Cinquième / Parallélogrammes, rectangle, losange, carré — corrigé

benprof
particulier.fr

1. *Le parallélogramme : définition et propriétés*

Ex. 1 ★☆☆ **Un parallélogramme debout : le vocabulaire**

(a) Le côté opposé à [RS] est [TU] (et pas [ST], qui a le sommet S en commun avec [RS] : il lui est consécutif). Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur, donc TU = 3,6 cm.

(b) Le sommet opposé à S est U.

(c) R et T ne sont pas voisins dans le nom RSTU : [RT] est une diagonale, pas un côté.

(d) Les côtés consécutifs à [ST] sont [RS] (sommet commun S) et [TU]
(sommet commun T).

(e) Non. Les côtés de RSTU sont [RS], [ST], [TU] et [UR]. Dans RSUT, [SU] et [TR] seraient des côtés, alors que ce sont les diagonales de RSTU : RSUT est un autre quadrilatère, croisé.

Ex. 2 ★☆☆ **Angles opposés, angles consécutifs**

(a) $\widehat{FGH}$ et $\widehat{HEF}$ sont des angles opposés du parallélogramme EFGH, donc ils ont la même mesure : $\widehat{FGH} = 64°$.

(b) $\widehat{EFG}$ et $\widehat{HEF}$ sont des angles consécutifs, donc supplémentaires : $\widehat{EFG} = 180° - 64° = 116°$
(ils ne sont pas égaux).

(c) $\widehat{GHE}$ et $\widehat{HEF}$ sont des angles consécutifs : leur somme vaut 180°, pas 90°.
Donc $\widehat{GHE} = 180° - 64° = 116°$.

(d) $\widehat{BCD}$ est consécutif à $\widehat{ABC}$: $\widehat{BCD} = 180° - 128° = 52°$. $\widehat{CDA}$ est opposé à $\widehat{ABC}$: $\widehat{CDA} = 128°$.

Ex. 3 ★★☆ **Le centre d'un parallélogramme penché**

(a) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de [IK] : OI = OK = 10,6 ÷ 2 = 5,3 cm.

(b) O est aussi le milieu de [JL] : JL = 2 × 3,3 = 6,6 cm.

Ex. 3 (suite)

(c) L est une extrémité de [JL], pas de [IK] : OL = OJ = 3,3 cm. O est bien le milieu des deux diagonales, mais en général elles n'ont pas la même longueur (ici IK = 10,6 cm et JL = 6,6 cm).
Donc OL ≠ OI.

(d) O est le centre de symétrie de IJKL. Le symétrique de J est L, celui de I est K : le symétrique de [IJ] est donc [KL].

Ex. 4 ★★☆ **Le massif de fleurs de Malik**

(a) [PQ] est le côté opposé à [MN]. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur, donc PQ = 6,4 m.

(b) Le périmètre vaut $2 \times (MN + NP)$: MN et NP comptent chacun deux fois.
Donc MN + NP = 20,6 ÷ 2 = 10,3 m, puis NP = 10,3 − 6,4 = 3,9 m.

(c) $\widehat{MNP}$ est consécutif à $\widehat{QMN}$: $\widehat{MNP} = 180° - 72° = 108°$. $\widehat{NPQ}$ est opposé à $\widehat{QMN}$: $\widehat{NPQ} = 72°$.

(d) [QM] est le côté opposé à [NP], donc QM = NP = 3,9 m. Bordure = périmètre − QM = 20,6 − 3,9 = 16,7 m (ou MN + NP + PQ = 6,4 + 3,9 + 6,4 = 16,7 m).

Ex. 5 ★★★ **Les quatre erreurs de Lina**

(a) Non. [MN] et [LM] ont le sommet M en commun : ce sont des côtés consécutifs. Le côté opposé à [MN] est [KL]. Dans le parallélogramme KLMN, les côtés opposés ont la même longueur, donc MN = KL = 7,5 cm.

(b) Non. K et L sont les deux extrémités du côté [KL] : $\widehat{NKL}$ et $\widehat{KLM}$ sont des angles consécutifs, pas opposés. Dans le parallélogramme KLMN, les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{KLM} = 180° - 63° = 117°$.

(c) Non. Dans le nom KLMN, K et M ne sont pas voisins : ce sont des sommets opposés. Le segment [KM] joint deux sommets opposés, c'est donc une diagonale de KLMN, pas un côté.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Non. 11,7 cm est la somme de deux côtés consécutifs seulement, c'est-à-dire la moitié du tour. Les côtés opposés ont la même longueur, donc le périmètre vaut $2 \times (7{,}5 + 4{,}2) = 23{,}4$ cm.

(e) Les sommets M et K sont opposés. Dans le parallélogramme KLMN, les angles opposés ont la même mesure : $\widehat{LMN} = \widehat{NKL} = 63°$. De même, N et L sont opposés : $\widehat{MNK} = \widehat{KLM} = 117°$. Contrôle : $63° + 117° + 63° + 117° = 360°$.

Ex. 6 ★★★ **Les barres de renfort du portail de Yanis**

(a) FH $= 4{,}3 - 2{,}7 = 1{,}6$ m. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de [FH] : OF $= 1{,}6 \div 2 = 0{,}8$ m.

(b) On sait que EFGH est un parallélogramme et que ses diagonales [EG] et [FH] se coupent en O. Or si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
Donc O est le milieu de [EG] : OE $= 2{,}7 \div 2 = 1{,}35$ m.

(c) Non. O est le milieu de chaque diagonale, donc OE $=$ OG $= 1{,}35$ m et OF $=$ OH $= 0{,}8$ m. En général, les diagonales d'un parallélogramme n'ont pas la même longueur : ici EG $= 2{,}7$ m et FH $= 1{,}6$ m.
Donc OF $\neq$ OE.

Ex. 7 ★★★ **Le pantographe de Sacha**

(a) Dans le parallélogramme PQRS, les côtés opposés ont la même longueur : RS $=$ PQ $= 24$ cm et SP $=$ QR $= 15$ cm. Longueur totale : $2 \times (24 + 15) = 78$ cm.

(b) Dans le parallélogramme PQRS, les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{SPQ} = 180° - 104° = 76°$. Les angles opposés ont la même mesure : $\widehat{QRS} = \widehat{SPQ} = 76°$ et $\widehat{RSP} = \widehat{PQR} = 104°$.

(c) $\widehat{SPQ}$ et $\widehat{PQR}$ sont consécutifs, donc leur somme vaut $180°$. Le grand angle compte pour 2 parts et le petit pour 1 part : 3 parts font $180°$.
Donc $\widehat{PQR} = 180° \div 3 = 60°$ et $\widehat{SPQ} = 2 \times 60° = 120°$.
Contrôle : $120° + 60° = 180°$.

(d) $\widehat{SPQ}$ et $\widehat{PQR}$ sont consécutifs, donc supplémentaires. S'ils sont égaux, chacun mesure $180° \div 2 = 90°$. Les angles opposés sont égaux, donc les quatre angles sont droits. Or un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle.
Donc Sacha doit donner à $\widehat{SPQ}$ la mesure $90°$, et PQRS est alors un rectangle de 24 cm sur 15 cm.

2. *Reconnaître un parallélogramme*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : quelle propriété caractéristique ?**

(a) Oui. On sait que $(EF) \parallel (HG)$ et $(EH) \parallel (FG)$. Or si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme (définition).
Donc EFGH est un parallélogramme.

(b) Oui. On sait que les côtés opposés [BC] et [DE] ont la même longueur (3,6 cm), et [CD] et [EB] aussi (2,4 cm). Or si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Donc BCDE est un parallélogramme.

(c) Non. O est bien le milieu de [KM], mais pas celui de [LN] : OL $= 1{,}9$ cm et ON $= 2{,}2$ cm. LN $= 1{,}9 + 2{,}2 = 4{,}1$ cm, donc le milieu de [LN] est à $4{,}1 \div 2 = 2{,}05$ cm de L, et pas en O. Les diagonales se coupent, mais pas en leur milieu. Or dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.
Donc KLMN n'est pas un parallélogramme.

(d) Non. Il n'y a qu'une seule paire de côtés parallèles. De plus, les côtés opposés [IJ] et [LK] n'ont pas la même longueur ($4{,}2 \neq 3{,}3$). Or dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.
Donc IJKL n'est pas un parallélogramme : c'est un trapèze.

(e) Non. Les côtés égaux [WX] et [WZ] sont consécutifs (ils ont le sommet W en commun). Les côtés opposés [WX] et [YZ] ne sont pas égaux ($2{,}5 \neq 3{,}9$). Or dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.
Donc WXYZ n'est pas un parallélogramme : c'est un cerf-volant.

(f) Oui. On sait que les diagonales [AC] et [BD] de ABCD ont le même milieu K. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc ABCD est un parallélogramme.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. Un trapèze EFGH avec seulement $(EF) \parallel (HG)$ n'est pas un parallélogramme. Il faut que les côtés opposés soient parallèles deux à deux.

Ex. 9 **(suite)**

(b) Vrai. On sait que les côtés opposés [IJ] et [LK] sont parallèles et de même longueur (5,4 cm). Or si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc IJKL est un parallélogramme.

(c) Faux. La propriété « si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme » demande que ce soient les MÊMES côtés opposés. Ici, [PQ] et [RS] sont égaux, mais ce sont [QR] et [PS] qui sont parallèles. Contre-exemple : un trapèze de bases [QR] et [PS] dont les côtés non parallèles [PQ] et [RS] mesurent tous les deux 3,8 cm.

(d) Faux. EFGH est croisé : les côtés [EF] et [GH] se coupent. Les propriétés caractéristiques ne valent que pour un quadrilatère non croisé. Malgré ses côtés opposés égaux deux à deux, EFGH n'est pas un parallélogramme.

Ex. 10 ★★☆ **Corriger deux copies**

(a) Nora part de « VWXY est un parallélogramme », c'est-à-dire de ce qu'il faut démontrer. Elle utilise la propriété à l'envers : sa phrase conclut sur le milieu, alors qu'on attend la conclusion « VWXY est un parallélogramme ».

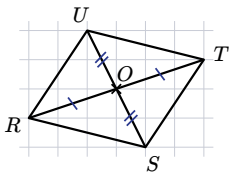
(b) Non. On ne se fie jamais à l'œil, encore moins sur une figure à main levée. Aucun parallélisme n'est donné dans l'énoncé ni codé sur la figure.

(c) On sait que $OV = OX$ et que O est sur [VX] : O est le milieu de [VX]. De même, $OW = OY$: O est le milieu de [WY]. Les diagonales [VX] et [WY] ont donc le même milieu O. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc VWXY est un parallélogramme.

(d) O est le milieu des deux diagonales : $VX = 2 \times 2{,}6 = 5{,}2$ cm et $WY = 2 \times 3{,}7 = 7{,}4$ cm.

Ex. 11 ★★☆ **Le plan de jardin d'Inès**

(a) Pour aller de R à O, on avance de 3 carreaux vers la droite et de 1 vers le haut. On refait le même déplacement à partir de O pour placer T. Pour aller de S à O, on recule de 1 carreau vers la gauche et on monte de 2. On refait ce déplacement à partir de O pour placer U.



(b) T est le symétrique de R par rapport à O, donc O est le milieu de [RT]. U est le symétrique de S par rapport à O, donc O est aussi le milieu de [SU].

(c) On sait que les diagonales [RT] et [SU] du quadrilatère RSTU ont le même milieu O. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc RSTU est un parallélogramme.

(d) O est le milieu de [RT], donc $OT = 13{,}4 \div 2 = 6{,}7$ m.

Ex. 12 ★★★ **Les barres du portail**

(a) On sait que I est sur [KM] et sur [LN], avec $IK = IM = 1{,}85$ m et $IL = IN = 1{,}85$ m : I est le milieu de [KM] et le milieu de [LN]. Les diagonales [KM] et [LN] du quadrilatère KLMN ont donc le même milieu I. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc KLMN est un parallélogramme.

(b) $KM = 1{,}85 + 1{,}85 = 3{,}7$ m et $LN = 1{,}85 + 1{,}85 = 3{,}7$ m. On sait que KLMN est un parallélogramme (question précédente) et que ses diagonales ont la même longueur : $KM = LN = 3{,}7$ m. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc KLMN est un rectangle.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Non. Les barres ont bien la même longueur : KM = 1,85 + 1,85 = 3,7 m et LN = 1,6 + 2,1 = 3,7 m. Mais IL ≠ IN (1,6 m ≠ 2,1 m) : I n'est pas le milieu de [LN]. Les diagonales se coupent, mais pas en leur milieu. Or si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.
Donc ce cadre n'est pas un parallélogramme. Il n'est donc pas non plus un rectangle, puisqu'un rectangle est un parallélogramme. Des diagonales de même longueur ne suffisent pas.

(d) Non. Les côtés égaux [AB] et [AD] sont consécutifs (ils ont le sommet A en commun), de même que [BC] et [CD]. Les côtés opposés [AB] et [CD] n'ont pas la même longueur : 0,35 m ≠ 0,62 m. Or si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.
Donc la plaque ABCD n'est pas un parallélogramme : c'est un cerf-volant.

Ex. 13 ★★★ **L'étagère penchée de Hugo**

(a) On sait que, dans le quadrilatère non croisé EFGH, les côtés opposés [EF] et [HG] sont parallèles et de même longueur : EF = HG = 0,64 m. Or si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc EFGH est un parallélogramme.

(b) EFGH est un parallélogramme, donc ses côtés opposés ont la même longueur : FG = EH. On a : 2 × 0,64 = 1,28 ; 2,3 − 1,28 = 1,02 ; FG = 1,02 ÷ 2 = 0,51 m.

(c) Dans le parallélogramme EFGH, les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{EFG} = 180° - 74° = 106°$. Les angles opposés sont égaux : $\widehat{FGH} = \widehat{FEH} = 74°$.

(d) Non. Les côtés opposés [EF] et [HG] sont parallèles, mais ils n'ont pas la même longueur : 0,64 m ≠ 0,58 m. Or si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.
Donc cette étagère n'est pas un parallélogramme : c'est un trapèze. Il faut à la fois le parallélisme et l'égalité des longueurs.

(e) Non. Un parallélogramme n'est pas toujours un rectangle. On sait que $\widehat{FEH} = 74°$: l'angle en E n'est pas droit. Or si un quadrilatère est un rectangle, alors ses quatre angles sont droits.
Donc EFGH n'est pas un rectangle.

Ex. 14 ★★★ **Le drapeau de Clara**

(a) K est le symétrique de I par rapport à O, donc O est le milieu de [IK] : OK = OI = 2,15 cm. L est le symétrique de J par rapport à O, donc O est le milieu de [JL] : OL = OJ = 1,35 cm.

(b) On sait que les diagonales [IK] et [JL] du quadrilatère IJKL ont le même milieu O. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc IJKL est un parallélogramme.

(c) On sait que IJKL est un parallélogramme et que ses diagonales sont perpendiculaires : $(IK) \perp (JL)$, car elles sont portées par les deux droites perpendiculaires en O. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
Donc IJKL est un losange.

(d) IK = 2 × 2,15 = 4,3 cm et JL = 2 × 1,35 = 2,7 cm.

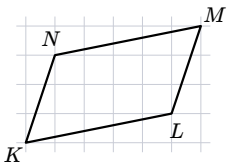
(e) La figure est à main levée : on ne se fie jamais à l'œil, seuls les données et le codage comptent. On sait que IK = 4,3 cm et JL = 2,7 cm : les diagonales n'ont pas la même longueur. Or si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales ont la même longueur.
Donc IJKL n'est pas un carré : c'est un losange qui n'est pas un carré.

3. *Construire un parallélogramme*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : le quatrième sommet sur quadrillage**

(a) De L à M : 7 − 6 = 1 carreau vers la droite et 5 − 2 = 3 carreaux vers le haut.

(b) À partir de K : 1 carreau vers la droite, puis 3 vers le haut. On obtient N.



(c) De K à L, on se déplace de 6 − 1 = 5 carreaux vers la droite et de 2 − 1 = 1 carreau vers le haut. En partant de M, Léo va donc encore vers la droite et s'éloigne de N. [MN] est bien opposé à [KL], mais on le parcourt dans l'autre sens : de M à N, il faut faire le déplacement de L vers K, soit 5 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas
(7 − 5 = 2 et 5 − 1 = 4 : on retrouve N).

Ex. 15 **(suite)**

(d) On sait que (KN) // (LM) et KN = LM, car le déplacement est le même. Or si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc KLMN est un parallélogramme.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : les bons arcs de compas**

(a) [RU] est opposé à [ST], donc l'arc de centre R a pour rayon ST = 3,8 cm
(et non RS).

(b) [TU] est opposé à [RS], donc l'arc de centre T a pour rayon RS = 6,2 cm.

(c) Je choisis le point situé de l'autre côté de (RT) par rapport à S. L'autre point est du même côté que S : avec lui, le quadrilatère serait croisé et ne serait pas un parallélogramme.

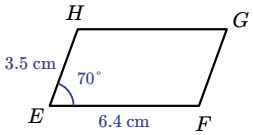
(d) Un quadrilatère se nomme dans l'ordre du tour : R, S, T, puis U. Il faut écrire RSTU. Avec « RSUT », [SU] et [TR] seraient des côtés, alors que ce sont les diagonales.

(e) Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Ici, RU = ST = 3,8 cm et TU = RS = 6,2 cm.

Ex. 17 ★★☆ **La maquette du portail**

(a) Dans le parallélogramme EFGH, les côtés opposés ont la même longueur : HG = EF = 6,4 cm et FG = EH = 3,5 cm. Sur la figure à main levée, les sommets E, F, G, H se suivent dans le sens du tour.

(b) ① Je trace [EF] de 6,4 cm. ② Au rapporteur, je trace l'angle $\widehat{HEF}$ de 70° de sommet E. ③ Je place H sur ce côté, à 3,5 cm de E. ④ Je trace l'arc de centre F et de rayon 3,5 cm (= EH) et l'arc de centre H et de rayon 6,4 cm (= EF) : G est leur point d'intersection situé de l'autre côté de (FH) par rapport à E. Je trace EFGH en laissant les arcs apparents.



Ex. 17 **(suite)**

(c) Dans le parallélogramme EFGH, les angles opposés sont égaux : $\widehat{FGH} = \widehat{HEF} = 70°$. Les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{EFG} = 180° - 70° = 110°$. Enfin, $\widehat{GHE} = \widehat{EFG} = 110°$, car ce sont des angles opposés.

(d) Périmètre : $2 \times (6{,}4 + 3{,}5) = 2 \times 9{,}9 = 19{,}8$ cm. Il lui faut 19,8 cm de baguette.

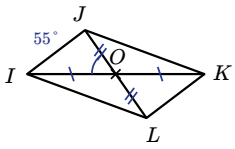
Ex. 18 ★★☆ **Le parterre du jardin, par les diagonales**

(a) O est le milieu de [IK] : $OI = 8{,}6 \div 2 = 4{,}3$ cm. À l'étape ③, J et L sont chacun à la moitié de JL : $5{,}2 \div 2 = 2{,}6$ cm de O.

(b) Tom obtient $JL = 5{,}2 + 5{,}2 = 10{,}4$ cm, soit le double. Il faut placer J et L à $5{,}2 \div 2 = 2{,}6$ cm de O, de part et d'autre.

(c) On sait que O est le milieu de [IK] et de [JL] (OJ = OL = 2,6 cm). Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc IJKL est un parallélogramme.

(d) Je trace [IK] de 8,6 cm et je place O à 4,3 cm de I. Au rapporteur, je trace la droite d telle que $\widehat{IOJ} = 55°$. Au compas, je place J et L sur d à 2,6 cm de O, de part et d'autre. Je trace IJKL.



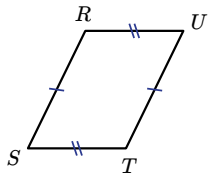
Ex. 19 ★★★ **Le support d'étagère de Noé, au compas**

(a) Sur la figure à main levée, les sommets se suivent dans l'ordre R, S, T, U. Le côté opposé à [RU] est [ST]. Le côté opposé à [TU] est [RS].

(b) Noé a pris des côtés consécutifs au lieu des côtés opposés. Il faut RU = ST, donc un arc de centre R de rayon 4,2 cm. Il faut aussi TU = RS, donc un arc de centre T de rayon 5,6 cm.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Je choisis le point situé de l'autre côté de la droite (RT) par rapport à S. L'autre point est du même côté que S : avec lui, le quadrilatère RSTU est croisé, ce n'est donc pas un parallélogramme.



(d) On sait que RSTU est non croisé, que RS = TU = 5,6 cm et que ST = RU = 4,2 cm. Or si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc RSTU est un parallélogramme.

(e) Dans le parallélogramme RSTU, les angles opposés sont égaux : $\widehat{RUT} = \widehat{RST} = 64°$. Les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{SRU} = 180° - 64° = 116°$.

Ex. 20 ★★★ **Les trois jetons du carrelage**

(a) Je compte le déplacement de F vers G : 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut. Je refais ce déplacement à partir de E : H_1 est 2 carreaux à gauche et 3 carreaux au-dessus de E.

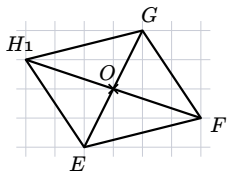
(b) De E vers F, on va de 4 carreaux vers la droite et de 1 vers le haut. H_2 est donc 4 carreaux à droite et 1 au-dessus de G. Les côtés opposés sont alors [EF] et [GH_2] : Adam a construit le parallélogramme EFH_2G. $EFGH_2$ est croisé, car [FG] et [H_2E] se coupent : les sommets ne sont pas dans l'ordre.

(c) Je compte le déplacement de G vers E (2 carreaux vers la gauche, 4 vers le bas) et je le refais à partir de F : H_3 est 2 carreaux à gauche et 4 au-dessous de F. Le parallélogramme est EH_3FG (ses diagonales sont [EF] et [GH_3]).

(d) On sait que le déplacement de E vers H_1 est le même que celui de F vers G, donc (EH_1) // (FG) et EH_1 = FG, et $EFGH_1$ est non croisé. Or si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc $EFGH_1$ est un parallélogramme.

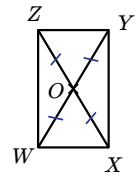
Ex. 20 **(suite)**

(e) Nina a raison. On sait que $EFGH_1$ est un parallélogramme. Or si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Donc O, milieu de [EG], est aussi le milieu de [FH_1], et H_1 est le symétrique de F par rapport à O.
Vérification : de F à O, 3 carreaux à gauche et 1 vers le haut ; de O à H_1, le même déplacement.



Ex. 21 ★★★ **Le cadre de fenêtre de Yanis**

(a) ① Je trace [WY] de 7,6 cm et je place son milieu O : OW = OY = 7,6 ÷ 2 = 3,8 cm. ② Au rapporteur, je trace une droite d passant par O avec $\widehat{WOX} = 62°$. ③ Sur d, je place X et Z de part et d'autre de O, à 3,8 cm de O (pas à 7,6 cm). ④ Je trace WXYZ dans l'ordre.



(b) On sait que O est le milieu de [WY] et le milieu de [XZ]. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc WXYZ est un parallélogramme.

(c) On sait que WXYZ est un parallélogramme et que WY = XZ = 7,6 cm. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc WXYZ est un rectangle.

(d) Hugo confond les propriétés : ce sont les diagonales du losange qui sont perpendiculaires. Un rectangle a des diagonales de même longueur, pas forcément perpendiculaires. Ici WXYZ est un rectangle, mais ce n'est pas un losange.

(e) Il doit donner $\widehat{WOX} = 90°$. On sait que WXYZ est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur (7,6 cm) et sont perpendiculaires. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur et perpendiculaires, alors c'est un carré.
Donc WXYZ est un carré.

4. *Rappels de 6e : rectangle, losange, carré*

Ex. 22 ★☆☆ **Lire le codage, pas l'œil**

(a) On sait que KLMN a quatre angles droits codés. Or un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle. Donc KLMN est un rectangle. Comme KL = 5,2 cm et LM = 4,9 cm, ses côtés ne sont pas tous égaux : ce n'est pas un carré, même s'il en a l'air.

(b) Les diagonales sont [EG] et [FH]. On sait que les quatre côtés de EFGH portent le même codage. Or un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur est un losange.
Donc EFGH est un losange
(aucun angle droit n'est codé : rien ne dit que c'est un carré).

(c) On sait que IJKL a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur codés. Or un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur est un carré.
Donc IJKL est un carré : c'est à la fois un rectangle (quatre angles droits) et un losange
(quatre côtés égaux).

(d) Non. La figure est à main levée et rien n'est codé : aucun angle droit, aucun côté égal. On peut seulement dire que PQRS est un quadrilatère. On ne prouve pas une nature « à l'œil ».

Ex. 23 ★☆☆ **Périmètres, dans les deux sens**

(a) VWXY est un rectangle : $P = 2 \times (13 + 8) = 2 \times 21 = 42$ cm. Attention : 13×8 ne donne pas le périmètre.

(b) Deux longueurs font $2 \times 10{,}25 = 20{,}5$ cm, donc la largeur mesure $(32 - 20{,}5) \div 2 = 11{,}5 \div 2 = 5{,}75$ cm.

(c) Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur : $P = 4 \times 3{,}7 = 14{,}8$ cm.

(d) Le carré a quatre côtés de même longueur : $c = 15 \div 4 = 3{,}75$ cm.

(e) Même unité d'abord : 1,2 m = 120 cm. $P = 2 \times (120 + 45) = 2 \times 165 = 330$ cm.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux : familles et axes de symétrie**

(a) Vrai. Un carré a quatre angles droits, donc c'est un rectangle ; il a quatre côtés de même longueur, donc c'est aussi un losange.

Ex. 24 (suite)

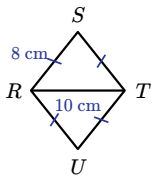
(b) Faux. Contre-exemple : ABCD a quatre angles droits, c'est un rectangle ; mais AB = 11 cm et BC = 6 cm, ses côtés ne sont pas tous égaux : ce n'est pas un carré.

(c) Non. Si on plie ABCD le long de (AC), B ne vient pas sur D : les deux moitiés ne se superposent pas. Un rectangle qui n'est pas un carré a 2 axes de symétrie : les médiatrices de [AB] et de [BC], et pas ses diagonales.

(d) Faux. En le pliant le long d'une diagonale ou d'une médiatrice d'un côté, les deux moitiés ne se superposent pas : un tel parallélogramme a 0 axe de symétrie
(il a seulement un centre de symétrie).

Ex. 25 ★★☆ **Le losange de signalisation**

(a) 1. Je trace [RT] de 10 cm. 2. Pointe du compas en R, écartement 8 cm : je trace un arc de chaque côté de [RT]. 3. Même chose depuis T. 4. Les arcs se coupent en S et en U ; je trace [RS], [ST], [TU] et [UR], tous de 8 cm.



(b) Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur : $P = 4 \times 8 = 32$ cm
(et pas 4×10 : 10 cm, c'est la diagonale).

(c) RSTU est un losange qui n'est pas un carré : il a 2 axes de symétrie, les droites qui portent ses diagonales, (RT) et
(SU).

(d) Côté réel : $8 \times 10 = 80$ cm. Tour : $4 \times 80 = 320$ cm, soit $320 \div 100 = 3{,}2$ m de ruban.

Ex. 26 ★★★ **Le grillage du potager**

(a) Non. La longueur de grillage, c'est le tour du potager, donc son périmètre. Multiplier la longueur par la largeur ne donne pas un tour. Pour un rectangle : $P = 2 \times (L + \ell) = 2 \times (13{,}5 + 7{,}2) = 2 \times 20{,}7 = 41{,}4$ m. Il faut 41,4 m de grillage, pas 97,2 m.

(b) Longueur à couvrir : $41{,}4 - 0{,}9 = 40{,}5$ m. Avec 4 rouleaux, on a $4 \times 10 = 40$ m : ce n'est pas assez, car $40 < 40{,}5$. Avec 5 rouleaux, on a $5 \times 10 = 50$ m. Malik doit acheter 5 rouleaux.

(c) Les deux longueurs font $2 \times 15{,}3 = 30{,}6$ m. Il reste $41{,}4 - 30{,}6 = 10{,}8$ m pour les deux largeurs, donc la largeur mesure $10{,}8 \div 2 = 5{,}4$ m. Vérification : $2 \times (15{,}3 + 5{,}4) = 2 \times 20{,}7 = 41{,}4$ m.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Pour un carré de côté c : $P = 4 \times c$, donc $c = 41{,}4 \div 4 = 10{,}35$ m. Le potager carré a pour côté 10,35 m.

Ex. 27 ★★★ **Ben corrige trois copies**

(a) Nora a tort. MNPQ a quatre angles droits codés, donc c'est un rectangle. Dans un rectangle, les côtés opposés ont la même longueur : MN = QP et NP = MQ. Or le codage donne MN = NP, donc MN = NP = PQ = QM : les quatre côtés sont égaux. MNPQ a quatre angles droits et quatre côtés égaux, donc c'est un carré. La figure n'est pas à l'échelle : c'est le codage qui compte.

(b) Lucas a tort. $21 - 2 \times 6{,}3 = 8{,}4$ cm, c'est la somme des deux largeurs [EF] et [GH], pas une seule largeur. Il faut encore diviser par 2 : $EF = (21 - 2 \times 6{,}3) \div 2 = 8{,}4 \div 2 = 4{,}2$ cm. Vérification : $2 \times (6{,}3 + 4{,}2) = 21$ cm.

(c) Yanis a tort. Les quatre côtés de KLMN portent le même codage, donc KLMN a quatre côtés de même longueur : c'est un losange. La définition du losange ne demande pas d'angle droit. Un losange non carré a 2 axes de symétrie : les droites qui portent ses diagonales, (KM) et
(LN).

(d) D'après la première question, MNPQ est un carré. Il a donc 4 axes de symétrie ($2 + 2 = 4$) : les médiatrices de [MN] et de [NP] (il est rectangle) et ses diagonales (MP) et (NQ)
(il est losange).

Ex. 28 ★★★ **Le cadre de fenêtre**

(a) Soit c le côté d'une vitre. AB = CD = 2 côtés de vitre et AD = BC = 1 côté de vitre : le tour compte $2 + 1 + 2 + 1 = 6$ côtés de vitre.
Donc $c = 5{,}1 \div 6 = 0{,}85$ m, soit $0{,}85 \times 100 = 85$ cm.

(b) Paul a tort. $AB = 2 \times 0{,}85 = 1{,}7$ m et AD = 0,85 m : les côtés consécutifs [AB] et [AD] n'ont pas la même longueur. ABCD a quatre angles droits, donc c'est un rectangle, mais ce n'est pas un carré. Vérification : $2 \times (1{,}7 + 0{,}85) = 5{,}1$ m.

(c) Cadre extérieur : 5,1 m. Montant [EF] : un côté de vitre, 0,85 m. Total : $5{,}1 + 0{,}85 = 5{,}95$ m de baguette.

(d) Jade a tort. Une vitre est un carré de côté 0,85 m : son tour mesure $4 \times 0{,}85 = 3{,}4$ m. La moitié du tour de ABCD vaut $5{,}1 \div 2 = 2{,}55$ m. Or 3,4 m n'est pas égal à 2,55 m : le montant [EF] compte dans le tour de chaque vitre, mais pas dans le tour de ABCD.

Ex. 28 **(suite)**

(e) Oui. AE = EB = 0,85 m, donc E est le milieu de [AB]. Comme AEFD est un carré, l'angle $\widehat{AEF}$ est droit, donc (EF) est perpendiculaire à (AB). (EF) est la médiatrice de [AB]. Or les médiatrices des côtés d'un rectangle sont ses axes de symétrie, donc (EF) est un axe de symétrie de ABCD.

5. *Côtés, angles et diagonales du rectangle, du losange et du carré*

Ex. 29 ★☆☆ **Les demi-diagonales d'un rectangle debout**

(a) On sait que RSTU est un rectangle. Or les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.
Donc SU = RT = 10,4 cm.

(b) Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de [RT] : $OR = 10{,}4 \div 2 = 5{,}2$ cm.

(c) O est aussi le milieu de [SU] : $OS = 10{,}4 \div 2 = 5{,}2$ cm.

(d) On sait que OR = 5,2 cm et OS = 5,2 cm, donc OR = OS. Le triangle ORS a deux côtés de même longueur : il est isocèle en O.
(Les quatre sommets du rectangle sont à 5,2 cm de O.)

(e) Non. On sait que RSTU est un rectangle, donc un parallélogramme. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. Si $\widehat{ROS}$ mesurait 90°, on aurait donc RS = ST. Mais RS = 4 cm et ST = 9,6 cm.
Donc les diagonales ne sont pas perpendiculaires : Léa a tort. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, mais elles ne sont perpendiculaires que si c'est un carré.

Ex. 30 ★☆☆ **Diagonales et angles du losange**

(a) Les diagonales du losange se coupent en leur milieu I : $IK = 12 \div 2 = 6$ cm et $IN = 7{,}2 \div 2 = 3{,}6$ cm.

(b) On sait que KLMN est un losange. Or les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
Donc $\widehat{KIL} = 90°$.

(c) Les triangles KIL, LIM, MIN et NIK sont rectangles en I.

(d) Un losange est un parallélogramme, et ses angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{LMN} = 180° - 118° = 62°$.

(e) Dans le parallélogramme KLMN, les angles opposés sont égaux : $\widehat{MNK} = \widehat{KLM} = 118°$.

Ex. 30 **(suite)**

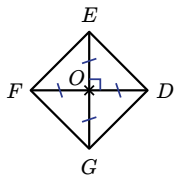
(f) L'angle droit est au centre I ($\widehat{KIL} = 90°$), pas au sommet L. Un losange n'a pas d'angle droit en général : ici $\widehat{KLM} = 118°$.

Ex. 31 ★★☆ **Tableau des propriétés et codage du carré**

(a) Parallélogramme : oui / pas toujours / pas toujours. Rectangle : oui / oui / pas toujours. Losange : oui / pas toujours / oui. Carré : oui / oui / oui.

(b) Un carré est un rectangle, donc ses diagonales ont la même longueur : EG = DF = 13 cm. Elles se coupent en leur milieu O : OE = 13 ÷ 2 = 6,5 cm.

(c) On code le même trait sur les quatre demi-diagonales (OD = OE = OF = OG = 6,5 cm) et un angle droit en O, car un carré est aussi un losange : $(DF) \perp (EG)$.



(d) On sait que OD = OE = 6,5 cm et que $\widehat{DOE} = 90°$ (diagonales perpendiculaires).
Donc le triangle DOE est rectangle et isocèle en O.

Ex. 32 ★★☆ **Le portail de Nina**

(a) Le demi-périmètre vaut AB + AD = 10,2 ÷ 2 = 5,1 m, donc AD = 5,1 − 3,6 = 1,5 m.

(b) On sait que ABCD est un rectangle. Or les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.
Donc BD = AC = 3,9 m.

(c) Les diagonales du rectangle se coupent en leur milieu O et ont la même longueur, donc OA = OB = OC = OD = 3,9 ÷ 2 = 1,95 m.

(d) Cadre + deux barres : 10,2 + 2 × 3,9 = 18 m.

Ex. 33 ★★★ **Le panneau de signalisation de Malik**

(a) On sait que I est sur [PR] et que IP = IR = 3,2 dm, donc I est le milieu de [PR]. De même, IQ = IS = 2,4 dm, donc I est le milieu de [QS]. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc PQRS est un parallélogramme.

(b) On sait que PQRS est un parallélogramme et que $(PR) \perp (QS)$. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
Donc PQRS est un losange.

Ex. 33 **(suite)**

(c) PR = 2 × 3,2 = 6,4 dm et QS = 2 × 2,4 = 4,8 dm. On sait que PR ≠ QS. Or si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales ont la même longueur.
Donc PQRS n'est pas un carré : Hugo a tort. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, mais pas forcément de même longueur.

(d) PQRS est un parallélogramme, donc ses angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{PQR} = 180° - 74° = 106°$. Ses angles opposés sont égaux : $\widehat{QRS} = \widehat{SPQ} = 74°$. Les angles mesurent 74°, 106°, 74° et 106° : aucun n'est droit. L'angle droit est au centre I, pas aux sommets.

(e) PQRS est un losange, donc ses quatre côtés ont la même longueur : PQ = 16 ÷ 4 = 4 dm.

Ex. 34 ★★★ **Le cadre de fenêtre de Sofiane**

(a) On sait que M est sur [EG] et que ME = MG, donc M est le milieu de [EG]. On sait aussi que M est le milieu de [FH]. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc EFGH est un parallélogramme.

(b) EG = 2 × ME = 2 × 3,25 = 6,5 dm. On sait que EFGH est un parallélogramme et que EG = FH = 6,5 dm. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc EFGH est un rectangle.

(c) Dans le rectangle EFGH, les côtés opposés ont la même longueur, donc EF + FG vaut la moitié du périmètre : 17 ÷ 2 = 8,5 dm.
Donc FG = 8,5 − 6 = 2,5 dm.

(d) M est le milieu de [FH], donc MF = 6,5 ÷ 2 = 3,25 dm. Or ME = 3,25 dm, donc ME = MF : le triangle EMF est isocèle en M. Les quatre sommets du rectangle sont à 3,25 dm de M.

(e) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, mais elles ne sont pas perpendiculaires en général. Supposons que $(EG) \perp (FH)$. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. On aurait donc EF = FG. Mais EF = 6 dm et FG = 2,5 dm.
Donc les diagonales ne sont pas perpendiculaires : Inès se trompe.

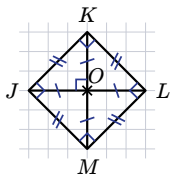
Ex. 35 ★★★ **Le motif de carrelage de Zoé**

(a) Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de [JL] et de [KM]. J est 3 carreaux à gauche de O, donc L est 3 carreaux à droite de O. K est 3 carreaux au-dessus de O, donc M est 3 carreaux en dessous de O.

(b) JL = 6 cm et KM = 6 cm. On sait que O est le milieu de [JL] et de [KM]. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc JKLM est un parallélogramme. On sait que JL = KM = 6 cm. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc JKLM est un rectangle. On sait que (JL) suit une ligne horizontale du quadrillage et (KM) une ligne verticale, donc $(JL) \perp (KM)$. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
Donc JKLM est un losange. Il est à la fois rectangle et losange, donc c'est un carré.

(c) Sur le quadrillage, (JL) est horizontale et (KQ) verticale : $(JL) \perp (KQ)$, et elles se coupent en O. Mais OK = 3 cm et OQ = 2 cm, donc O n'est pas le milieu de [KQ]. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Donc JKLQ n'est pas un parallélogramme, donc pas un losange : c'est un cerf-volant. Tom a tort.

(d) On met le même trait sur [OJ], [OK], [OL] et [OM], un angle droit en O, un autre codage commun sur les quatre côtés et un angle droit à chaque sommet.



(e) On sait que O est le milieu de [JL] et de [PQ]. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc JPLQ est un parallélogramme. On sait que $(JL) \perp (PQ)$. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
Donc JPLQ est un losange. Mais JL = 6 cm et PQ = $2 \times 2 = 4$ cm : ses diagonales n'ont pas la même longueur. Ce n'est donc pas un rectangle, et JPLQ n'est pas un carré.

6. *Démontrer la nature d'un quadrilatère*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Vrai : la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°, donc le quatrième angle mesure $360° - 3 \times 90° = 90°$. Le quadrilatère a quatre angles droits : c'est un rectangle.

(b) Faux : un cerf-volant a ses diagonales perpendiculaires, mais elles n'ont pas le même milieu, et ce n'est pas un losange. Il faut d'abord que les diagonales aient le même milieu (parallélogramme).

(c) Faux : un trapèze peut avoir des diagonales de même longueur sans être un rectangle. Il faut aussi que les diagonales aient le même milieu.

(d) Vrai : c'est une propriété caractéristique du losange.

(e) Faux : $90 + 90 + 89 + 91 = 360$. Les mesures au rapporteur sont approchées, donc elles ne prouvent ni que RSTU est un rectangle ni qu'il n'en est pas un. On ne mesure pas la nature d'un quadrilatère : on la démontre avec les données.

(f) Vrai : un rectangle est un parallélogramme. Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. Le quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange : c'est un carré.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : lire le codage**

(a) On sait que OM = OP et ON = OQ : les diagonales [MP] et [NQ] ont le même milieu O. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc MNPQ est un parallélogramme. On sait aussi que $(MP) \perp (NQ)$. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
Donc MNPQ est un losange.

(b) Non. On sait que $(DF) \perp (EG)$ et que O est le milieu de [EG]. Mais rien ne dit que O est le milieu de [DF] : les diagonales n'ont pas forcément le même milieu.
DEFG n'est donc pas forcément un parallélogramme : c'est un cerf-volant, et on ne peut pas conclure que c'est un losange.

Ex. 37 **(suite)**

(c) On sait que HI = JK et IJ = KH. Or si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Donc HIJK est un parallélogramme. On sait aussi que $\widehat{KHI} = 90°$. Or si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
Donc HIJK est un rectangle. Ses côtés consécutifs ne sont pas codés égaux : on ne peut pas dire que c'est un carré.

(d) On sait que ST = TU = UV = VS. Or si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange. On sait aussi que $\widehat{VST} = 90°$. Or si un losange a un angle droit, alors c'est un carré.
Donc STUV est un carré.

Ex. 38 ★★☆ **Le cadre de fenêtre de Malo**

(a) Première erreur : Malo cite la propriété à l'envers. « Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur » part d'un rectangle déjà connu. Il fallait citer : « Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle », après avoir prouvé que EFGH est un parallélogramme. Deuxième erreur : « on voit que » ne prouve rien, surtout sur une figure à main levée.

(b) On sait que OE = OG et OF = OH : O est le milieu de [EG] et de [FH]. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc EFGH est un parallélogramme.

(c) $EG = 3{,}1 + 3{,}1 = 6{,}2$ cm et $FH = 3{,}1 + 3{,}1 = 6{,}2$ cm.
On sait que EFGH est un parallélogramme et que EG = FH. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc EFGH est un rectangle.

(d) Non. Rien ne dit que les diagonales sont perpendiculaires ni que deux côtés consécutifs ont la même longueur. Le dessin à main levée ne prouve rien : EFGH est un rectangle, et on ne peut pas affirmer que c'est un carré.

Ex. 39 ★★☆ **Le carreau d'Inès**

(a) On sait que (KL) // (NM) et que (KN) // (LM). Or si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Donc KLMN est un parallélogramme.

Ex. 39 **(suite)**

(b) On sait que KLMN est un parallélogramme et que KL = LM, et [KL] et [LM] sont des côtés consécutifs. Or si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
Donc KLMN est un losange.

(c) On sait que KLMN est un losange et que $\widehat{KLM} = 90°$. Or si un losange a un angle droit, alors c'est un carré.
Donc KLMN est un carré : Inès a oublié de conclure.

(d) KLMN est un carré, donc ses quatre côtés ont la même longueur : $KL = 34 \div 4 = 8{,}5$ cm.

Ex. 40 ★★★ **Le portail de Yanis**

(a) On sait que $(RS) \parallel (UT)$ et que RS = UT = 4,8 cm. Or si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
Donc RSTU est un parallélogramme.

(b) On sait que RSTU est un parallélogramme (question précédente) et que $\widehat{URS} = 90°$. Or si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
Donc RSTU est un rectangle.

(c) Dans le rectangle RSTU, les côtés opposés ont la même longueur : TU = RS = 4,8 cm et UR = ST. RS + TU = $2 \times 4{,}8 = 9{,}6$ cm, il reste donc $13{,}6 - 9{,}6 = 4$ cm pour ST + UR.
Donc $ST = 4 \div 2 = 2$ cm. Vérification : $2 \times (4{,}8 + 2) = 13{,}6$ cm.

(d) Non. $PY = 5{,}2 - 2 = 3{,}2$ cm, donc PW ≠ PY : P n'est pas le milieu de [WY]. Les diagonales de WXYZ n'ont pas le même milieu. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Donc WXYZ n'est pas un parallélogramme. Comme un rectangle est un parallélogramme, WXYZ n'est pas un rectangle : des diagonales de même longueur ne suffisent pas si elles n'ont pas le même milieu.

Ex. 41 ★★★ **Le cerf-volant de Lina**

(a) Elle se trompe. OI = 1,5 cm et OK = 4 cm, donc O n'est pas le milieu de [IK] : les diagonales n'ont pas le même milieu. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Donc IJKL n'est pas un parallélogramme, et donc pas un losange (un losange est un parallélogramme). C'est un cerf-volant : des diagonales perpendiculaires ne suffisent pas.

Ex. 41 **(suite)**

(b) $IK = OI + OK = 1{,}5 + 4 = 5{,}5$ cm. O est maintenant le milieu de [IK], donc $OI = 5{,}5 \div 2 = 2{,}75$ cm.

(c) Étape 1 : on sait que O est le milieu de [IK] et de [JL] (OJ = OL = 2,5 cm). Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc IJKL est un parallélogramme. Étape 2 : on sait que IJKL est un parallélogramme et que $(IK) \perp (JL)$. Or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
Donc IJKL est un losange.

(d) $JL = 2 \times 2{,}5 = 5$ cm, donc IK = JL = 5 cm. Comme à la question précédente, IJKL est un parallélogramme et un losange (diagonales de même milieu, puis perpendiculaires). On sait aussi que les diagonales du parallélogramme IJKL ont la même longueur. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc IJKL est un rectangle. Or si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange, alors c'est un carré.
Donc IJKL est un carré : Sacha a oublié de conclure « carré ».

Ex. 42 ★★★ **Le plan du potager de Noé**

(a) La somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°, donc $\widehat{GHE} = 360° - 3 \times 90° = 90°$. On sait que EFGH a trois angles droits, en E, F et G. Or si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
Donc EFGH est un rectangle : Noé pouvait conclure sans le codage en H.

(b) On sait que EFGH est un rectangle. Or les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu.
Donc FH = EG = 6,5 m, et O est le milieu de [EG] : $EO = 6{,}5 \div 2 = 3{,}25$ m.

(c) Jade cite la propriété à l'envers : « un losange a ses quatre côtés de même longueur » part d'un losange déjà connu, alors que c'est justement ce qu'elle veut prouver. Bonne démonstration : on sait que PQ = QR = RS = SP. Or si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
Donc PQRS est un losange.

Ex. 42 **(suite)**

(d) Une mesure au rapporteur est approchée : elle ne prouve pas que l'angle vaut exactement 90°. La nature se démontre à partir des données. Il suffirait de savoir que PR = QS. En effet, PQRS est un losange, donc un parallélogramme, et ses diagonales auraient la même longueur. Or si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
Donc PQRS serait un rectangle et un losange : c'est un carré.

7. *Calculer des longueurs et des angles*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : des angles en un clin d'œil**

(a) Dans le parallélogramme EFGH, les angles opposés ont la même mesure : $\widehat{FGH} = \widehat{FEH} = 64°$.

(b) Un losange est un parallélogramme, donc ses angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{QRS} = 180° - 142° = 38°$.
(Attention : il ne mesure pas 142°, seuls les angles opposés sont égaux.)

(c) Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires : $\widehat{TOU} = 90°$.

(d) La somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° : $87° + 104° + 95° = 286°$, et $360° - 286° = 74°$. Le quatrième angle mesure 74°.

(e) Dans le parallélogramme ABCD, les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{ABC} = 180° - 73{,}5° = 106{,}5°$.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : des longueurs à déduire**

(a) Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, donc $AC = 2 \times OA = 2 \times 4{,}15 = 8{,}3$ cm.

(b) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, donc $BD = AC = 8{,}3$ cm.

(c) Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur : $23 \div 4 = 5{,}75$. Le côté mesure 5,75 cm.

(d) La moitié du périmètre vaut $25{,}8 \div 2 = 12{,}9$ cm, donc la largeur vaut $12{,}9 - 7{,}4 = 5{,}5$ cm.

(e) Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur : $GH = 5{,}4$ cm et $HE = 3{,}65$ cm. Le périmètre vaut $2 \times (5{,}4 + 3{,}65) = 18{,}1$ cm.

Ex. 45 ★★☆ **Le triangle caché du cadre de fenêtre**

(a) Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, donc $OK = 10{,}6 \div 2 = 5{,}3$ cm. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, donc $LN = KM = 10{,}6$ cm, et comme O est le milieu de [LN], $ON = 10{,}6 \div 2 = 5{,}3$ cm.

(b) On sait que $OK = 5{,}3$ cm et $ON = 5{,}3$ cm. Or un triangle qui a deux côtés de même longueur est isocèle. Donc le triangle OKN est isocèle en O.

(c) O est le milieu des deux diagonales, qui ont la même longueur : $OL = OM = 5{,}3$ cm. Les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur : $LM = KN = 4{,}7$ cm. Le périmètre du triangle OLM vaut $5{,}3 + 5{,}3 + 4{,}7 = 15{,}3$ cm.

Ex. 46 ★★☆ **Le panneau de Noé**

(a) Non. Un losange n'a pas quatre angles égaux en général : seuls ses angles opposés ont la même mesure. Or $\widehat{IJK}$ et $\widehat{JIL}$ sont des angles consécutifs, pas opposés.

(b) Un losange est un parallélogramme. Ses angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{IJK} = 180° - 68° = 112°$. Ses angles opposés ont la même mesure : $\widehat{JKL} = \widehat{JIL} = 68°$ et $\widehat{KLI} = \widehat{IJK} = 112°$.

(c) $68° + 112° + 68° + 112° = 360°$: la somme vaut bien $360°$.

(d) Chaque angle mesurerait $360° \div 4 = 90°$. Un losange qui a quatre angles droits est un carré.

Ex. 47 ★★★ **Le pantographe de Yanis**

(a) Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur. Le périmètre vaut donc 4 fois le côté : $RS = 23{,}4 \div 4 = 5{,}85$ cm.

(b) Le losange RSTU est un parallélogramme, donc ses angles opposés ont la même mesure : $\widehat{STU} = \widehat{URS} = 72°$. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{RST} = 180° - 72° = 108°$. Attention : un losange n'a pas quatre angles égaux.

(c) Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur, donc $ST = RS = 5{,}85$ cm. Le périmètre du triangle RST vaut $RS + ST + RT = 5{,}85 + 5{,}85 + 9{,}46 = 21{,}16$ cm.

Ex. 47 (suite)

(d) Le losange est un parallélogramme : ses diagonales se coupent en leur milieu. O est donc le milieu de [RT], et $RO = 9{,}46 \div 2 = 4{,}73$ cm. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc $\widehat{ROS} = 90°$.

Ex. 48 ★★★ **Les allées du potager de Maëlle**

(a) Dans un rectangle, le périmètre vaut $2 \times (L + \ell)$, donc $EF + FG = 27{,}4 \div 2 = 13{,}7$ m. Ainsi $FG = 13{,}7 - 8{,}5 = 5{,}2$ m.

(b) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, donc $FH = EG = 9{,}96$ m. Longueur totale des allées : $2 \times 9{,}96 = 19{,}92$ m.

(c) Le rectangle est un parallélogramme : ses diagonales se coupent en leur milieu. K est donc le milieu de [EG], et $KE = 9{,}96 \div 2 = 4{,}98$ m. K est aussi le milieu de [FH] et $FH = 9{,}96$ m, donc $KF = 4{,}98$ m.

(d) On a $KE = KF = 4{,}98$ m (question précédente) et $EF = 8{,}5$ m. Longueur de la bordure : $4{,}98 + 4{,}98 + 8{,}5 = 18{,}46$ m.

(e) Non. K est le milieu de [EG] et de [FH], donc $KG = KF = 4{,}98$ m. Mais $FG = 5{,}2$ m alors que $EF = 8{,}5$ m. Bordure de FKG : $4{,}98 + 4{,}98 + 5{,}2 = 15{,}16$ m, et $15{,}16$ m $\neq 18{,}46$ m. Maëlle a tort.

Ex. 49 ★★★ **L'étagère murale de Sacha**

(a) Les sommets L et M se suivent dans le tour de KLMN : les angles $\widehat{KLM}$ et $\widehat{LMN}$ sont consécutifs, pas opposés. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{LMN} = 180° - 117° = 63°$.

(b) Dans un parallélogramme, les angles opposés ont la même mesure. $\widehat{MNK}$ est opposé à $\widehat{KLM}$, donc $\widehat{MNK} = 117°$. $\widehat{NKL}$ est opposé à $\widehat{LMN}$, donc $\widehat{NKL} = 63°$.

(c) Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur, donc $LM = KN = 3{,}8$ cm et $MN = KL = 6{,}3$ cm. Périmètre : $2 \times (6{,}3 + 3{,}8) = 20{,}2$ cm.

(d) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. On a donc $KP = 8{,}7 \div 2 = 4{,}35$ cm et $PN = 5{,}7 \div 2 = 2{,}85$ cm. KN mesure 3,8 cm. Les trois côtés du triangle KPN ont des longueurs différentes, donc il n'est pas isocèle : les diagonales d'un parallélogramme quelconque n'ont pas la même longueur.