1. Rappels de 4e : définition et carrés parfaits

Ex. 1 ★☆☆ **Calculs en ligne**

(a) $\sqrt{169} = 13$ car $13 \geqslant 0$ et $13^2 = 169$.

(b) $\sqrt{0} = 0$ car $0 \geqslant 0$ et $0^2 = 0$.

(c) $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$ par définition, car $11 \geqslant 0$.

(d) $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ car $0{,}3 \geqslant 0$ et $0{,}3^2 = 0{,}09$ (et non $0{,}03$, car $0{,}03^2 = 0{,}0009$).

(e) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} \geqslant 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

(f) $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$.

(g) $\sqrt{121} = 11$ car $11 \geqslant 0$ et $11^2 = 121$.

Ex. 2 ★☆☆ **Existe ou n'existe pas ?**

(a) $\sqrt{-16}$ n'existe pas : aucun réel n'a pour carré -16, car un carré n'est jamais négatif.

(b) $-\sqrt{16}$ existe : $-\sqrt{16} = -4$.

(c) $\sqrt{1} = 1$ car $1 \geqslant 0$ et $1^2 = 1$.

(d) $-\sqrt{0{,}01}$ existe : $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, donc $-\sqrt{0{,}01} = -0{,}1$.

(e) $100 - 36 = 64 \geqslant 0$, donc $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$.

(f) $36 - 100 = -64 < 0$: $\sqrt{36-100}$ n'existe pas.

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Noé**

(a) Faux : une racine carrée n'est jamais négative. $\sqrt{400} = 20$ car $20 \geqslant 0$ et $20^2 = 400$.

(b) Vrai : $1{,}6 \geqslant 0$ et $1{,}6^2 = 2{,}56$, donc $\sqrt{2{,}56} = 1{,}6$. Noé a raison.

(c) Faux : $0{,}07^2 = 0{,}0049 \neq 0{,}49$. Comme $0{,}7 \geqslant 0$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$, on a $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

(d) Faux : $0{,}3^2 = 0{,}09 \neq 0{,}9$. À la calculatrice, $\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$ (valeur approchée).

(e) Faux : $1{,}732^2 = 2{,}999\,824 \neq 3$. $1{,}732$ n'est qu'une valeur approchée : on écrit $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

Ex. 4 ★★☆ **Carrés, écran et terrain**

(a) Le côté c vérifie $c \geqslant 0$ et $c^2 = 196$, donc $c = \sqrt{196} = 14$. Le côté mesure 14 m.

(b) Le côté c vérifie $c \geqslant 0$ et $c^2 = 0{,}64$. Or $0{,}8 \geqslant 0$ et $0{,}8^2 = 0{,}64$, donc $c = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ m. Le côté mesure 80 cm.

Ex. 4 (suite)

(c) Le côté vaut $\sqrt{10}$ cm (valeur exacte). Le périmètre vaut $4\sqrt{10} \approx 12{,}6$ cm. On n'arrondit qu'à la fin : avec 3,2 on trouverait 12,8, ce qui est faux.

(d) D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$. Comme $25 \geqslant 0$ et $25^2 = 625$, $d = \sqrt{625} = 25$. La diagonale mesure 25 m.

Ex. 5 ★★★ **Démontrer avec les deux conditions**

(a) $0{,}15 \geqslant 0$ et $0{,}15^2 = 0{,}0225$. Les deux conditions sont vérifiées, donc $\sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$.

(b) $\frac{12}{25} \geqslant 0$ et $\left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{144}{625}$. Les deux conditions sont vérifiées, donc $\sqrt{\frac{144}{625}} = \frac{12}{25}$.

(c) -8 a bien pour carré 64, mais $-8 < 0$: la condition $b \geqslant 0$ n'est pas vérifiée. Une racine carrée n'est jamais négative. Comme $8 \geqslant 0$ et $8^2 = 64$, on a $\sqrt{64} = 8$.

(d) Tom a tort. $\frac{49}{2} \geqslant 0$, mais $\left(\frac{49}{2}\right)^2 = \frac{2401}{4} = 600{,}25 \neq 49$: la deuxième condition est fausse. En fait, $7 \geqslant 0$ et $7^2 = 49$, donc $\sqrt{49} = 7$.

(e) $1+3+5+7+9+11+13+15+17 = 81$. Comme $9 \geqslant 0$ et $9^2 = 81$, on a $\sqrt{81} = 9$. Ce nombre est donc l'entier 9.

Ex. 6 ★★★ **Le jardin de Malik**

(a) Le triangle est rectangle en A, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225$. Comme $BC \geqslant 0$, $BC = \sqrt{225} = 15$ car $15^2 = 225$.
Donc $BC = 15$ m.

(b) Aire du triangle : $\frac{9\times12}{2} = 54$ m². Le côté c du carré vérifie $c \geqslant 0$ et $c^2 = 54$, donc $c = \sqrt{54}$ m. Comme $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$, 54 n'est pas un carré parfait : on garde $\sqrt{54}$. Valeur approchée : $c \approx 7{,}35$ m.

(c) La diagonale coupe la dalle en deux triangles rectangles. Par le théorème de Pythagore : $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ et $d \geqslant 0$, donc $d = \sqrt{2}$ m (valeur exacte).

(d) Longueur totale : $10 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ m. On arrondit seulement maintenant : $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ m.

(e) Zoé trouve $10 \times 1{,}4 = 14$ m. Son erreur vaut $10\sqrt{2} - 14 \approx 0{,}14$ m, soit environ 14 cm. Arrondir trop tôt fausse le résultat : il faut garder $\sqrt{2}$ jusqu'au bout.

Ex. 7 ★★★ **Chasse aux carrés parfaits**

(a) $\sqrt{n}$ est un entier lorsque n est un carré parfait. Or $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$ et $16^2 = 256 > 250$. Les carrés d'entiers augmentent, donc les seuls entiers qui conviennent sont 100, 121, 144, 169, 196 et 225.

(b) $12 \times 1 = 12$ n'est pas un carré parfait ($3^2 = 9 < 12 < 16 = 4^2$). $12 \times 2 = 24$ non plus ($4^2 = 16 < 24 < 25 = 5^2$). $12 \times 3 = 36 = 6^2$.
Donc $k = 3$ et $\sqrt{36} = 6$, car $6 \geqslant 0$ et $6^2 = 36$.

(c) La première égalité est juste : $0{,}6 \geqslant 0$ et $0{,}6^2 = 0{,}36$. Mais $0{,}06^2 = 0{,}0036 \neq 0{,}036$: Jade a tort. Comme $0{,}06 \geqslant 0$ et $0{,}06^2 = 0{,}0036$, le nombre cherché est 0,0036.

(d) $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$, donc $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$. Or $\sqrt{13^2} - \sqrt{12^2} = 13 - 12 = 1$. Comme $5 \neq 1$, les deux nombres sont différents : la racine d'une différence n'est pas la différence des racines.

2. *Produit et quotient de racines carrées*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : regrouper sous une seule racine**

(a) $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$

(b) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$

(c) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$

(d) $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$

(e) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5 \times 15} = \sqrt{225} = 15$

(f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$

(g) $\sqrt{1{,}6} \times \sqrt{10} = \sqrt{1{,}6 \times 10} = \sqrt{16} = 4$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : carré de k$\sqrt{a}$**

(a) $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 4^2 \times 3 = 16 \times 3 = 48$

(b) $\left(-2\sqrt{6}\right)^2 = (-2)^2 \times 6 = 4 \times 6 = 24$: un carré est toujours positif.

(c) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{2^2} = \frac{5}{4}$

(d) $2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 2 \times 5 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 10 \times 3 = 30$

(e) $-\left(3\sqrt{7}\right)^2 = -\left(3^2 \times 7\right) = -63$: ici, le signe moins n'est pas élevé au carré.

(f) $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} = (2 \times 3) \times \sqrt{5 \times 2} = 6\sqrt{10}$: 10 n'est pas un carré parfait, la racine reste.

Ex. 10 ★★☆ **Erreurs d'élèves**

(a) Faux. $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$, alors que $\sqrt{100} = 10$. Il n'y a aucune règle pour une somme de racines.

(b) Faux. $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$ et $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$. Les carrés sont différents, donc $2\sqrt{5} = \sqrt{20} \neq \sqrt{10}$.

(c) Faux. $\sqrt{-2}$ et $\sqrt{-18}$ n'existent pas : la règle exige des nombres positifs. Il faut écrire $\sqrt{(-2) \times (-18)} = \sqrt{36} = 6$.

(d) Faux. $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 \times 2 = 25 \times 2 = 50$. Chloé a oublié d'élever 5 au carré.

(e) Juste. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$. Nathan a raison.

Ex. 11 ★★☆ **Un rectangle aux côtés irrationnels**

(a) $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif ou nul, car c'est le produit de deux nombres positifs ou nuls ; $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$;
Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est le nombre positif de carré ab : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

(b) $\mathcal{A} = \sqrt{28} \times \sqrt{7} = \sqrt{196} = 14$. Oui, l'aire est un entier : 14 cm².

(c) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$. La largeur est contenue 2 fois dans la longueur.

(d) Avec le théorème de Pythagore : $d^2 = \left(\sqrt{28}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 28 + 7 = 35$, donc $d = \sqrt{35} \approx 5{,}92$ cm. Or $\sqrt{28} + \sqrt{7} \approx 7{,}94$. Ben a tort : on n'additionne pas des racines comme ça.

Ex. 12 ★★★ **Démontrer la règle du quotient puis l'utiliser**

(a) $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} > 0$. Le quotient d'un nombre positif ou nul par un nombre strictement positif est positif ou nul. Il faut $b > 0$, car si $b = 0$, alors $\sqrt{b} = 0$ et on ne peut pas diviser par 0.

(b) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$.
Donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est un nombre positif ou nul dont le carré vaut $\frac{a}{b}$. Par définition, c'est $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

(c) $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$. Et $\sqrt{\frac{196}{81}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{81}} = \frac{14}{9}$.

(d) Faux. $3 = \sqrt{9}$, donc $\frac{\sqrt{63}}{3} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{63}{9}} = \sqrt{7}$. Sacha a divisé 63 par 3 au lieu de 9 ; or $\sqrt{21} \neq \sqrt{7}$ car $21 \neq 7$.

Ex. 13 ★★★ **Démontrer qu'un nombre est un entier**

(a) $A = \sqrt{2 \times 6 \times 12} = \sqrt{144} = 12$. A est un entier.

(b) $\left(-2\sqrt{7}\right)^2 = (-2)^2 \times 7 = 28$ (un carré est positif) et $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9 \times 3 = 27$.
Donc $B = 28 - 27 = 1$. B est un entier.

(c) $\sqrt{11} \times \sqrt{11} = 11$ et $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{16} = 4$.
Donc $C = 11 + 4 = 15$. C est un entier.

(d) $D > 0$ et $D^2 = 2^2 \times 3 \times 6 = 72$. Or $8^2 = 64 < 72 < 81 = 9^2$: aucun entier n'a pour carré 72, donc D n'est pas un entier. Zoé s'est trompée en écrivant $2 \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$: en fait, $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

Ex. 14 ★★★ **Vrai ou faux sur les règles de calcul**

(a) Faux. Avec $a = 25$ et $b = 144$:
$\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$, mais
$\sqrt{25} + \sqrt{144} = 5 + 12 = 17$. Il n'y a pas de règle pour une somme.

(b) Vrai. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, donc
$\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \times \sqrt{a} = a\sqrt{a}$. Par exemple,
$\sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$.

(c) Faux. Avec $a = -3$ et $b = -12$: $ab = 36 \geqslant 0$ et $\sqrt{36} = 6$, mais $\sqrt{-3}$ et $\sqrt{-12}$ n'existent pas. La règle demande $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

(d) Vrai. Comme $25 \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$:
$\sqrt{25a} = \sqrt{25} \times \sqrt{a} = 5\sqrt{a}$.

(e) Vrai. $\left(k\sqrt{5}\right)^2 = k^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5k^2$. Si $k < 0$, k^2 est quand même positif : par exemple $\left(-3\sqrt{5}\right)^2 = 45$.

3. *Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, sommes de racines carrées*

Ex. 15 ★☆☆ **Sortir le plus grand carré parfait**

(a) Aucun carré parfait plus grand que 144 ne divise 288, mais 144 oui : $288 = 144 \times 2$, donc
$\sqrt{288} = \sqrt{144} \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.
($4\sqrt{18}$ ou $6\sqrt{8}$ ne sont pas terminés : 18 et 8 contiennent encore un carré.)

(b) Aucun carré parfait plus grand que 25 ne divise 275, mais 25 oui : $275 = 25 \times 11$, donc
$\sqrt{275} = \sqrt{25} \times \sqrt{11} = 5\sqrt{11}$.

(c) 169, 144, 121, 100, 81, 64 et 49 ne divisent pas 180, mais 36 oui : $180 = 36 \times 5$, donc $\sqrt{180} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

(d) $300 = 100 \times 3$, donc $\sqrt{300} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$.

Ex. 15 (suite)

(e) Aucun carré parfait plus grand que 64 ne divise 320, mais 64 oui : $320 = 64 \times 5$, donc
$\sqrt{320} = \sqrt{64} \times \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$.
($4\sqrt{20}$ ou $2\sqrt{80}$ ne sont pas terminés.)

(f) Aucun carré parfait plus grand que 49 ne divise 343, mais 49 oui : $343 = 49 \times 7$, donc
$\sqrt{343} = \sqrt{49} \times \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$.

Ex. 16 ★★☆ **Faire entrer le coefficient sous la racine**

(a) $3\sqrt{10} = \sqrt{9 \times 10} = \sqrt{90}$.

(b) $4\sqrt{6} = \sqrt{16 \times 6} = \sqrt{96}$.

(c) $2\sqrt{17} = \sqrt{4 \times 17} = \sqrt{68}$
(et pas $\sqrt{34}$: on élève le coefficient au carré).

(d) $3\sqrt{14} = \sqrt{9 \times 14} = \sqrt{126}$.

(e) $6\sqrt{7} = \sqrt{36 \times 7} = \sqrt{252}$.

(f) $8\sqrt{3} = \sqrt{64 \times 3} = \sqrt{192}$.

Ex. 17 ★★☆ **Réduire une somme de racines carrées**

(a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$ et $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.
Donc $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

(b) $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ et $4\sqrt{18} = 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.
Donc $B = 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$: le résultat est négatif.

(c) $2\sqrt{12} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ et $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.
Donc $C = 4\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{3} - \sqrt{5}$. Les racines $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont différentes : on ne peut pas réduire davantage.

(d) $\sqrt{11} + \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$ (et pas $\sqrt{22}$), et
$\sqrt{99} = \sqrt{9 \times 11} = 3\sqrt{11}$.
Donc $D = 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 5\sqrt{11}$.

Ex. 18 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) Non : $27 = 9 \times 3$ contient encore le carré 9. Il fallait sortir le plus grand carré parfait : $108 = 36 \times 3$, donc $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

(b) Non : $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Or $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$ alors que $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$. Les deux nombres sont différents.

(c) Non : on n'ajoute pas sous la racine. On simplifie d'abord : $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$ et $\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6}$, donc $\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5\sqrt{6}$. Or $\left(5\sqrt{6}\right)^2 = 150$ alors que $\left(\sqrt{78}\right)^2 = 78$: Sacha a tort.

Ex. 18 **(suite)**

(d) Non : $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ sont des racines différentes, donc la somme ne se réduit pas. Vérification : $4\sqrt{3}+3\sqrt{2}\approx 11{,}17$ alors que $7\sqrt{5}\approx 15{,}65$. La bonne réponse reste $4\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

(e) Non : $-2\sqrt{10}$ est négatif, alors que $\sqrt{40}$ est positif. On ne fait entrer sous la racine qu'un coefficient positif : $-2\sqrt{10}=-\left(2\sqrt{10}\right)=-\sqrt{4\times 10}=-\sqrt{40}$.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur les racines carrées**

(a) Faux. Un seul contre-exemple suffit. Avec $a=36$ et $b=64$: $\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$, alors que $\sqrt{36}+\sqrt{64}=6+8=14$. Comme $10\neq 14$, l'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres positifs.

(b) Vrai. $\sqrt{52}=\sqrt{4\times 13}=2\sqrt{13}$ et $\sqrt{117}=\sqrt{9\times 13}=3\sqrt{13}$, donc $\sqrt{52}+\sqrt{117}=5\sqrt{13}$. De plus, $\sqrt{325}=\sqrt{25\times 13}=5\sqrt{13}$. L'égalité est vraie, et pourtant $52+117=169$, pas 325 : on n'additionne pas sous la racine.

(c) Faux. $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$ et $\sqrt{60}=\sqrt{4\times 15}=2\sqrt{15}$, donc la somme vaut $3\sqrt{15}=\sqrt{9\times 15}=\sqrt{135}$. Or $135\neq 75$: deux nombres positifs de carrés différents sont différents. L'erreur vient de $15+60=75$: on a ajouté sous la racine.

(d) Vrai. Pour $n\geqslant 0$, avec $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ (a et b positifs) : $\sqrt{4n}=\sqrt{4}\times\sqrt{n}=2\sqrt{n}$ et $\sqrt{9n}=\sqrt{9}\times\sqrt{n}=3\sqrt{n}$.
Donc $\sqrt{n}+\sqrt{4n}+\sqrt{9n}=(1+2+3)\sqrt{n}=6\sqrt{n}$.
L'affirmation est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

Ex. 20 ★★★ **Un triangle aux côtés en racines carrées**

(a) On teste les carrés parfaits du plus grand au plus petit. $45=9\times 5$, donc $EF=3\sqrt{5}$ cm. $80=16\times 5$, donc $FG=4\sqrt{5}$ cm (et pas $2\sqrt{20}$, car 20 contient encore le carré 4). $125=25\times 5$, donc $EG=5\sqrt{5}$ cm.

(b) $P=3\sqrt{5}+4\sqrt{5}+5\sqrt{5}=(3+4+5)\sqrt{5}=12\sqrt{5}$. Le périmètre vaut $12\sqrt{5}$ cm.

(c) Le plus grand côté est $[EG]$. $EG^2=\left(\sqrt{125}\right)^2=125$ et $EF^2+FG^2=45+80=125$. Comme $EG^2=EF^2+FG^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

(d) Le triangle est rectangle en F, donc $\mathcal{A}=\frac{EF\times FG}{2}=\frac{3\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}}{2}=\frac{12\times 5}{2}=30$. L'aire vaut 30 cm² : c'est un entier.

Ex. 20 **(suite)**

(e) Non. Noé a mis la somme sous une seule racine, alors qu'en général $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. On a $\sqrt{250}=\sqrt{25\times 10}=5\sqrt{10}\approx 15{,}81$, alors que le vrai périmètre $12\sqrt{5}$ vaut environ 26,83. Noé a tort.

Ex. 21 ★★★ **Des sommes qui cachent des entiers**

(a) $\sqrt{28}=\sqrt{4\times 7}=2\sqrt{7}$; $\sqrt{112}=\sqrt{16\times 7}=4\sqrt{7}$; $\sqrt{175}=\sqrt{25\times 7}=5\sqrt{7}$.
Donc $A=2\sqrt{7}-2\times 4\sqrt{7}+5\sqrt{7}=(2-8+5)\sqrt{7}=-\sqrt{7}$. A est négatif, mais $A^2=\left(-\sqrt{7}\right)^2=7$: A^2 est un entier.

(b) $\sqrt{147}=\sqrt{49\times 3}=7\sqrt{3}$; $\sqrt{243}=\sqrt{81\times 3}=9\sqrt{3}$; $\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=5\sqrt{3}$.
Donc $B=7\sqrt{3}-18\sqrt{3}+15\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. On fait entrer le coefficient positif 4 : $B=\sqrt{16\times 3}=\sqrt{48}$.
Donc $n=48$.

(c) En testant les carrés du plus grand au plus petit : $\sqrt{162}=\sqrt{81\times 2}=9\sqrt{2}$ et $\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$.
L'égalité devient $13\sqrt{2}+\sqrt{n}=15\sqrt{2}$, donc $\sqrt{n}=2\sqrt{2}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{8}$.
Donc $n=8$.

(d) $\sqrt{242}=\sqrt{121\times 2}=11\sqrt{2}$, $\sqrt{363}=\sqrt{121\times 3}=11\sqrt{3}$ et $3\sqrt{27}=3\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.
Donc $C=11\sqrt{2}-\sqrt{2}+11\sqrt{3}-9\sqrt{3}=10\sqrt{2}+2\sqrt{3}$: $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ restent séparées. Lucas a soustrait sous la racine : en réalité $\sqrt{242}-\sqrt{2}=10\sqrt{2}=\sqrt{200}$, et $\sqrt{200}\neq\sqrt{240}$ car $200\neq 240$.

4. *Développer avec des racines carrées*

Ex. 22 ★☆☆ **Distributivité et double distributivité**

(a) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+2\right)=\sqrt{7}\times\sqrt{7}+2\sqrt{7}=7+2\sqrt{7}$.

(b) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{36}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6-3=3$.

(c) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=8+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3=11+6\sqrt{3}$.

(d) $\left(5-\sqrt{2}\right)\left(1+3\sqrt{2}\right)=5+15\sqrt{2}-\sqrt{2}-3\times 2=-1+14\sqrt{2}$.

(e) $2\left(5-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(4+\sqrt{3}\right)=10-2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3=7-6\sqrt{3}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Identités remarquables**

(a) $\left(3+\sqrt{7}\right)^2=9+2\times 3\times\sqrt{7}+7=16+6\sqrt{7}$.

(b) $\left(1-2\sqrt{5}\right)^2=1-2\times 1\times 2\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2=1-4\sqrt{5}+20=21-4\sqrt{5}$.

Ex. 23 (suite)

(c) $(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{6})^2 = 11 - 6 = 5$: les racines disparaissent.

(d) $(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2}) = 4^2 - (3\sqrt{2})^2 = 16 - 18 = -2$.

(e) $-(3-\sqrt{10})^2 = -(9 - 2\times 3\times\sqrt{10} + 10) = -(19 - 6\sqrt{10}) = -19 + 6\sqrt{10}$.

Ex. 24 ★★☆ **Repère l'erreur**

(a) Inès a oublié le double produit $2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$. On a $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}$, et non 8.

(b) Hugo a oublié le double produit $2\times 2\times\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$. On a $(2+\sqrt{6})^2 = 4 + 4\sqrt{6} + 6 = 10 + 4\sqrt{6}$.

(c) Le dernier produit est $(-1)\times 2 = -2$ et non $+2$: erreur de signe. On a $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+2) = 7 + 2\sqrt{7} - \sqrt{7} - 2 = 5 + \sqrt{7}$.

(d) Nora n'a pas élevé 3 au carré. On a $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3) = (\sqrt{2})^2 - 3^2 = 2 - 9 = -7$.

Ex. 25 ★★☆ **Un rectangle et des nombres entiers**

(a) $\mathcal{A} = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$. L'aire vaut 7 cm² : c'est un nombre entier.

(b) $P = 2(3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}) = 2\times 6 = 12$. Le périmètre vaut 12 cm.

(c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B : $AC^2 = (3+\sqrt{2})^2 + (3-\sqrt{2})^2 = (9 + 6\sqrt{2} + 2) + (9 - 6\sqrt{2} + 2) = 22$. Comme $AC \geqslant 0$, $AC = \sqrt{22}$ cm.

(d) La nouvelle longueur est $3 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$. Aire : $(3+2\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 9 - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 9 - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4 = 5 + 3\sqrt{2}$. La nouvelle aire vaut $5 + 3\sqrt{2}$ cm².

Ex. 26 ★★★ **Vérifier qu'un nombre est solution**

(a) $(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2\times 1\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Le double produit $2\sqrt{2}$ ne doit pas être oublié.

(b) On remplace x par $1+\sqrt{2}$: $(1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1$. Entiers : $3 - 2 - 1 = 0$; termes en $\sqrt{2}$: $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$. On obtient 0, donc $1+\sqrt{2}$ est bien solution.

(c) $(1-\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Puis $3 - 2\sqrt{2} - 2(1-\sqrt{2}) - 1 = 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0$. Oui, $1-\sqrt{2}$ est aussi solution.

Ex. 26 (suite)

(d) Avec $x = 1+\sqrt{2}$: $x - 2 = \sqrt{2} - 1$ et $x + 3 = 4 + \sqrt{2}$. Les quatre produits : $(\sqrt{2}-1)(4+\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 2 - 4 - \sqrt{2}$. Entiers : $2 - 4 = -2$; termes en $\sqrt{2}$: $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. On trouve $-2 + 3\sqrt{2}$, et non $2 + 3\sqrt{2}$: Lina a tort.

Ex. 27 ★★★ **Un signe moins devant le carré**

(a) $(2-\sqrt{3})^2 = 2^2 - 2\times 2\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$.

(b) $B = 7 - (7 - 4\sqrt{3})$. Le signe $-$ devant la parenthèse change tous les signes : $B = 7 - 7 + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

(c) $(2+\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$.
Donc $A = 7 + 4\sqrt{3} - (7 - 4\sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

(d) $C = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3}$. Entiers : $7 + 7 = 14$; termes en $\sqrt{3}$: $4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$.
Donc $C = 14$: c'est un entier.

Ex. 28 ★★★ **Triangle rectangle et hauteur**

(a) $AB^2 = 6 + 2\sqrt{6}\times\sqrt{2} + 2 = 8 + 2\sqrt{12}$. Or $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$, donc $AB^2 = 8 + 4\sqrt{3}$. De même $AC^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 4\sqrt{3}$.

(b) D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8 + 4\sqrt{3} + 8 - 4\sqrt{3} = 16$. Comme $BC \geqslant 0$, $BC = \sqrt{16} = 4$ cm : c'est un entier.

(c) Aire $= \frac{AB\times AC}{2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$. L'aire vaut 2 cm² : les racines disparaissent avec $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

(d) L'aire vaut aussi $\frac{BC\times AH}{2}$, donc $\frac{4\times AH}{2} = 2$, soit $2\times AH = 2$.
Donc $AH = 1$ cm.

5. *Supprimer la racine carrée du dénominateur*

Ex. 29 ★☆☆ **Dénominateur $\sqrt{b}$ ou $k\sqrt{b}$**

(a) $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

(b) On multiplie seulement par $\sqrt{7}$: $\frac{7}{2\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{2\times 7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

(c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

(d) $\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$.

(e) $\frac{9}{4\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{4\times 3} = \frac{9\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(f) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Expression conjuguée et produit**

(a) Conjuguée : $4-\sqrt{3}$. $(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3}) = 4^2-3 = 16-3 = 13$.

(b) Conjuguée : $\sqrt{7}+\sqrt{3}$. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3}) = 7-3 = 4$.

(c) Conjuguée : $2\sqrt{5}-1$. $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1) = (2\sqrt{5})^2-1 = 20-1 = 19$.

(d) Conjuguée : $3+\sqrt{11}$ (on change le signe du milieu). $(3-\sqrt{11})(3+\sqrt{11}) = 9-11 = -2$.

(e) Conjuguée : $\sqrt{10}-\sqrt{3}$. $(\sqrt{10}+\sqrt{3})(\sqrt{10}-\sqrt{3}) = 10-3 = 7$.

(f) Conjuguée : $5+2\sqrt{6}$. $(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 25-(2\sqrt{6})^2 = 25-24 = 1$.

Ex. 31 ★★☆ **Dénominateur avec l'expression conjuguée**

(a) $\frac{6}{4+\sqrt{2}} = \frac{6(4-\sqrt{2})}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})} = \frac{6(4-\sqrt{2})}{16-2} = \frac{6(4-\sqrt{2})}{14} = \frac{12-3\sqrt{2}}{7}$.

(b) $\frac{6}{2-\sqrt{7}} = \frac{6(2+\sqrt{7})}{(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})} = \frac{6(2+\sqrt{7})}{4-7} = \frac{6(2+\sqrt{7})}{-3} = -2(2+\sqrt{7}) = -4-2\sqrt{7}$. Le dénominateur est négatif : le signe moins passe au numérateur.

(c) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$. Attention : $(\sqrt{3}+1)^2 \neq 3+1$.

(d) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{10(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} = 2(\sqrt{7}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$.

Ex. 32 ★★☆ **Erreurs à corriger et égalités à prouver**

(a) Erreur : $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 9-2 = 7$, et non $9+2$.
Donc $\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{7} = 3-\sqrt{2}$.

(b) Non : $\sqrt{6}\times\sqrt{6} = 6$ et non 36.
Donc $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Théo a tort.

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$. Les deux écritures sont donc égales.

(d) On multiplie en haut et en bas par l'expression conjuguée $\sqrt{13}+\sqrt{5}$: $\frac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{5})}{(\sqrt{13}-\sqrt{5})(\sqrt{13}+\sqrt{5})} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{5})}{13-5} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{5})}{8} = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$. Les deux écritures sont donc égales.

Ex. 33 ★★★ **Un rectangle à dimensions irrationnelles**

(a) Aire $= L\times\ell$, donc $\ell = \frac{4}{3+\sqrt{5}}$. On multiplie en haut et en bas par l'expression conjuguée $3-\sqrt{5}$: $\ell = \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} = 3-\sqrt{5}$. La largeur vaut $3-\sqrt{5}$ cm.

Ex. 33 (suite)

(b) $(\sqrt{5})^2 = 5$ et $3^2 = 9$. Comme $5<9$ et que ces deux nombres sont positifs, on a $\sqrt{5}<3$.
Donc $3-\sqrt{5}>0$: la largeur est bien positive.

(c) Périmètre $= 2(L+\ell) = 2(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}) = 2\times 6 = 12$. Les termes en $\sqrt{5}$ s'annulent, donc le périmètre est un entier : 12 cm.

(d) D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = (3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2 = (9+6\sqrt{5}+5)+(9-6\sqrt{5}+5) = 28$.
Donc $d = \sqrt{28} = \sqrt{4\times 7} = 2\sqrt{7}$. La diagonale mesure $2\sqrt{7}$ cm.

(e) $\frac{L}{\ell} = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.
Donc $\frac{L}{\ell} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Ex. 34 ★★★ **Ce nombre est-il un entier ?**

(a) $\frac{4}{5-\sqrt{21}} = \frac{4(5+\sqrt{21})}{25-21} = 5+\sqrt{21}$ et $\frac{4}{5+\sqrt{21}} = \frac{4(5-\sqrt{21})}{25-21} = 5-\sqrt{21}$.
Donc $A = 5+\sqrt{21}+5-\sqrt{21} = 10$: A est un entier.

(b) Le conjugué de $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ est $\sqrt{5}+\sqrt{3}$: $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$. De même, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.
Donc $B = \sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Comme $\sqrt{3}$ n'est pas un entier ($1<\sqrt{3}<2$), B n'est pas un entier.

(c) On multiplie par le conjugué $2+\sqrt{5}$: le dénominateur vaut $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = 4-5 = -1$. Numérateur : $(1+\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = 2+\sqrt{5}+2\sqrt{5}+5 = 7+3\sqrt{5}$.
Donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{7+3\sqrt{5}}{-1} = -7-3\sqrt{5}$, et $C = -7-3\sqrt{5}+3\sqrt{5} = -7$: C est un entier.

(d) $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$ et $\frac{10}{\sqrt{6}+1} = \frac{10(\sqrt{6}-1)}{6-1} = 2\sqrt{6}-2$.
Donc $D = 2\sqrt{6}-(2\sqrt{6}-2) = 2\sqrt{6}-2\sqrt{6}+2 = 2$: D est un entier. Attention au signe moins devant la parenthèse.

Ex. 35 ★★★ **Une somme qui se simplifie en cascade**

(a) On reconnaît $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$: le produit vaut $(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2 = (n+1)-n = 1$.

(b) On multiplie en haut et en bas par l'expression conjuguée $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$: $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

(c) D'après la question précédente (avec $1=\sqrt{1}$) : $S = (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})$. Les termes intermédiaires s'annulent deux à deux, donc $S = \sqrt{9}-1 = 3-1 = 2$. S est un entier.

Ex. 35 **(suite)**

(d) De la même façon, $T = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{18}-\sqrt{17}\right) = \sqrt{18} - 1$. Or $\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$, donc $T = 3\sqrt{2} - 1$.

(e) Si on va jusqu'à $\frac{1}{\sqrt{N}+\sqrt{N+1}}$, la somme vaut $\sqrt{N+1} - 1$. Elle vaut 10 lorsque $\sqrt{N+1} = 11$, c'est-à-dire $N + 1 = 11^2 = 121$, soit $N = 120$. Il faut aller jusqu'à $\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$, donc additionner 120 termes.

6. $\sqrt{(a^2)} = |a|$

Ex. 36 ★☆☆ **Valeurs absolues et racines de carrés**

(a) $-9 < 0$ donc $|-9| = -(-9) = 9$.

(b) $\pi \approx 3{,}14$ donc $3 - \pi < 0$: $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$.

(c) $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8 = |-8|$, et non -8.

(d) $\sqrt{(-0{,}6)^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

(e) $\sqrt{11^2} = 11$, donc $-\sqrt{11^2} = -11$: ici le signe moins est à l'extérieur de la racine.

(f) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{3^2} = |-3| + |3| = 3 + 3 = 6$.

Ex. 37 ★☆☆ **Chercher le signe avant d'enlever la racine**

(a) $7 > 4$ donc $\sqrt{7} > 2$ et $2 - \sqrt{7} < 0$.
Donc $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{7} - 2$.

(b) On compare les carrés : $\left(\sqrt{26}\right)^2 = 26 > 25 = 5^2$, donc $\sqrt{26} > 5$ et $\sqrt{26} - 5 > 0$.
Donc $\sqrt{\left(\sqrt{26}-5\right)^2} = \sqrt{26} - 5$.

(c) $3 < 5$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$.
Donc $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

(d) $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$ donc $1{,}4 < \sqrt{2}$ et $1{,}4 - \sqrt{2} < 0$.
Donc $|1{,}4 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1{,}4$.

(e) $\pi \approx 3{,}14 < 3{,}2$ donc $3{,}2 - \pi > 0$.
Donc $\sqrt{(3{,}2-\pi)^2} = 3{,}2 - \pi$.

(f) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9\times 2 = 18 > 16 = 4^2$ donc $3\sqrt{2} > 4$ et $3\sqrt{2} - 4 > 0$.
Donc $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$.

Ex. 38 ★★☆ **Une racine de carré qui dépend de x**

(a) Pour $x = 8$: $A = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$. Pour $x = 1$: $A = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$, et non -4.

(b) Si $x \geqslant 5$, alors $x - 5 \geqslant 0$, donc $A = x - 5$. Si $x < 5$, alors $x - 5 < 0$, donc $A = -(x-5) = 5 - x$.

(c) Pour $x < 5$: $A + x = 5 - x + x = 5$. L'expression vaut toujours 5 : elle ne dépend pas de x.

Ex. 38 **(suite)**

(d) $\left(\sqrt{23}\right)^2 = 23 < 25 = 5^2$, donc $\sqrt{23} < 5$: on est dans le cas $x < 5$.
Donc $A = 5 - \sqrt{23}$.

Ex. 39 ★★☆ **Démonstration guidée : $\sqrt{(a^2)} = |a|$**

(a) Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a \geqslant 0$. Si $a < 0$, alors $|a| = -a > 0$. Dans les deux cas, $|a| \geqslant 0$.

(b) Si $a \geqslant 0$, $|a|^2 = a^2$. Si $a < 0$, $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$. Dans les deux cas, $|a|^2 = a^2$.

(c) $|a|$ est un nombre positif ou nul dont le carré vaut a^2. Par définition de la racine carrée, c'est $\sqrt{a^2}$.
Donc $\sqrt{a^2} = |a|$ pour tout réel a.

(d) $49a^2 = (7a)^2$, donc $\sqrt{49a^2} = |7a|$. Comme $a < 0$, on a $7a < 0$, donc $|7a| = -7a$. Ainsi $\sqrt{49a^2} = -7a$, qui est bien positif. Par exemple, pour $a = -2$: $\sqrt{196} = 14 = -7 \times (-2)$.

Ex. 40 ★★★ **Vrai ou faux sur la racine d'un carré**

(a) Faux. Contre-exemple : pour $x = -7$, on a $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$, et $7 \neq -7$. En fait, $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x.

(b) Faux. Contre-exemple : pour $a = -6$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$ existe, mais $\sqrt{-6}$ n'existe pas, donc $\left(\sqrt{-6}\right)^2$ n'a pas de sens. L'égalité n'est vraie que pour $a \geqslant 0$: les deux membres valent alors a.

(c) Faux. $\pi \approx 3{,}14$, donc $\pi < 4$ et $\pi - 4 < 0$. La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé : $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$.

(d) Vrai. On compare 3 et $\sqrt{10}$, deux nombres positifs, par leurs carrés : $3^2 = 9$ et $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$. Comme $9 < 10$, on a $3 < \sqrt{10}$, donc $3 - \sqrt{10} < 0$. Ainsi $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2} = \left|3-\sqrt{10}\right| = -\left(3-\sqrt{10}\right) = \sqrt{10} - 3$. L'affirmation est vraie.

Ex. 41 ★★★ **Une somme de deux racines de carrés**

(a) Pour $x = 0$: $B = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{4^2} = \sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$. Pour $x = -6$: $B = \sqrt{(-8)^2} + \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{64} + \sqrt{4} = 8 + 2 = 10$.

(b) Non. Pour $x = 0$, sa formule donne $2 \times 0 + 2 = 2$, alors que $B = 6$ (question précédente). Son erreur : elle a écrit $\sqrt{A^2} = A$ sans vérifier le signe de A. Pour $x = 0$, $x - 2 = -2$ est négatif.

(c) Si $x \leqslant 2$, alors $x - 2 \leqslant 0$, donc $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2 - x$. Si $x \geqslant -4$, alors $x + 4 \geqslant 0$, donc $\sqrt{(x+4)^2} = x + 4$. Ainsi $B = (2-x) + (x+4) = 6$. Pour $-4 \leqslant x \leqslant 2$, B vaut toujours 6.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Si $x \geqslant 2$, alors $x-2 \geqslant 0$ et $x+4 \geqslant 6 > 0$.
Donc $B = (x-2)+(x+4) = 2x+2$. La formule de Lina n'est juste que pour $x \geqslant 2$.

(e) Pour $x \geqslant 2$, on a $B = 2x+2$. On résout $2x+2 = 20$: $2x = 18$, donc $x = 9$, et on a bien $9 \geqslant 2$. Vérification : $\sqrt{(9-2)^2} + \sqrt{(9+4)^2} = \sqrt{49} + \sqrt{169} = 7 + 13 = 20$.
Le réel cherché est $x = 9$.

Ex. 42 ★★★ **Un entier caché sous les racines**

(a) $4^2 = 16$ et $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$. Comme $16 < 17$ et que les deux nombres sont positifs, $4 < \sqrt{17}$.
Donc $4 - \sqrt{17} < 0$.

(b) $5^2 = 25$ et $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$. Comme $25 > 17$, on a $5 > \sqrt{17}$.
Donc $5 - \sqrt{17} > 0$.

(c) Oui. Comme $4 - \sqrt{17} < 0$, $\sqrt{\left(4-\sqrt{17}\right)^2} = \sqrt{17} - 4$.
Comme $5 - \sqrt{17} > 0$, $\sqrt{\left(5-\sqrt{17}\right)^2} = 5 - \sqrt{17}$.
Donc $C = \sqrt{17} - 4 + 5 - \sqrt{17} = 1$. C est l'entier 1.

(d) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$. Comme $12 > 9 = 3^2$, $2\sqrt{3} > 3$, donc $2\sqrt{3} - 3 > 0$. Comme $12 < 16 = 4^2$, $2\sqrt{3} < 4$, donc $2\sqrt{3} - 4 < 0$. Ainsi $D = \left(2\sqrt{3} - 3\right) - \left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} - 7$.

(e) Non. $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \times 3 = 48$ et $36 < 48 < 49$, donc $6 < 4\sqrt{3} < 7$. On soustrait 7 : $-1 < 4\sqrt{3} - 7 < 0$. D est strictement compris entre deux entiers consécutifs, donc ce n'est pas un entier. Hugo a tort.

7. *Comparer et encadrer*

Ex. 43 ★☆☆ **Comparer sans calculatrice**

(a) Les deux nombres sont positifs. $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \times 3 = 48$ et $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9 \times 5 = 45$. Comme $48 > 45$, on a $4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

(b) Les deux nombres sont positifs. $9^2 = 81$ et $\left(\sqrt{80}\right)^2 = 80$. Comme $81 > 80$, on a $9 > \sqrt{80}$.

(c) Ces deux nombres sont négatifs : on ne compare pas directement leurs carrés. On compare leurs opposés, qui sont positifs : $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 > 11 = \left(\sqrt{11}\right)^2$, donc $2\sqrt{3} > \sqrt{11}$. Quand on change de signe, l'ordre s'inverse : $-2\sqrt{3} < -\sqrt{11}$.

(d) $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ car $0{,}3 \geqslant 0$ et $0{,}3^2 = 0{,}09$. Comme $0{,}3 > 0{,}09$, on a $\sqrt{0{,}09} > 0{,}09$. Pour un nombre entre 0 et 1, la racine carrée est plus grande que le nombre.

Ex. 43 **(suite)**

(e) Les deux nombres sont positifs. $\left(3\sqrt{6}\right)^2 = 9 \times 6 = 54$ et $\left(2\sqrt{13}\right)^2 = 4 \times 13 = 52$. Comme $54 > 52$, on a $3\sqrt{6} > 2\sqrt{13}$.

(f) Les trois nombres sont positifs. Leurs carrés valent $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$, $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $\left(\sqrt{19}\right)^2 = 19$. Comme $18 < 19 < 20$, on a $3\sqrt{2} < \sqrt{19} < 2\sqrt{5}$.

Ex. 44 ★★☆ **Entre deux entiers consécutifs**

(a) $49 < 55 < 64$, c'est-à-dire $7^2 < 55 < 8^2$.
Donc $7 < \sqrt{55} < 8$.

(b) $121 < 130 < 144$, c'est-à-dire $11^2 < 130 < 12^2$.
Donc $11 < \sqrt{130} < 12$.

(c) $196 < 200 < 225$, c'est-à-dire $14^2 < 200 < 15^2$.
Donc $14 < \sqrt{200} < 15$. En prenant les opposés, l'ordre s'inverse : $-15 < -\sqrt{200} < -14$.

(d) $\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 40$ et $36 < 40 < 49$. Comme $2\sqrt{10}$ est positif, on a $6 < 2\sqrt{10} < 7$.

(e) $16 < 20 < 25$, donc $4 < \sqrt{20} < 5$. Le seul point entre 4 et 5 est B : $\sqrt{20}$ est l'abscisse de B.

Ex. 45 ★★☆ **Le côté d'une terrasse carrée**

(a) L'aire vaut $c^2 = 47$ et c est positif : c est donc le nombre positif dont le carré vaut 47, c'est-à-dire $c = \sqrt{47}$.
Comme $36 < 47 < 49$, on a $6 < c < 7$. Le côté mesure entre 6 m et 7 m.

(b) $6{,}6^2 = 43{,}56$; $6{,}7^2 = 44{,}89$; $6{,}8^2 = 46{,}24$; $6{,}9^2 = 47{,}61$.

(c) $6{,}8^2 = 46{,}24 \leqslant 47$ et $6{,}9^2 = 47{,}61 > 47$. Ces nombres sont positifs, donc $6{,}8 < \sqrt{47} < 6{,}9$.

(d) $6{,}85^2 = 46{,}9225 < 47$, donc $\sqrt{47} > 6{,}85$. Le nombre $\sqrt{47}$ est donc plus proche de 6,9 que de 6,8 : sa valeur arrondie au dixième est 6,9. Zoé a tort, car la valeur arrondie n'est pas toujours la borne de gauche de l'encadrement.

Ex. 46 ★★☆ **Le programme de Nina**

(a) k prend les valeurs 1, 2, 3, 4 puis 5. La boucle s'arrête quand $6^2 = 36$ n'est plus strictement inférieur à 30. Le programme affiche `(5, 6)`. C'est juste, car $25 \leqslant 30 < 36$, donc $5 \leqslant \sqrt{30} < 6$.

(b) k monte jusqu'à 5, puis $6^2 = 36 < 36$ est faux : le programme affiche `(5, 6)`. Or $6^2 = 36 \leqslant 36$, donc $\sqrt{36} = 6$: on attendait `(6, 7)`. Le signe « < » arrête la boucle trop tôt quand a est un carré parfait.

Ex. 46 **(suite)**

(c) On écrit `while (k + 1)**2 <= a:`. Pour $a = 36$, la boucle va jusqu'à $k = 6$, car $7^2 = 49 > 36$. Le programme affiche `(6, 7)` : on a bien $6 \leqslant \sqrt{36} < 7$, et la borne 6 est exacte.

```
def encadre_entier(a):
    k = 0
    while (k + 1)**2 <= a:
        k = k + 1
    return k, k + 1
```

(d)

```
def encadre_dixieme(a):
    k = 0
    while (k + 1)**2 <= a * 100:
        k = k + 1
    return k / 10, (k + 1) / 10
```

On a $36^2 = 1296 \leqslant 1300$ et $37^2 = 1369 > 1300$, donc $k = 36$. Le programme affiche `(3.6, 3.7)` : $3{,}6 \leqslant \sqrt{13} < 3{,}7$. Avec des entiers, on évite les erreurs d'arrondi des flottants (0.1 n'est pas stocké exactement par la machine).

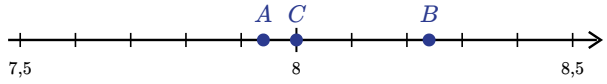
Ex. 47 ★★★ **Ranger, encadrer, placer**

(a) a, b et c sont positifs, donc ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. $a^2 = 9 \times 7 = 63$, $b^2 = 4 \times 17 = 68$ et $c^2 = 64$. Comme $63 < 64 < 68$, on a $3\sqrt{7} < 8 < 2\sqrt{17}$.

(b) Non. Les nombres $-3\sqrt{7}$ et $-2\sqrt{17}$ sont négatifs : on ne peut pas les comparer par leurs carrés. D'après la question précédente, $3\sqrt{7} < 2\sqrt{17}$. En multipliant par -1, l'ordre s'inverse : $-3\sqrt{7} > -2\sqrt{17}$. Léo s'est trompé.

(c) $7{,}9^2 = 62{,}41 \leqslant 63$ et $8^2 = 64 > 63$, donc $7{,}9 < 3\sqrt{7} < 8$. $8{,}2^2 = 67{,}24 \leqslant 68$ et $8{,}3^2 = 68{,}89 > 68$, donc $8{,}2 < 2\sqrt{17} < 8{,}3$.

(d) A est entre 7,9 et 8 ; C est en 8 ; B est entre 8,2 et 8,3. L'ordre sur la droite est bien A, C, B.



Ex. 48 ★★★ **Le balayage de Sacha**

(a) Ici $p = 100$ et $a \times p^2 = 20\,000$. On a $141^2 = 19\,881 \leqslant 20\,000$ et $142^2 = 20\,164 > 20\,000$. La boucle s'arrête donc avec $k = 141$, et le programme affiche `(1.41, 1.42)`. Vérification : $1{,}41^2 = 1{,}9881 \leqslant 2$ et $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$, donc $1{,}41 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}42$.

Ex. 48 **(suite)**

(b) Ici $p = 10$ et $a \times p^2 = 4\,900$. On a $70^2 = 4\,900 \leqslant 4\,900$: grâce à `<=`, la boucle continue jusqu'à $k = 70$. Elle s'arrête ensuite, car $71^2 = 5\,041 > 4\,900$. Le programme affiche `(7.0, 7.1)`. Comme $7 \geqslant 0$ et $7^2 = 49$, on a $\sqrt{49} = 7$. La borne de gauche est exacte, car 49 est un carré parfait.

(c) p^2 est strictement positif. Diviser les deux membres d'une inégalité par $p^2 > 0$ ne change pas son sens. Donc $(k+1)^2 \leqslant a \times p^2$ équivaut à $\frac{(k+1)^2}{p^2} \leqslant a$, c'est-à-dire $\left(\frac{k+1}{p}\right)^2 \leqslant a$. Les deux conditions disent la même chose, mais la première ne calcule qu'avec des entiers.

(d) Pour $k+1$ allant de 1 à 10, on a $\left(\frac{k+1}{10}\right)^2 \leqslant 1 < 1{,}21$: k monte jusqu'à 10. Pour $k + 1 = 11$, Python trouve `1.2100000000000002`, plus grand que `1.21`, et la boucle s'arrête avec $k = 10$. Le programme afficherait `(1.0, 1.1)`. Or $1{,}1^2 = 1{,}21$, donc $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$: on attendait `(1.1, 1.2)`. L'erreur d'arrondi des flottants fausse le résultat. C'est pourquoi Sacha calcule avec des entiers.

Ex. 49 ★★★ **Une racine plus grande que le nombre ?**

(a) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ car $0{,}7 \geqslant 0$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$. On a $0{,}7 > 0{,}49$. $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ car $1{,}2 \geqslant 0$ et $1{,}2^2 = 1{,}44$. On a $1{,}2 < 1{,}44$. Une racine carrée n'est donc pas toujours plus petite que le nombre sous la racine.

(b) $a^2 - a = a(a-1)$. Comme $a > 0$ et $a - 1 < 0$, le produit est négatif : $a^2 - a < 0$.
Donc $a^2 < a$.

(c) $\sqrt{a}$ et a sont positifs, donc ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et, d'après la question précédente, $a > a^2$.
Donc $\left(\sqrt{a}\right)^2 > a^2$, et ainsi $\sqrt{a} > a$.

(d) Le côté mesure $\sqrt{0{,}8}$ m, car c'est le nombre positif dont le carré vaut l'aire 0,8. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, la question précédente donne $\sqrt{0{,}8} > 0{,}8$: oui, le côté mesure plus de 0,8 m. De plus $0{,}8^2 = 0{,}64 \leqslant 0{,}8$ et $0{,}9^2 = 0{,}81 > 0{,}8$, donc $0{,}8 < \sqrt{0{,}8} < 0{,}9$. Le côté mesure entre 0,8 m et 0,9 m.