}$

g) $\sqrt{121}$

Ex. 2 ★☆☆ **Existe ou n'existe pas ?** — Ce nombre existe-t-il ? Si oui, donne sa valeur exacte ; sinon, justifie.

a) $\sqrt{-16}$ b) $-\sqrt{16}$ c) $\sqrt{1}$

d) $-\sqrt{0{,}01}$ e) $\sqrt{100-36}$ f) $\sqrt{36-100}$

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Noé** — Noé a écrit les égalités suivantes. Pour chacune : a-t-il raison ? Justifie, puis corrige si besoin.

a) $\sqrt{400} = \pm 20$ b) $\sqrt{2{,}56} = 1{,}6$ c) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}07$

d) $\sqrt{0{,}9} = 0{,}3$ e) $\sqrt{3} = 1{,}732$

Ex. 4 ★★☆ **Carrés, écran et terrain** — Réponds à chaque question en rédigeant.

a) Un carré a une aire de 196 m². Calcule la longueur de son côté.

b) Un écran carré a une aire de 0,64 m². Calcule la longueur de son côté, en centimètres.

c) Un carré a une aire de 10 cm². Donne la valeur exacte de son côté, puis son périmètre arrondi au dixième.

d) Un terrain rectangulaire mesure 7 m sur 24 m. Calcule la longueur exacte de sa diagonale.

Ex. 5 ★★★ **Démontrer avec les deux conditions** — Pour démontrer que $\sqrt{a} = b$, tu vérifies deux conditions : $b \geqslant 0$ et $b^2 = a$. Rédige chaque réponse.

a) Démontre que $\sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$.

b) Démontre que $\sqrt{\dfrac{144}{625}} = \dfrac{12}{25}$.

c) On a $(-8)^2 = 64$. Explique pourquoi on ne peut pas écrire $\sqrt{64} = -8$, puis donne la valeur de $\sqrt{64}$.

d) Tom affirme : « $\sqrt{49} = \frac{49}{2}$, car la racine carrée, c'est la moitié. » A-t-il raison ? Justifie avec les deux conditions.

Ex. 5 (suite)

e) Démontre que $\sqrt{1+3+5+7+9+11+13+15+17}$ est un entier et donne sa valeur.

Ex. 6 ★★★ **Le jardin de Malik** — Malik trace dans son jardin un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 9$ m et $AC = 12$ m. Garde les valeurs exactes et n'arrondis qu'à la fin, quand on te le demande.

a) Calcule la longueur BC avec le théorème de Pythagore.

b) Un carré a la même aire que le triangle ABC. Donne la valeur exacte de son côté, puis une valeur approchée au centimètre.

c) Malik pave une allée avec des dalles carrées de côté 1 m. Calcule la valeur exacte de la diagonale d'une dalle.

d) Il pose un joint le long d'une diagonale sur chacune des 10 dalles. Donne la longueur totale exacte du joint, puis son arrondi au centimètre.

e) Zoé, elle, a remplacé $\sqrt{2}$ par 1,4 dès le début. Quelle longueur trouve-t-elle ? Calcule son erreur, au centimètre près.

Ex. 7 ★★★ **Chasse aux carrés parfaits** — Réponds sans calculatrice et justifie chaque réponse.

a) Trouve tous les entiers n tels que $100 \leqslant n \leqslant 250$ et que $\sqrt{n}$ soit un entier. Justifie que tu n'en oublies aucun.

b) Trouve le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\sqrt{12 \times k}$ soit un entier, et donne cet entier.

c) Jade affirme : « $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, donc $\sqrt{0{,}036} = 0{,}06$. » A-t-elle raison ? Justifie, puis trouve le nombre dont la racine carrée vaut 0,06.

d) Démontre que $\sqrt{13^2 - 12^2} \neq \sqrt{13^2} - \sqrt{12^2}$.

2. Produit et quotient de racines carrées

À retenir : Pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et, si $b > 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. $(k\sqrt{a})^2 = k^2 a$: $(2\sqrt{7})^2 = 28$. Aucune règle pour une somme, et $2 \times \sqrt{3} \neq \sqrt{6}$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : regrouper sous une seule racine** — Calcule. Donne le résultat sous forme d'un entier ou d'une fraction.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$ b) $\sqrt{\dfrac{25}{64}}$ c) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{6} \times \sqrt{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{15}}{}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$

g) $\sqrt{1{,}6} \times \sqrt{10}$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : carré de k√a** — Calcule. Donne un résultat sans racine quand c'est possible.

(a) $(4\sqrt{3})^2$ (b) $(-2\sqrt{6})^2$ (c) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

(d) $2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}$ (e) $-(3\sqrt{7})^2$ (f) $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}$

Ex. 10 ★★☆ **Erreurs d'élèves** — Pour chaque calcul, dis si l'élève a raison. Justifie par un calcul et corrige si besoin.

(a) Lucas écrit : $\sqrt{36} + \sqrt{64} = \sqrt{100} = 10$.

(b) Inès écrit : $2 \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$.

(c) Hugo écrit : $\sqrt{-2} \times \sqrt{-18} = \sqrt{36} = 6$.

(d) Chloé écrit : $(5\sqrt{2})^2 = 10$.

(e) Nathan écrit : $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = 3$.

Ex. 11 ★★☆ **Un rectangle aux côtés irrationnels** — Un rectangle a pour longueur $\sqrt{28}$ cm et pour largeur $\sqrt{7}$ cm.

(a) Recopie et complète, pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$: « $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est … car … ; $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \ldots \times \ldots = \ldots$; Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \ldots$ ».

(b) L'aire de ce rectangle est-elle un nombre entier ? Justifie par un calcul.

(c) Combien de fois la largeur est-elle contenue dans la longueur ? Justifie par un calcul.

(d) Ben affirme que la diagonale mesure $\sqrt{28} + \sqrt{7}$ cm. Calcule la valeur exacte de la diagonale, puis compare avec des valeurs approchées au centième. Est-ce juste ?

Ex. 12 ★★★ **Démontrer la règle du quotient puis l'utiliser** — Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On veut démontrer que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, puis utiliser cette règle.

(a) Explique pourquoi le nombre $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est positif ou nul. Pourquoi faut-il $b > 0$ et pas seulement $b \geqslant 0$?

(b) Calcule $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$. Conclus avec la définition de la racine carrée.

(c) Calcule $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$ puis $\sqrt{\frac{196}{81}}$. Donne des résultats sans racine.

(d) Sacha écrit : $\frac{\sqrt{63}}{3} = \sqrt{21}$. Est-ce juste ? Écris 3 comme une racine carrée, puis donne la valeur exacte correcte.

Ex. 13 ★★★ **Démontrer qu'un nombre est un entier** — Pour chaque nombre, dis s'il est un entier. Justifie par un calcul rédigé.

(a) $A = \sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{12}$

(b) $B = (-2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2$

(c) $C = \sqrt{11} \times \sqrt{11} + \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

(d) $D = 2\sqrt{3} \times \sqrt{6}$. Zoé affirme que $D = \sqrt{36} = 6$. Calcule D^2 et conclus.

Ex. 14 ★★★ **Vrai ou faux sur les règles de calcul** — Vrai ou faux ? Justifie : une preuve si c'est vrai, un contre-exemple si c'est faux.

(a) Pour tous $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(b) Pour tout $a \geqslant 0$: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

(c) Pour tous réels a et b tels que $ab \geqslant 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

(d) Pour tout $a \geqslant 0$: $\sqrt{25a} = 5\sqrt{a}$.

(e) Pour tout réel k, même négatif : $(k\sqrt{5})^2 = 5k^2$.

3. *Écrire sous la forme a√b, sommes de racines carrées*

À retenir : Je sors le plus grand carré parfait : $\sqrt{k^2 b} = k\sqrt{b}$ ($\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$). Je ne regroupe que les mêmes racines : $a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b}$. Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$.

Ex. 15 ★☆☆ **Sortir le plus grand carré parfait** — Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b entier le plus petit possible. Teste les carrés parfaits du plus grand au plus petit.

(a) $\sqrt{288}$ (b) $\sqrt{275}$ (c) $\sqrt{180}$

(d) $\sqrt{300}$ (e) $\sqrt{320}$ (f) $\sqrt{343}$

Ex. 16 ★☆☆ **Faire entrer le coefficient sous la racine** — Écris chaque nombre sous la forme $\sqrt{n}$, avec n entier, en utilisant $k\sqrt{b} = \sqrt{k^2 b}$ pour $k \geqslant 0$.

(a) $3\sqrt{10}$ (b) $4\sqrt{6}$ (c) $2\sqrt{17}$

(d) $3\sqrt{14}$ (e) $6\sqrt{7}$ (f) $8\sqrt{3}$

Ex. 17 ★★☆ **Réduire une somme de racines carrées** — Réduis chaque expression : simplifie d'abord chaque racine sous la forme $a\sqrt{b}$, puis regroupe seulement les termes qui ont la même racine.

(a) $A = \sqrt{18} + \sqrt{50}$ (b) $B = \sqrt{98} - 4\sqrt{18}$

(c) $C = 2\sqrt{12} + \sqrt{5} - \sqrt{20}$ (d) $D = \sqrt{11} + \sqrt{11} + \sqrt{99}$

Ex. 18 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Justifie chaque réponse par un calcul, puis donne le résultat correct.

(a) Lina écrit $\sqrt{108} = 2\sqrt{27}$ et s'arrête là. A-t-elle terminé ?

(b) Malo écrit $\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{10}$. A-t-il raison ?

(c) Sacha écrit $\sqrt{24} + \sqrt{54} = \sqrt{78}$. A-t-il raison ?

(d) Yanis écrit $4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{5}$. A-t-il raison ? Utilise des valeurs approchées au centième.

(e) Zoé écrit $-2\sqrt{10} = \sqrt{40}$. A-t-elle raison ?

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur les racines carrées** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul ou par un contre-exemple.

(a) Pour tous nombres positifs a et b, on a $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(b) $\sqrt{52} + \sqrt{117} = \sqrt{325}$.

Ex. 19 **(suite)**

(c) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} + \sqrt{60} = \sqrt{75}$.

(d) Pour tout nombre $n \geqslant 0$, on a $\sqrt{n} + \sqrt{4n} + \sqrt{9n} = 6\sqrt{n}$.

Ex. 20 ★★★ **Un triangle aux côtés en racines carrées** — On donne un triangle EFG tel que $EF = \sqrt{45}$ cm, $FG = \sqrt{80}$ cm et $EG = \sqrt{125}$ cm. Donne des valeurs exactes.

(a) Écris EF, FG et EG sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b entier le plus petit possible.

(b) Calcule le périmètre du triangle EFG sous la forme $a\sqrt{b}$.

(c) Démontre que le triangle EFG est rectangle et précise en quel sommet.

(d) Calcule l'aire du triangle EFG. Ce nombre est-il un entier ? Justifie par un calcul.

(e) Noé affirme que le périmètre vaut $\sqrt{45 + 80 + 125} = \sqrt{250}$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Des sommes qui cachent des entiers** — On pose $A = \sqrt{28} - 2\sqrt{112} + \sqrt{175}$, $B = \sqrt{147} - 2\sqrt{243} + 3\sqrt{75}$ et $C = \sqrt{242} - \sqrt{2} + \sqrt{363} - 3\sqrt{27}$.

(a) Démontre que A^2 est un nombre entier.

(b) Démontre que B peut s'écrire $\sqrt{n}$, avec n entier, et donne n.

(c) Trouve l'entier n tel que $\sqrt{32} + \sqrt{162} + \sqrt{n} = 15\sqrt{2}$. Justifie.

(d) Réduis C au maximum. Lucas a commencé par écrire $\sqrt{242} - \sqrt{2} = \sqrt{240}$: explique son erreur.

4. *Développer avec des racines carrées*

À retenir : Développe, puis réduis : entiers d'un côté, termes en $\sqrt{b}$ de l'autre ($\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$). Pense au double produit : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$, pas $1+3$. Conjugués : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a - b$.

Ex. 22 ★☆☆ **Distributivité et double distributivité** — Développe et réduis. Donne le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ ou sous la forme d'un entier.

(a) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7} + 2\right)$ (b) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - \sqrt{3}\right)$

(c) $\left(4 + \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)$ (d) $\left(5 - \sqrt{2}\right)\left(1 + 3\sqrt{2}\right)$

(e) $2\left(5 - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\left(4 + \sqrt{3}\right)$

Ex. 23 ★☆☆ **Identités remarquables** — Développe avec une identité remarquable, puis réduis.

(a) $\left(3 + \sqrt{7}\right)^2$ (b) $\left(1 - 2\sqrt{5}\right)^2$

(c) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{6}\right)$ (d) $\left(4 + 3\sqrt{2}\right)\left(4 - 3\sqrt{2}\right)$

(e) $-\left(3 - \sqrt{10}\right)^2$

Ex. 24 ★★☆ **Repère l'erreur** — Chaque élève a fait une erreur en développant. Trouve-la, puis écris le calcul correct.

(a) Inès écrit $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2 = 5 + 3 = 8$. Trouve son erreur en développant, puis corrige.

(b) Hugo écrit $\left(2 + \sqrt{6}\right)^2 = 4 + 6 = 10$. Quel terme a-t-il oublié ? Corrige son calcul.

(c) Léa écrit $\left(\sqrt{7} - 1\right)\left(\sqrt{7} + 2\right) = 7 + 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 2 = 9 + \sqrt{7}$. Trouve l'erreur et corrige.

(d) Nora écrit $\left(\sqrt{2} - 3\right)\left(\sqrt{2} + 3\right) = 2 - 3 = -1$. Trouve l'erreur et corrige.

Ex. 25 ★★☆ **Un rectangle et des nombres entiers** — Un rectangle $ABCD$ a pour côtés $AB = 3 + \sqrt{2}$ et $BC = 3 - \sqrt{2}$ (en cm). Donne les valeurs exactes.

(a) Calcule l'aire du rectangle $ABCD$. Est-ce un nombre entier ? Justifie par un calcul.

(b) Calcule le périmètre du rectangle $ABCD$.

(c) Avec le théorème de Pythagore, calcule la longueur de la diagonale AC.

(d) On allonge le côté $[AB]$ de $\sqrt{2}$ cm sans changer BC. Calcule la nouvelle aire sous la forme $a + b\sqrt{2}$.

Ex. 26 ★★★ **Vérifier qu'un nombre est solution** — On considère l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$. Tu ne la résous pas : tu remplaces x par le nombre proposé, tu développes et tu réduis.

(a) Développe et réduis $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$. Donne le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$.

(b) Vérifie que $1 + \sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.

(c) Le nombre $1 - \sqrt{2}$ est-il aussi solution de cette équation ? Justifie par un calcul.

(d) Lina affirme que $1 + \sqrt{2}$ est solution de $(x - 2)(x + 3) = 2 + 3\sqrt{2}$. A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

Ex. 27 ★★★ **Un signe moins devant le carré** — On pose $A = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$, $B = 7 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$ et $C = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$. Donne les valeurs exactes.

(a) Développe et réduis $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2$. Donne le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$.

(b) Écris B sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a entier.

(c) Écris A sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a entier.

(d) Le nombre C est-il un entier ? Justifie par un calcul.

Ex. 28 ★★★ **Triangle rectangle et hauteur** — Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ (en cm). On note H le pied de la hauteur issue de A. Donne les valeurs exactes.

(a) Développe AB^2 et AC^2. Écris chaque résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$.

(b) Calcule la longueur BC. Est-ce un nombre entier ? Justifie.

Ex. 28 **(suite)**

(c) Calcule l'aire du triangle ABC, en cm².

(d) En écrivant l'aire du triangle d'une deuxième façon, calcule la longueur AH.

5. *Supprimer la racine carrée du dénominateur*

À retenir : Pour enlever la racine du dénominateur, on multiplie le numérateur ET le dénominateur par $\sqrt{b}$ (car $\sqrt{b}\times\sqrt{b}=b$) ou par l'expression conjuguée : $\frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$. Puis on simplifie.

Ex. 29 ★☆☆ **Dénominateur $\sqrt{b}$ ou $k\sqrt{b}$** — Écris chaque nombre sans racine carrée au dénominateur, puis simplifie la fraction.

(a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (e) $\frac{9}{4\sqrt{3}}$ (f) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Ex. 30 ★☆☆ **Expression conjuguée et produit** — Pour chaque nombre, écris son expression conjuguée, puis calcule le produit du nombre par son expression conjuguée.

(a) $4+\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{5}+1$

(d) $3-\sqrt{11}$ (e) $\sqrt{10}+\sqrt{3}$ (f) $5-2\sqrt{6}$

Ex. 31 ★★☆ **Dénominateur avec l'expression conjuguée** — Écris chaque nombre sans racine carrée au dénominateur à l'aide de l'expression conjuguée, puis simplifie le résultat.

(a) $\frac{6}{4+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{6}{2-\sqrt{7}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(d) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

Ex. 32 ★★☆ **Erreurs à corriger et égalités à prouver** — Réponds à chaque question en justifiant par un calcul.

(a) Inès écrit : $\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{9+2} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{11}$. Repère son erreur et corrige le calcul.

(b) Théo écrit : $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{36} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Prouve que $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$.

(d) Prouve que $\frac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$.

Ex. 33 ★★★ **Un rectangle à dimensions irrationnelles** — Un rectangle a une aire de 4 cm² et une longueur $L = 3+\sqrt{5}$ cm. On note ℓ sa largeur, en cm. Donne chaque résultat en valeur exacte, sans racine carrée au dénominateur.

(a) Exprime ℓ en fonction de L, puis écris ℓ sans racine carrée au dénominateur.

(b) Justifie que la largeur trouvée est bien un nombre positif, en comparant $\sqrt{5}$ et 3 par leurs carrés.

Ex. 33 **(suite)**

(c) Le périmètre de ce rectangle est-il un nombre entier ? Justifie par un calcul.

(d) Calcule la longueur exacte de la diagonale du rectangle et écris-la sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b entier le plus petit possible.

(e) Calcule le quotient $\frac{L}{\ell}$ et écris-le sans racine carrée au dénominateur.

Ex. 34 ★★★ **Ce nombre est-il un entier ?** — Pour chaque nombre, écris les fractions sans racine carrée au dénominateur, puis réduis. Le nombre est-il un entier ? Justifie par un calcul.

(a) $A = \frac{4}{5-\sqrt{21}} + \frac{4}{5+\sqrt{21}}$

(b) $B = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(c) $C = \frac{1+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} + 3\sqrt{5}$

(d) $D = \frac{12}{\sqrt{6}} - \frac{10}{\sqrt{6}+1}$

Ex. 35 ★★★ **Une somme qui se simplifie en cascade** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Développe et réduis le produit $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

(b) Déduis-en une écriture de $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ sans racine carrée au dénominateur.

(c) Soit $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$. S est-il un entier ? Justifie.

(d) Écris $T = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{18}}$ sous la forme $a\sqrt{b}+c$, avec a, b, c entiers.

(e) On poursuit la même somme à partir de $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Jusqu'à quel dénominateur $\sqrt{N}+\sqrt{N+1}$ faut-il aller pour que la somme vaille 10 ? Justifie.

6. *$\sqrt{(a^2)} = |a|$*

À retenir : Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a|$, avec $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$. Avant d'enlever racine et carré, cherche le signe : $\sqrt{(-6)^2} = 6$, pas -6. $(\sqrt{a})^2 = a$ seulement si $a \geqslant 0$.

Ex. 36 ★☆☆ **Valeurs absolues et racines de carrés** — Donne la valeur exacte de chaque nombre, sans racine carrée ni valeur absolue.

(a) $|-9|$ (b) $|3-\pi|$ (c) $\sqrt{(-8)^2}$

(d) $\sqrt{(-0{,}6)^2}$ (e) $-\sqrt{11^2}$ (f) $\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{3^2}$

Ex. 37 ★☆☆ **Chercher le signe avant d'enlever la racine** — Écris chaque nombre sans racine extérieure ni valeur absolue. Cherche d'abord le signe de ce qui est au carré (ou entre les barres).

(a) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ (b) $\sqrt{(\sqrt{26}-5)^2}$ (c) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$

(d) $|1{,}4-\sqrt{2}|$ (e) $\sqrt{(3{,}2-\pi)^2}$ (f) $|3\sqrt{2}-4|$

Ex. 38 ★★☆ **Une racine de carré qui dépend de x** — Pour tout réel x, on pose $A=\sqrt{(x-5)^2}$.

(a) Calcule A pour $x=8$, puis pour $x=1$.

(b) Écris A sans racine lorsque $x \geqslant 5$, puis lorsque $x<5$.

(c) Pour $x<5$, simplifie $A+x$. Que remarques-tu ?

(d) Calcule A pour $x=\sqrt{23}$. Compare d'abord $\sqrt{23}$ et 5.

Ex. 39 ★★☆ **Démonstration guidée : $\sqrt{(a^2)}=|a|$** — Soit a un réel quelconque. On rappelle que, pour $b \geqslant 0$, $\sqrt{b}$ est l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut b.

(a) Explique pourquoi $|a| \geqslant 0$, en distinguant les cas $a \geqslant 0$ et $a<0$.

(b) Montre que $|a|^2=a^2$, en distinguant les deux mêmes cas.

(c) Déduis-en que $\sqrt{a^2}=|a|$.

(d) Utilise ce résultat pour écrire $\sqrt{49a^2}$ sans racine lorsque $a<0$.

Ex. 40 ★★★ **Vrai ou faux sur la racine d'un carré** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie : un contre-exemple si elle est fausse, un raisonnement rédigé si elle est vraie.

(a) « Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=x$. »

(b) « Pour tout réel a, $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$. »

(c) « $|\pi-4|=\pi-4$. »

(d) « $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=\sqrt{10}-3$. »

Ex. 41 ★★★ **Une somme de deux racines de carrés** — Pour tout réel x, on pose $B=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+4)^2}$.

(a) Calcule la valeur exacte de B pour $x=0$, puis pour $x=-6$.

(b) Lina affirme : « Pour tout x, $B=(x-2)+(x+4)=2x+2$. » A-t-elle raison ? Justifie à l'aide d'un calcul.

(c) On suppose $-4 \leqslant x \leqslant 2$. Donne le signe de $x-2$ et celui de $x+4$, puis écris B sans racine.

(d) On suppose $x \geqslant 2$. Écris B sans racine.

(e) Trouve le réel $x \geqslant 2$ pour lequel $B=20$. Vérifie ensuite ta réponse dans la définition de B.

Ex. 42 ★★★ **Un entier caché sous les racines** — On pose $C=\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{17})^2}$ et $D=\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}$.

(a) Compare 4 et $\sqrt{17}$ en comparant leurs carrés. Déduis-en le signe de $4-\sqrt{17}$.

(b) Compare 5 et $\sqrt{17}$ de la même façon. Déduis-en le signe de $5-\sqrt{17}$.

(c) Le nombre C est-il un entier ? Justifie par un calcul.

(d) Écris D sans racine extérieure, sous la forme $a\sqrt{3}+b$ avec a et b entiers.

(e) Hugo affirme : « D est un nombre entier. » A-t-il raison ? Justifie en encadrant $4\sqrt{3}$ entre deux entiers consécutifs.

7. Comparer et encadrer

À retenir : Pour comparer deux nombres positifs, je compare leurs carrés : $(2\sqrt{6})^2=24>23$ donc $2\sqrt{6}>\sqrt{23}$. Cela ne marche pas pour des négatifs. Si $n^2 \leqslant a<(n+1)^2$, alors $n \leqslant \sqrt{a}<n+1$. Une valeur arrondie n'est pas un encadrement.

Ex. 43 ★☆☆ **Comparer sans calculatrice** — Compare les nombres sans valeur approchée. Justifie avec les carrés.

(a) $4\sqrt{3}$ et $3\sqrt{5}$

(b) 9 et $\sqrt{80}$

(c) $-2\sqrt{3}$ et $-\sqrt{11}$

(d) 0,09 et $\sqrt{0{,}09}$

(e) $3\sqrt{6}$ et $2\sqrt{13}$

(f) Range dans l'ordre croissant : $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{19}$.

Ex. 44 ★☆☆ **Entre deux entiers consécutifs** — Encadre chaque nombre entre deux entiers consécutifs. Cite les carrés parfaits que tu utilises.

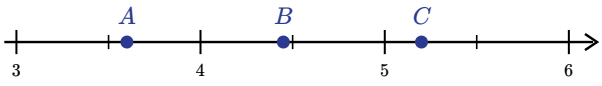
(a) $\sqrt{55}$

(b) $\sqrt{130}$

(c) $-\sqrt{200}$

(d) $2\sqrt{10}$

(e) Sur cette droite graduée, lequel des points A, B ou C a pour abscisse $\sqrt{20}$?



Ex. 45 ★★☆ **Le côté d'une terrasse carrée** — Une terrasse carrée a une aire de 47 m². On note c la longueur de son côté, en mètres.

(a) Explique pourquoi $c=\sqrt{47}$, puis encadre c entre deux entiers consécutifs.

Ex. 45 **(suite)**

(b) Complète le tableau :

x	6,6	6,7	6,8	6,9
x^2	…	…	…	…

(c) Déduis-en un encadrement de $\sqrt{47}$ au dixième.

(d) Zoé dit : « La valeur arrondie de $\sqrt{47}$ au dixième est 6,8, la borne de gauche. » Calcule $6{,}85^2$. Zoé a-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Le programme de Nina** — Nina écrit ce programme. Il doit renvoyer le couple $(k, k+1)$, où k est l'entier tel que $k \leqslant \sqrt{a} < k+1$, pour un entier a positif.

```
def encadre_entier(a):
    k = 0
    while (k + 1)**2 < a:
        k = k + 1
    return k, k + 1
```

(a) Qu'affiche `print(encadre_entier(30))` ? Ce résultat est-il juste ? Justifie.

(b) Qu'affiche `print(encadre_entier(36))` ? Explique pourquoi ce résultat ne convient pas.

(c) Corrige la ligne du `while`. Donne ensuite l'affichage de `print(encadre_entier(36))`.

(d) Écris une fonction `encadre_dixieme(a)` qui calcule seulement avec des entiers : elle compare `(k + 1)**2` à `a * 100` et renvoie `k / 10, (k + 1) / 10`. Qu'affiche-t-elle pour `a = 13` ?

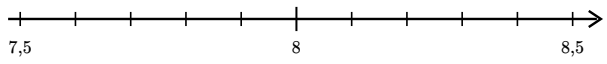
Ex. 47 ★★★ **Ranger, encadrer, placer** — On pose $a = 3\sqrt{7}$, $b = 2\sqrt{17}$ et $c = 8$. Tu travailles sans calculatrice.

(a) Explique pourquoi tu peux comparer a, b et c par leurs carrés, puis range ces trois nombres dans l'ordre croissant.

(b) Léo écrit : « $\left(-3\sqrt{7}\right)^2 = 63$ et $\left(-2\sqrt{17}\right)^2 = 68$, donc $-3\sqrt{7} < -2\sqrt{17}$. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Encadre a et b au dixième. Cite les carrés que tu utilises.

(d) Place les points A, B et C d'abscisses a, b et c sur la droite graduée.



Ex. 48 ★★★ **Le balayage de Sacha** — Sacha veut une fonction qui renvoie le couple (m, M) tel que $m \leqslant \sqrt{a} < M$ et $M - m = 10^{-n}$. Voici son programme.

```
def encadre(a, n):
    p = 10**n
    k = 0
    while (k + 1)**2 <= a * p**2:
        k = k + 1
    return k / p, (k + 1) / p
```

(a) Qu'affiche `print(encadre(2, 2))` ? Justifie avec deux carrés.

Ex. 48 **(suite)**

(b) Qu'affiche `print(encadre(49, 1))` ? Pourquoi la borne de gauche est-elle ici la valeur exacte de $\sqrt{49}$?

(c) Explique pourquoi la condition `(k + 1)**2 <= a * p**2` revient à $\left(\frac{k+1}{p}\right)^2 \leqslant a$.

(d) Tom propose la condition `((k + 1) / p)**2 <= a`. Python trouve `1.1**2` égal à `1.2100000000000002`. Qu'afficherait `print(encadre(1.21, 1))` ? Conclus.

Ex. 49 ★★★ **Une racine plus grande que le nombre ?** — Dans cet exercice, a désigne un nombre strictement positif. On cherche à comparer a et $\sqrt{a}$, sans calculatrice.

(a) Calcule $\sqrt{0{,}49}$ et $\sqrt{1{,}44}$. Compare ensuite chaque racine au nombre sous la racine.

(b) On suppose $0 < a < 1$. Montre que $a^2 < a$ en étudiant le signe de $a^2 - a$.

(c) Déduis-en, en comparant des carrés, que $\sqrt{a} > a$ lorsque $0 < a < 1$.

(d) Une dalle carrée a une aire de 0,8 m². Son côté mesure-t-il plus de 0,8 m ? Justifie, puis encadre ce côté au dixième.