Troisième / Pythagore, Thalès, trigonométrie — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 4e : Pythagore et sa réciproque, rédaction*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : repérer l'hypoténuse**

(a) L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, donc opposé au sommet L : c'est $[KM]$, le plus long côté du triangle.

(b) Le triangle KLM est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore : $KM^2 = KL^2 + LM^2$.

(c) Le triangle DEF est rectangle en F, donc son hypoténuse est $[DE]$. D'après le théorème de Pythagore : $DE^2 = DF^2 + EF^2$.

(d) Le triangle GHI est rectangle en G, donc son hypoténuse est $[HI]$: $HI^2 = GH^2 + GI^2$. On cherche un côté de l'angle droit, donc on soustrait : $GI^2 = HI^2 - GH^2$
(et pas $GH^2 - HI^2$).

(e) $0{,}3^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$ (et pas $0{,}9$) ; $1{,}5^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : calculer une longueur**

(a) Le triangle ABC est rectangle en A, donc son hypoténuse est $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$. Attention, 29 est BC^2 et pas BC : $BC = \sqrt{29}$ cm (valeur exacte), soit $BC \approx 5{,}4$ cm.

(b) Le triangle NOP est rectangle en O, donc son hypoténuse est $[NP]$. D'après le théorème de Pythagore : $NP^2 = NO^2 + OP^2$, donc $OP^2 = NP^2 - NO^2 = 2{,}5^2 - 0{,}7^2 = 6{,}25 - 0{,}49 = 5{,}76$.
Donc $OP = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ cm.

(c) On met les longueurs dans la même unité : $XY = 45$ mm $= 4{,}5$ cm. Le triangle XYZ est rectangle en Y, donc son hypoténuse est $[XZ]$. D'après le théorème de Pythagore : $XZ^2 = XY^2 + YZ^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$.
Donc $XZ = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm.

(d) La diagonale coupe le carré en deux triangles rectangles. Leur hypoténuse est la diagonale et les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm. D'après le théorème de Pythagore : $d^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$, donc $d = \sqrt{18}$ cm, soit $d \approx 4{,}2$ cm.

Ex. 3 ★★☆ **Rectangle ou pas ? Rédiger la réciproque**

(a) Le plus long côté est $[IJ]$ (il est écrit en premier, pas en dernier). D'une part, $IJ^2 = 2{,}9^2 = 8{,}41$. D'autre part, $JK^2 + IK^2 = 2^2 + 2{,}1^2 = 4 + 4{,}41 = 8{,}41$. Les deux résultats sont égaux : $IJ^2 = JK^2 + IK^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en K, le sommet opposé au plus long côté.

(b) Le plus long côté est $[LN]$. D'une part, $LN^2 = 9{,}4^2 = 88{,}36$. D'autre part, $LM^2 + MN^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$. Comme $88{,}36 \neq 89$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle LMN n'est pas rectangle.

(c) Non. Théo a arrondi trop tôt : $9{,}5^2 = 90{,}25$ exactement. D'autre part, $3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$. Comme $90{,}25 \neq 90$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ce triangle n'est pas rectangle, même s'il en a l'air.

Ex. 4 ★★☆ **La voile de Maëlle, à Lorient**

(a) Le triangle HMB est rectangle en M, donc son hypoténuse est $[HB]$. D'après le théorème de Pythagore : $HB^2 = MH^2 + MB^2 = 5{,}6^2 + 3{,}3^2 = 31{,}36 + 10{,}89 = 42{,}25$.
Donc $HB = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$ m.

(b) Pythagore porte sur les carrés des longueurs, pas sur les longueurs elles-mêmes : $HB^2 = MH^2 + MB^2$ ne donne pas $HB = MH + MB$. Yanis trouve 8,9 m alors que $HB = 6{,}5$ m. Dans un triangle, un côté est toujours plus court que la somme des deux autres.

(c) Le triangle RST est rectangle en S, donc son hypoténuse est $[RT]$, le côté opposé à l'angle droit. On cherche un côté de l'angle droit, donc on soustrait. D'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2$, donc $RS^2 = RT^2 - ST^2 = 7{,}3^2 - 2{,}7^2 = 53{,}29 - 7{,}29 = 46$.
Donc $RS = \sqrt{46}$ m (valeur exacte), soit $RS \approx 6{,}8$ m.

Ex. 5 ★★★ **Le jardin de Nadia, à Angers**

(a) Le triangle ABD est rectangle en A et son hypoténuse est $[BD]$. D'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3{,}6^2 + 7{,}7^2 = 12{,}96 + 59{,}29 = 72{,}25$.
Donc $BD = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$ m.

Ex. 5 **(suite)**

(b) Léo compare des longueurs écrites dans des unités différentes. On convertit : $DC = 1\,320$ cm $= 13{,}2$ m. Comme $13{,}2 < 15{,}7$ et $BD = 8{,}5$ m $< 15{,}7$ m, le plus long côté du triangle BCD est $[BC]$, et pas $[DC]$.

(c) On travaille en mètres : $DC = 13{,}2$ m. Le plus long côté est $[BC]$. D'une part, $BC^2 = 15{,}7^2 = 246{,}49$. D'autre part, $BD^2 + DC^2 = 8{,}5^2 + 13{,}2^2 = 72{,}25 + 174{,}24 = 246{,}49$. Les deux résultats sont égaux : $BC^2 = BD^2 + DC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BCD est rectangle en D, le sommet opposé au plus long côté.

(d) Aire de ABD, rectangle en A : $\frac{AB \times AD}{2} = \frac{3{,}6 \times 7{,}7}{2} = 13{,}86$ m². Aire de BCD, rectangle en D : $\frac{BD \times DC}{2} = \frac{8{,}5 \times 13{,}2}{2} = 56{,}1$ m². Aire du jardin : $13{,}86 + 56{,}1 = 69{,}96$ m².

Ex. 6 ★★★ **Les supports d'étagère de Sacha, à Besançon**

(a) Le triangle KUV est rectangle en U et son hypoténuse est $[KV]$. D'après le théorème de Pythagore : $KV^2 = KU^2 + UV^2 = 50^2 + 80^2 = 2\,500 + 6\,400 = 8\,900$. Donc $KV = \sqrt{8\,900}$ cm (valeur exacte), soit $KV \approx 94{,}3$ cm.

(b) La planche coupée mesure 94,3 cm : c'est le plus long côté. D'une part, $94{,}3^2 = 8\,892{,}49$. D'autre part, $50^2 + 80^2 = 8\,900$. Comme $8\,892{,}49 \neq 8\,900$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ce triangle n'est pas rectangle. Il en est très proche, mais 94,3 n'est qu'un arrondi de $\sqrt{8\,900}$.

(c) Mêmes unités : $XY = 25$ cm $= 0{,}25$ m. Le triangle XYZ est rectangle en Y et son hypoténuse est $[XZ]$. D'après le théorème de Pythagore : $XZ^2 = XY^2 + YZ^2$, donc $YZ^2 = XZ^2 - XY^2 = 0{,}65^2 - 0{,}25^2 = 0{,}4225 - 0{,}0625 = 0{,}36$. Donc $YZ = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ m, soit 60 cm.

Ex. 7 ★★★ **L'échelle d'Alix, pompière à Grenoble**

(a) L'angle droit est en H, donc l'hypoténuse est $[AB]$, le côté opposé à l'angle droit : c'est l'échelle. $[AH]$ est un côté de l'angle droit, il fallait donc soustraire les carrés et non les additionner. D'ailleurs, Hugo trouve un résultat absurde : 6,20 m, c'est plus que la longueur de l'échelle, qui est pourtant le plus long côté.

(b) Le triangle AHB est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AH^2 + HB^2$, donc $AH^2 = AB^2 - HB^2 = 6{,}1^2 - 1{,}1^2 = 37{,}21 - 1{,}21 = 36$. Donc $AH = \sqrt{36} = 6$ m.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Le nouveau haut A' est à $6 - 0{,}3 = 5{,}7$ m du sol. Le triangle $A'HB'$ est rectangle en H et son hypoténuse est l'échelle, qui mesure 6,1 m. D'après le théorème de Pythagore : $HB'^2 = 6{,}1^2 - 5{,}7^2 = 37{,}21 - 32{,}49 = 4{,}72$.
Donc $HB' = \sqrt{4{,}72}$ m, soit $HB' \approx 2{,}17$ m.

(d) Non. Le pied s'est éloigné de $\sqrt{4{,}72} - 1{,}1 \approx 1{,}07$ m, et pas de 0,3 m. Les longueurs ne varient pas de la même quantité, car le théorème de Pythagore relie leurs carrés et non les longueurs elles-mêmes.

2. *Choisir le bon théorème*

Ex. 8 ★★★ **Automatismes : quel outil pour quelle question ?**

(a) Le triangle EFG est rectangle en F et je connais deux côtés, donc j'utilise le théorème de Pythagore : $EG^2 = EF^2 + FG^2$.

(b) Le triangle EFG est rectangle en F et je connais un angle aigu et un côté, donc j'utilise la trigonométrie. EF est le côté opposé à $\widehat{EGF}$ et FG le côté adjacent, donc c'est la tangente : $EF = FG \times \tan(\widehat{EGF})$.

(c) Le triangle EFG est rectangle en F et je connais deux côtés. Je cherche un angle, donc j'utilise la trigonométrie. FG est le côté adjacent à $\widehat{FGE}$ et EG l'hypoténuse : $\cos(\widehat{FGE}) = \frac{FG}{EG}$, puis la touche $\cos^{-1}$.

(d) Les points G, H, E et G, J, F sont alignés et $(HJ) \parallel (EF)$. C'est une configuration de Thalès (triangles emboîtés), donc j'utilise le théorème de Thalès : $\frac{GJ}{GF} = \frac{HJ}{EF}$.

(e) On veut savoir si deux droites sont parallèles à partir de longueurs, donc on utilise la réciproque du théorème de Thalès. On vérifie que les points G, H, E et G, J, F sont alignés dans le même ordre, puis on compare $\frac{GH}{GE}$ et $\frac{GJ}{GF}$. S'ils sont égaux, les droites sont parallèles. S'ils sont différents, on conclut avec la contraposée.

Ex. 9 ★★★ **Automatismes : vrai ou faux ? Ne lis rien à l'œil**

(a) Faux. L'angle en S n'est ni codé ni donné, et la figure n'est pas à l'échelle. On ne lit rien à l'œil : il faut démontrer que le triangle est rectangle.

Ex. 9 **(suite)**

(b) Vrai. $[RT]$ est le plus long côté. D'une part, $RT^2 = 9{,}1^2 = 82{,}81$. D'autre part, $RS^2 + ST^2 = 8{,}4^2 + 3{,}5^2 = 70{,}56 + 12{,}25 = 82{,}81$. Comme $RT^2 = RS^2 + ST^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S.

(c) Faux. Pour utiliser le théorème de Thalès, il faut que $(UV) \parallel (ST)$ soit donné ou démontré, par exemple avec la réciproque du théorème de Thalès. Une impression visuelle ne suffit pas.

(d) Faux. Le cosinus ne s'utilise que dans un triangle rectangle. Ici, DEF n'est pas rectangle : aucun outil de 3e ne permet de calculer EF directement.

(e) Vrai. (UV) et (ST) sont perpendiculaires à la même droite (RS), donc elles sont parallèles. Les points R, U, S et R, V, T sont alignés et $(UV) \parallel (ST)$: c'est une configuration de Thalès.

Ex. 10 ★★☆ **Prouver les parallèles avant d'utiliser Thalès**

(a) D'après le codage, $(PQ) \perp (PR)$ et $(RS) \perp (PR)$. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(PQ) \parallel (RS)$.

(b) Le triangle OPQ est rectangle en P, d'hypoténuse $[OQ]$. D'après le théorème de Pythagore : $OQ^2 = OP^2 + PQ^2 = 7{,}5^2 + 4^2 = 56{,}25 + 16 = 72{,}25$.
Donc $OQ = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$ cm.

(c) Les points P, O, R et Q, O, S sont alignés et $(PQ) \parallel (RS)$: c'est une configuration de Thalès (papillon). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OR}{OP} = \frac{OS}{OQ} = \frac{RS}{PQ}$, soit $\frac{6}{7{,}5} = \frac{RS}{4}$.
Donc $RS = \frac{4 \times 6}{7{,}5} = 3{,}2$ cm.

(d) Le triangle OPQ est rectangle en P. PQ est le côté opposé à $\widehat{POQ}$ et OP le côté adjacent : $\tan(\widehat{POQ}) = \frac{PQ}{OP} = \frac{4}{7{,}5}$. Avec la touche $\tan^{-1}$ (mode degrés), $\widehat{POQ} \approx 28°$.

Ex. 11 ★★☆ **La voile du dériveur : rectangle d'abord, angles ensuite**

(a) $[IK]$ est le plus long côté. D'une part, $IK^2 = 5{,}8^2 = 33{,}64$. D'autre part, $IJ^2 + JK^2 = 4^2 + 4{,}2^2 = 16 + 17{,}64 = 33{,}64$. Comme $IK^2 = IJ^2 + JK^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en J.

Ex. 11 **(suite)**

(b) Le triangle IJK est rectangle en J. JK est le côté opposé à $\widehat{JIK}$ et IJ le côté adjacent : $\tan(\widehat{JIK}) = \frac{JK}{IJ} = \frac{4{,}2}{4}$. Avec la touche $\tan^{-1}$ (mode degrés), $\widehat{JIK} \approx 46°$.

(c) Inès s'est trompée : pour l'angle $\widehat{IKJ}$, JK est le côté adjacent, pas le côté opposé. Dans le triangle IJK rectangle en J, il faut écrire $\cos(\widehat{IKJ}) = \frac{JK}{IK} = \frac{4{,}2}{5{,}8}$. Avec la touche $\cos^{-1}$, $\widehat{IKJ} \approx 44°$. C'est cohérent : les deux angles aigus sont complémentaires ($46° + 44° = 90°$).

Ex. 12 ★★★ **La tyrolienne du parc d'aventure**

(a) On sait que $(AB) \perp (BC)$ et $(DE) \perp (BC)$. Propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (DE)$.

(b) Le triangle ABC est rectangle en B (angle droit codé) et on connaît deux côtés : pour trouver le troisième, on utilise le théorème de Pythagore. L'hypoténuse est [AC] : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 35^2 = 144 + 1\,225 = 1\,369$, donc $AC = \sqrt{1\,369} = 37$ m. Le câble mesure 37 m.

(c) Les points C, D, B et C, E, A sont alignés et $(DE) \parallel (AB)$ (démontré à la première question) : c'est une configuration de Thalès. D'après le théorème de Thalès : $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{BA}$, donc $\frac{14}{35} = \frac{DE}{12}$ et $DE = \frac{12 \times 14}{35} = 4{,}8$ m. Le piquet mesure 4,8 m.

(d) Le triangle ABC est rectangle en B. Pour l'angle $\widehat{ACB}$, [AB] est le côté opposé et [BC] le côté adjacent : $\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{35}$. À la calculatrice (mode degrés), $\widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\frac{12}{35}\right) \approx 19°$.

(e) Le triangle CDE est rectangle en D : son hypoténuse est [CE], le côté opposé à l'angle droit. Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, pas à leur différence. D'après le théorème de Pythagore : $CE^2 = CD^2 + DE^2 = 14^2 + 4{,}8^2 = 196 + 23{,}04 = 219{,}04$, donc $CE = \sqrt{219{,}04} = 14{,}8$ m.

Ex. 13 ★★★ **Une figure qui trompe l'œil**

(a) Le plus grand côté est [PL]. D'une part, $PL^2 = 16^2 = 256$. D'autre part, $PN^2 + NL^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Comme $PL^2 \neq PN^2 + NL^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle PNL n'est pas rectangle.

Ex. 13 (suite)

(b) Le cosinus ne s'utilise que dans un triangle rectangle. Or on vient de démontrer que PNL n'est pas rectangle. Sa formule n'a donc pas de sens ici, et 56° n'est pas la mesure de l'angle.

(c) Les points P, K, N et P, M, L sont alignés dans le même ordre. D'une part, $\frac{PK}{PN} = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$. D'autre part, $\frac{PM}{PL} = \frac{7{,}8}{16} = 0{,}4875$. Produits en croix : $4{,}5 \times 16 = 72$ et $9 \times 7{,}8 = 70{,}2$. Les rapports ne sont pas égaux, donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, (KM) et (NL) ne sont pas parallèles. L'erreur de Théo : la droite des milieux exige deux milieux, or M n'est pas le milieu de [PL] (ce milieu serait à 8 cm de P). Sans parallèles démontrées, on ne peut pas utiliser le théorème de Thalès.

(d) Le triangle PHN est rectangle en H car $(NH) \perp (PL)$. Son hypoténuse est [PN]. Comme H est sur [PL], $\widehat{NPL} = \widehat{NPH}$, et [NH] est le côté opposé à cet angle : $\sin(\widehat{NPH}) = \frac{NH}{PN} = \frac{6{,}68}{9}$. À la calculatrice (mode degrés), $\widehat{NPL} = \sin^{-1}\left(\frac{6{,}68}{9}\right) \approx 48^\circ$.

Ex. 14 ★★★ Le tipi de la colonie

(a) Dans un cône de révolution, la hauteur [SO] est perpendiculaire au disque de base, donc à la droite (OM) de ce disque. Le triangle SOM est donc rectangle en O : l'angle droit est démontré, pas lu sur le dessin.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O. Son hypoténuse est [SM] et, pour l'angle $\widehat{SMO}$, [OM] est le côté adjacent : $\cos(\widehat{SMO}) = \frac{OM}{SM}$, donc $SM = \frac{OM}{\cos(65^\circ)} = \frac{1{,}4}{\cos(65^\circ)} \approx 3{,}31$ m.

(c) Une longueur ne peut pas être négative. La calculatrice de Lou n'était pas réglée en mode degrés : elle n'a pas compris 65 comme 65°. Il faut la régler en mode degrés (« D » ou « DEG » affiché à l'écran) et refaire le calcul.

(d) Dans le triangle SOM rectangle en O, pour l'angle $\widehat{SMO}$, [SO] est le côté opposé et [OM] le côté adjacent : $\tan(\widehat{SMO}) = \frac{SO}{OM}$, donc $SO = 1{,}4 \times \tan(65^\circ) \approx 3{,}00$ m. On utilise la donnée exacte OM plutôt que la valeur arrondie de SM, pour ne pas arrondir trop tôt.

(e) Sur [OM], on place le point A tel que $OA = 0{,}6$ m, donc $AM = 1{,}4 - 0{,}6 = 0{,}8$ m. On appelle B le point de la toile [SM] à la verticale de A. Le triangle BAM est rectangle en A et $\widehat{BMA} = 65^\circ$. Pour cet angle, [AB] est le côté opposé et [AM] le côté adjacent : $AB = 0{,}8 \times \tan(65^\circ) \approx 1{,}72$ m. Comme $1{,}72 < 1{,}75$, la tête de Malo touche la toile.

3. *Thalès et sa réciproque dans une figure de brevet*

Ex. 15 ★★★ Automatismes : Thalès dans des triangles emboîtés

(a) U est sur le segment $[RS]$, donc $RS = RU + US = 2{,}6 + 3{,}9 = 6{,}5$ cm. Attention : on utilise RS dans les rapports, pas US.

(b) $k = \frac{RU}{RS} = \frac{2{,}6}{6{,}5} = 0{,}4$. On a bien $k < 1$: le triangle RUV est une réduction du triangle RST.

(c) Les points R, U, S et R, V, T sont alignés et $(UV) \parallel (ST)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}$, soit $\frac{2{,}6}{6{,}5} = \frac{3}{RT}$.
Donc $RT = \frac{3 \times 6{,}5}{2{,}6} = 7{,}5$ cm.

(d) Avec les mêmes rapports : $\frac{2{,}6}{6{,}5} = \frac{UV}{8}$.
Donc $UV = \frac{2{,}6 \times 8}{6{,}5} = 3{,}2$ cm.

(e) V est sur le segment $[RT]$, donc $VT = RT - RV = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ cm.

Ex. 16 ★★★ Automatismes : parallèles ou pas ?

(a) Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. Produits en croix : $AM \times AC = 4 \times 13{,}5 = 54$ et $AB \times AN = 9 \times 6 = 54$. Ils sont égaux, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (les deux valent exactement $\frac{4}{9}$).
D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

(b) On ne compare jamais des valeurs arrondies. Produits en croix : $AM \times AC = 2{,}2 \times 5{,}8 = 12{,}76$ et $AB \times AN = 6{,}6 \times 1{,}9 = 12{,}54$. Ils sont différents, donc $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles : Léo s'est trompé.

(c) Configuration papillon : les points M, A, B et N, A, C sont alignés dans le même ordre. Produits en croix : $AM \times AC = 2{,}7 \times 5{,}5 = 14{,}85$ et $AB \times AN = 4{,}5 \times 3{,}3 = 14{,}85$. Ils sont égaux, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

(d) Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. M est sur $[AB]$, donc $AB = AM + MB = 3 + 5 = 8$ cm ; N est sur $[AC]$, donc $AC = AN + NC = 2{,}25 + 3{,}75 = 6$ cm. Attention : les rapports utilisent AB et AC, pas MB et NC. Produits en croix : $AM \times AC = 3 \times 6 = 18$ et $AB \times AN = 8 \times 2{,}25 = 18$. Ils sont égaux, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Ex. 17 ★★☆ **Le support pliant en X**

(a) $OP = 75$ cm $= 0{,}75$ m. O est sur le segment $[PR]$, donc $OR = PR - OP = 1{,}95 - 0{,}75 = 1{,}2$ m.

(b) Les droites (PR) et (QS) sont sécantes en O et $(PQ) \parallel (RS)$ (configuration papillon). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OP}{OR} = \frac{OQ}{OS} = \frac{PQ}{RS}$, soit $\frac{0{,}75}{1{,}2} = \frac{OQ}{0{,}96}$.
Donc $OQ = \frac{0{,}75 \times 0{,}96}{1{,}2} = 0{,}6$ m, soit 60 cm.

(c) Avec les mêmes rapports : $\frac{0{,}75}{1{,}2} = \frac{0{,}5}{RS}$.
Donc $RS = \frac{0{,}5 \times 1{,}2}{0{,}75} = 0{,}8$ m. Le troisième rapport, $\frac{PQ}{RS}$, ne contient pas le point O : il relie les côtés correspondants des deux triangles.

(d) En configuration papillon, les longueurs partent du point d'intersection O. PR et QS ne sont pas des côtés des triangles OPQ et ORS. Il faut écrire $\frac{OP}{OR} = \frac{OQ}{OS}$.

Ex. 18 ★★☆ **La charpente de l'abri de jardin**

(a) E est sur le segment $[KD]$, donc $KD = KE + ED = 2{,}25 + 2{,}75 = 5$ m.

(b) Les points K, E, D et K, F, G sont alignés dans le même ordre. D'une part, $\frac{KE}{KD} = \frac{2{,}25}{5} = 0{,}45$; d'autre part, $\frac{KF}{KG} = \frac{2{,}7}{6} = 0{,}45$. Les rapports sont égaux (valeurs exactes). D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(EF) \parallel (DG)$.

(c) Pour la réciproque, il faut comparer les deux rapports qui partent du point commun K : $\frac{KE}{KD}$ et $\frac{KF}{KG}$. Ici, $\frac{EF}{DG} = \frac{2{,}88}{6{,}4} = 0{,}45$: l'égalité de Jules est vraie, mais elle ne prouve rien. Le rapport $\frac{EF}{DG}$ ne contient pas K : son égalité est une conséquence du parallélisme, pas une preuve.

(d) Les points sont toujours alignés dans le même ordre. Produits en croix : $KE \times KG = 2{,}25 \times 6 = 13{,}5$ et $KD \times KF = 5 \times 2{,}5 = 12{,}5$. Ils sont différents, donc $\frac{KE}{KD} \neq \frac{KF}{KG}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, (EF) et (DG) ne sont plus parallèles.

Ex. 19 ★★★ **Papillon et angle droit caché**

(a) Dans le triangle ODE, le plus grand côté est $[OE]$. D'une part, $OE^2 = 9^2 = 81$. D'autre part, $OD^2 + DE^2 = 5{,}4^2 + 7{,}2^2 = 29{,}16 + 51{,}84 = 81$. On a $OE^2 = OD^2 + DE^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ODE est rectangle en D.

Ex. 19 **(suite)**

(b) O est entre D et F, donc $OF = DF - OD = 8{,}1 - 5{,}4 = 2{,}7$ cm. Les droites (DF) et (EG) sont sécantes en O et $(DE) \parallel (FG)$: c'est une configuration de Thalès (papillon). D'après le théorème de Thalès, $\frac{OF}{OD} = \frac{OG}{OE} = \frac{FG}{DE}$, soit $\frac{2{,}7}{5{,}4} = \frac{FG}{7{,}2}$.
Donc $FG = \frac{2{,}7 \times 7{,}2}{5{,}4} = 3{,}6$ cm. Attention : on utilise OF, qui part du point commun O, et non DF.

(c) D'après la question 1, $(DE) \perp (DF)$. Or $(FG) \parallel (DE)$. Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre : Donc $(FG) \perp (DF)$, c'est-à-dire $(FG) \perp (OF)$. Le triangle OFG est donc rectangle en F.

(d) D'après le théorème de Thalès, $\frac{OG}{OE} = \frac{OF}{OD}$, soit $\frac{OG}{9} = \frac{2{,}7}{5{,}4}$.
Donc $OG = \frac{9 \times 2{,}7}{5{,}4} = 4{,}5$ cm. O est entre E et G, donc $EG = EO + OG = 9 + 4{,}5 = 13{,}5$ cm.

Ex. 20 ★★★ **Parallèles : les rapports ne suffisent pas toujours**

(a) M est sur le segment $[AB]$, donc $AB = AM + MB = 2{,}3 + 4{,}6 = 6{,}9$ cm.

(b) Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. D'une part, $\frac{AM}{AB} = \frac{2{,}3}{6{,}9}$; d'autre part, $\frac{AN}{AC} = \frac{2{,}9}{8{,}7}$. Produits en croix : $2{,}3 \times 8{,}7 = 20{,}01$ et $6{,}9 \times 2{,}9 = 20{,}01$. Ils sont égaux : les deux rapports valent exactement $\frac{1}{3}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

(c) $k = \frac{AM}{AB} = \frac{2{,}3}{6{,}9} = \frac{1}{3}$, et $k < 1$: c'est bien une réduction. Comme $(MN) \parallel (BC)$, d'après le théorème de Thalès, $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$, donc $MN = \frac{1}{3} \times 6{,}3 = 2{,}1$ cm.

(d) Non. Les rapports sont bien égaux ($\frac{AR}{AB} = \frac{2{,}3}{6{,}9} = \frac{1}{3} = \frac{AN}{AC}$), mais les points ne sont pas dans le même ordre : on a R, A, B d'un côté et A, N, C de l'autre. La réciproque du théorème de Thalès ne s'applique donc pas. D'ailleurs, par N il ne passe qu'une parallèle à (BC) : c'est (MN). Or R n'est pas sur (MN), donc (RN) n'est pas parallèle à (BC).

Ex. 21 ★★★ **L'ombre du mât et le lampadaire**

(a) Hugo a utilisé EP, qui ne part pas du point commun S. Le petit triangle est SET et le grand SPH : il faut $SP = SE + EP$, et non EP.
(Son calcul donne $\frac{1{,}65 \times 9{,}8}{2{,}2} \approx 7{,}4$ m, ce qui est faux.)

Ex. 21 **(suite)**

(b) $ET = 165$ cm $= 1{,}65$ m. $SP = SE + EP = 2{,}2 + 9{,}8 = 12$ m. (ET) et (PH) sont perpendiculaires au sol (SP), donc $(ET) \parallel (PH)$. Les points S, E, P et S, T, H sont alignés : configuration de Thalès. D'après le théorème de Thalès, $\frac{SE}{SP} = \frac{ST}{SH} = \frac{ET}{PH}$, soit $\frac{2{,}2}{12} = \frac{1{,}65}{PH}$.
Donc $PH = \frac{1{,}65 \times 12}{2{,}2} = 9$ m. Le mât mesure 9 m.

(c) Le triangle SPH est rectangle en P. D'après le théorème de Pythagore, $SH^2 = SP^2 + PH^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.
Donc $SH = \sqrt{225} = 15$ m.

(d) Les points S, L, P et S, R, H sont alignés dans le même ordre. Produits en croix : $SL \times SH = 5{,}2 \times 15 = 78$ et $SP \times SR = 12 \times 6{,}6 = 79{,}2$. Ils sont différents, donc $\frac{SL}{SP} \neq \frac{SR}{SH}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, (LR) et (PH) ne sont pas parallèles. Comme (PH) est verticale, le lampadaire n'est pas vertical.

4. *Trigonométrie : longueur ou angle*

Ex. 22 ★☆☆ **Nommer les côtés avant de choisir le rapport**

(a) Le triangle KTR est rectangle en T. L'hypoténuse est le côté en face de l'angle droit : c'est [KR].

(b) Pour $\widehat{KRT}$, le côté adjacent est le côté de l'angle droit qui passe par R : c'est [TR]. Le côté opposé est en face de R : c'est [KT].

(c) Pour $\widehat{TKR}$, le côté adjacent est [KT] et le côté opposé est [TR]. Quand on change d'angle, les deux côtés de l'angle droit échangent leurs rôles.

(d) Le triangle KTR est rectangle en T. [TR] est le côté opposé à $\widehat{TKR}$ et [KR] est l'hypoténuse : opposé et hypoténuse, c'est le sinus. $\sin(\widehat{TKR}) = \frac{TR}{KR} = \frac{5{,}2}{6} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$.

(e) [KT] est le côté opposé à $\widehat{KRT}$ et [TR] est le côté adjacent. Opposé et adjacent : c'est la tangente.
$\tan(\widehat{KRT}) = \frac{KT}{TR}$
(TR est en bas, donc on divisera).

(f) Non. [KR] passe bien par R, mais c'est l'hypoténuse, puisqu'il est en face de l'angle droit. Le côté adjacent à $\widehat{KRT}$ est [TR] : c'est le côté de l'angle droit qui passe par R.

Ex. 23 ★★☆ **Longueur : multiplier ou diviser ?**

(a) Le triangle DUV est rectangle en U. [DU] est le côté adjacent à $\widehat{UDV}$ et [DV] est l'hypoténuse : j'utilise le cosinus. $\cos(\widehat{UDV}) = \frac{DU}{DV}$, soit $\cos(37°) = \frac{DU}{9}$. DU est en haut, donc je multiplie : $DU = 9 \times \cos(37°) \approx 7{,}2$ cm.

(b) Noé a multiplié alors que FH est en bas du quotient. D'ailleurs, l'hypoténuse ne peut pas être plus courte que FG $= 5$ cm. Le triangle FGH est rectangle en G ; [FG] est le côté adjacent à $\widehat{GFH}$ et [FH] est l'hypoténuse : $\cos(41°) = \frac{5}{FH}$, donc $FH = \frac{5}{\cos(41°)} \approx 6{,}6$ cm.

(c) Le triangle ZEN est rectangle en E. [EN] est le côté opposé à $\widehat{EZN}$ et [ZE] est le côté adjacent : j'utilise la tangente. $\tan(53°) = \frac{EN}{3{,}4}$, donc $EN = 3{,}4 \times \tan(53°) \approx 4{,}5$ cm.

Ex. 24 ★★★ **L'angle d'élévation d'un cerf-volant**

(a) Un sinus est toujours compris entre 0 et 1 : 1,58 montre que le rapport est écrit à l'envers. Le triangle MPK est rectangle en P ; [PK] est le côté opposé à $\widehat{PMK}$ et [MK] est l'hypoténuse : $\sin(\widehat{PMK}) = \frac{PK}{MK} = \frac{24}{38}$, donc $\widehat{PMK} = \sin^{-1}\left(\frac{24}{38}\right) \approx 39°$
(calculatrice en mode degrés).

(b) Dans le triangle MPK rectangle en P, les deux angles aigus ont pour somme 90° :
$\widehat{MKP} = 90° - \widehat{PMK} \approx 51°$.

(c) La calculatrice de Hugo est en mode radians : 0,68 n'est pas une mesure en degrés. En mode degrés, on retrouve $\widehat{PMK} \approx 39°$.

Ex. 25 ★★★ **Une route de montagne à 12 %**

(a) Le triangle DHA est rectangle en H. $\tan(\widehat{ADH}) = \frac{AH}{DH} = \frac{12}{100} = 0{,}12$, donc $\widehat{ADH} = \tan^{-1}(0{,}12) \approx 6{,}8°$.
Une pente de 12 % ne veut pas dire un angle de 12° : elle correspond à environ 6,8°.

(b) [AH] est le côté opposé à $\widehat{ADH}$ et [DA] est l'hypoténuse : $\sin(\widehat{ADH}) = \frac{AH}{DA}$, donc $AH = 850 \times \sin(\widehat{ADH})$. Je garde la valeur non arrondie $\tan^{-1}(0{,}12)$: $AH \approx 101{,}3$ m.

(c) Zoé a arrondi trop tôt : elle a pris 7° au lieu de $\tan^{-1}(0{,}12) \approx 6{,}8°$. Multipliée par 850, cette petite erreur sur l'angle donne plus de 2 m d'écart. Il faut garder $\tan^{-1}(0{,}12)$ en mémoire et n'arrondir qu'à la fin : $AH \approx 101{,}3$ m.

(d) Pente $= \tan(10°) \times 100 \approx 17{,}6$ %. Un angle de 10° donne donc une pente d'environ 17,6 %, et non de 10 %.

Ex. 26 ★★★ **Un voilier s'approche d'un phare**

(a) Le triangle PHB est rectangle en H. Par rapport à l'angle $\widehat{HBP}$, [PH] est le côté opposé (connu) et [HB] le côté adjacent (cherché) : on utilise la tangente. $\tan(\widehat{HBP}) = \frac{PH}{HB}$, soit $\tan(32°) = \frac{48}{HB}$. HB est en bas du quotient, donc on divise : $HB = \frac{48}{\tan(32°)} \approx 76{,}8$ m. Le voilier part donc à environ 76,8 m du pied du phare.

(b) Le triangle PHC est rectangle en H. Par rapport à $\widehat{HCP}$, [PH] est le côté opposé et [HC] le côté adjacent : $\tan(\widehat{HCP}) = \frac{PH}{HC}$, soit $\tan(51°) = \frac{48}{HC}$, donc $HC = \frac{48}{\tan(51°)} \approx 38{,}9$ m.

(c) Les points B, C et H sont alignés, et C est entre B et H. Donc $BC = HB - HC = \frac{48}{\tan(32°)} - \frac{48}{\tan(51°)} \approx 37{,}9$ m, en gardant les valeurs exactes de la calculatrice jusqu'à la fin. Le voilier a parcouru environ 37,9 m.

(d) Nour a arrondi $\tan(32°)$ trop tôt : $\tan(32°) \approx 0{,}6249$, et pas 0,6. Diviser par un nombre trop petit donne un résultat trop grand : 80 m au lieu d'environ 76,8 m, soit un écart d'environ 3,2 m. On n'arrondit qu'à la fin du calcul.

Ex. 27 ★★★ **Le toboggan du parc**

(a) [TG] est le plus grand côté. D'une part, $TG^2 = 5{,}3^2 = 28{,}09$. D'autre part, $TS^2 + SG^2 = 2{,}8^2 + 4{,}5^2 = 7{,}84 + 20{,}25 = 28{,}09$. On a donc $TG^2 = TS^2 + SG^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TSG est rectangle en S.

(b) Le triangle TSG est rectangle en S. Par rapport à $\widehat{TGS}$, [TS] est le côté opposé et [SG] le côté adjacent : $\tan(\widehat{TGS}) = \frac{TS}{SG} = \frac{2{,}8}{4{,}5}$, donc $\widehat{TGS} = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}8}{4{,}5}\right) \approx 32°$. La glissière fait un angle d'environ 32° avec le sol.

(c) Le triangle TSG est rectangle en S. Par rapport à $\widehat{TGS}$, [SG] est le côté adjacent et [TG] est l'hypoténuse : l'égalité de Lucas est juste. $\widehat{TGS} = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}5}{5{,}3}\right) \approx 32°$ (calculatrice en degrés). On retrouve le même angle, car les trois côtés de ce triangle rectangle sont connus.

(d) Dans le triangle TSG rectangle en S, les deux angles aigus sont complémentaires : $\widehat{STG} = 90° - \widehat{TGS}$. Avec la valeur non arrondie de $\widehat{TGS}$, on obtient $\widehat{STG} \approx 58°$.

(e) Dans le nouveau triangle, rectangle en S, [TS] est le côté opposé à l'angle de 24° et la glissière [TG] est l'hypoténuse : c'est le sinus. $\sin(24°) = \frac{2{,}8}{TG}$. TG est en bas du quotient, donc on divise : $TG = \frac{2{,}8}{\sin(24°)} \approx 6{,}9$ m. Il lui faut une glissière d'environ 6,9 m.

Ex. 28 ★★★ **La tour qui penche**

(a) Le triangle BHS est rectangle en H. Par rapport à $\widehat{SBH}$, [SH] est le côté opposé et [BS] l'hypoténuse : c'est le sinus. $\sin(\widehat{SBH}) = \frac{SH}{BS}$, soit $\sin(86°) = \frac{SH}{56}$. SH est en haut du quotient, donc on multiplie : $SH = 56 \times \sin(86°) \approx 55{,}9$ m.

(b) Par rapport à $\widehat{SBH}$, [BH] est le côté adjacent et [BS] l'hypoténuse : $\cos(\widehat{SBH}) = \frac{BH}{BS}$, soit $\cos(86°) = \frac{BH}{56}$, donc $BH = 56 \times \cos(86°) \approx 3{,}9$ m.

(c) [BS] est en face de l'angle droit : c'est l'hypoténuse, pas un côté adjacent. Le côté adjacent est le côté de l'angle droit qui passe par B, c'est-à-dire [BH]. Avec son égalité, Tom obtiendrait $BH = \frac{56}{\cos(86°)} \approx 802{,}8$ m, ce qui est absurde : un côté de l'angle droit est toujours plus court que l'hypoténuse (56 m).

(d) Le triangle BHS est rectangle en H. [BH] est le côté adjacent à $\widehat{SBH}$ et [BS] est l'hypoténuse : $\cos(\widehat{SBH}) = \frac{BH}{BS} = \frac{5{,}6}{56} = 0{,}1$, donc $\widehat{SBH} = \cos^{-1}(0{,}1) \approx 84°$ (calculatrice en degrés).

5. *Enchaîner deux théorèmes, valeurs exactes et longueur x*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : valeurs exactes et équation $x^2 = a$**

(a) Les solutions de $x^2 = 37$ sont $\sqrt{37}$ et $-\sqrt{37}$. Une longueur est positive, donc on rejette $-\sqrt{37}$: $x = \sqrt{37}$ cm (valeur exacte), et $x \approx 6{,}1$ cm.

(b) Léo a oublié le double produit : $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.

(c) Le triangle PRT est rectangle en R, donc son hypoténuse est $[PT]$. D'après le théorème de Pythagore : $PT^2 = PR^2 + RT^2 = 25 + 36 = 61$. Donc $PT = \sqrt{61}$ cm (valeur exacte), et $PT \approx 7{,}8$ cm.

(d) Le triangle EFG est rectangle en G, donc son hypoténuse est $[EF]$. D'après le théorème de Pythagore : $EF^2 = EG^2 + FG^2$, donc $FG^2 = EF^2 - EG^2 = 81 - 49 = 32$. Donc $FG = \sqrt{32}$ cm (valeur exacte), et $FG \approx 5{,}7$ cm.

(e) $UV^2 = (\sqrt{19})^2 = 19$. Sami a arrondi trop tôt : 4,4 n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{19}$, donc $4{,}4^2 = 19{,}36$ n'est pas égal à UV^2. Il faut garder la valeur exacte jusqu'au bout.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : la bonne propriété à citer**

(a) Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Propriété : si un triangle est inscrit dans un cercle qui a pour diamètre l'un de ses côtés, alors il est rectangle et ce côté est son hypoténuse.
Donc ABC est rectangle en C.

(b) I est le milieu de $[RS]$ et J celui de $[RT]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $(IJ) \parallel (ST)$ et $IJ = \frac{ST}{2} = \frac{7{,}6}{2} = 3{,}8$ cm.

(c) Propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(d_1) \parallel (d_2)$.

(d) M est le milieu de $[XY]$ et la droite (MN) est parallèle à (YZ). Propriété : dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.
Donc N est le milieu de $[XZ]$ et $XN = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm.

Ex. 31 ★★☆ **Prouver l'angle droit avant le sinus**

(a) Le plus long côté est $[GJ]$. D'une part, $GJ^2 = 5{,}3^2 = 28{,}09$. D'autre part, $GH^2 + HJ^2 = 7{,}84 + 20{,}25 = 28{,}09$. On a $GJ^2 = GH^2 + HJ^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle GHJ est rectangle en H.

(b) Le triangle GHJ est rectangle en H (question précédente). L'hypoténuse est $[GJ]$ et $[HJ]$ est le côté opposé à $\widehat{HGJ}$. $\sin(\widehat{HGJ}) = \frac{HJ}{GJ} = \frac{4{,}5}{5{,}3}$, donc $\widehat{HGJ} = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}5}{5{,}3}\right) \approx 58°$.

(c) $[HJ]$ est le côté opposé à $\widehat{HGJ}$, pas le côté adjacent. Il fallait écrire $\cos(\widehat{HGJ}) = \frac{GH}{GJ} = \frac{2{,}8}{5{,}3}$, ce qui donne bien environ $58°$. Pour l'angle $\widehat{HJG}$, $[HJ]$ est le côté adjacent : Léa a donc calculé $\widehat{HJG} \approx 32°$. C'est cohérent, car les deux angles aigus sont complémentaires : $90° - 58° = 32°$.

Ex. 32 ★★☆ **Une longueur en fonction de x, puis Thalès**

(a) $DF^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$. Il ne faut pas oublier le double produit $2x$.

(b) Le triangle DEF est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore : $DF^2 = DE^2 + EF^2$, soit $x^2 + 2x + 1 = 25 + x^2$.
Donc $2x + 1 = 25$, puis $2x = 24$ et $x = 12$. Ainsi $EF = 12$ cm et $DF = 13$ cm.

Ex. 32 (suite)

(c) Le triangle DEF est rectangle en E, donc $(DE) \perp (EF)$. Par hypothèse, $(MN) \perp (EF)$. Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(MN) \parallel (DE)$.

(d) Les points F, N, E et F, M, D sont alignés, et $(MN) \parallel (DE)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{FN}{FE} = \frac{FM}{FD} = \frac{NM}{ED}$, soit $\frac{4}{12} = \frac{FM}{13}$.
Donc $FM = \frac{4 \times 13}{12} = \frac{13}{3}$ cm (valeur exacte), soit $FM \approx 4{,}3$ cm.

Ex. 33 ★★★ **Type brevet : parallèles à prouver, papillon et valeur exacte**

(a) Les droites (AB) et (CD) sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite (AC). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(AB) \parallel (CD)$.

(b) Le triangle OAB est rectangle en A et son hypoténuse est $[OB]$. D'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53$.
Donc $OB = \sqrt{53}$ cm (valeur exacte). On la garde ainsi pour la suite.

(c) Les points A, O, C et B, O, D sont alignés, et $(AB) \parallel (CD)$ d'après la question 1. C'est une configuration de Thalès « papillon ». D'après le théorème de Thalès : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$, donc $\frac{2}{6} = \frac{\sqrt{53}}{OD}$. Ainsi $OD = \frac{6 \times \sqrt{53}}{2} = 3\sqrt{53}$ cm (valeur exacte), soit $OD \approx 21{,}8$ cm.

(d) Inès a arrondi un résultat intermédiaire puis l'a réutilisé. Le calcul $3 \times 7{,}3 = 21{,}9$ triple l'erreur d'arrondi, car $\sqrt{53} \approx 7{,}280$ et non $7{,}3$. Avec la valeur exacte, $OD = 3\sqrt{53} \approx 21{,}84$ cm, ce qui donne $21{,}8$ cm. Il faut garder $\sqrt{53}$ et n'arrondir qu'à la fin.

(e) Les angles $\widehat{COD}$ et $\widehat{AOB}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. Dans le triangle OAB rectangle en A, $[AB]$ est le côté opposé à $\widehat{AOB}$ et $[OA]$ est le côté adjacent : $\tan(\widehat{AOB}) = \frac{AB}{OA} = \frac{7}{2} = 3{,}5$. Avec $\tan^{-1}$ (calculatrice en mode degrés), $\widehat{AOB} \approx 74°$.
Donc $\widehat{COD} \approx 74°$.

Ex. 34 ★★★ **Demi-cercle, droite des milieux et cosinus**

(a) Le point G est sur le cercle de diamètre $[EF]$ et il est distinct de E et de F. Or, si un triangle est inscrit dans un cercle qui a pour diamètre l'un de ses côtés, alors il est rectangle et ce côté est son hypoténuse.
Donc EGF est rectangle en G. D'après le théorème de Pythagore : $EF^2 = EG^2 + GF^2$, donc $GF^2 = 8{,}5^2 - 3{,}6^2 = 72{,}25 - 12{,}96 = 59{,}29$. Ainsi $GF = \sqrt{59{,}29} = 7{,}7$ cm.

(b) O est le centre du cercle, donc c'est le milieu du diamètre $[EF]$, et K est le milieu de $[EG]$. D'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle EGF, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté : $(OK) \parallel (GF)$. De plus, $OK = \frac{GF}{2} = \frac{7{,}7}{2} = 3{,}85$ cm.

(c) D'après la question 1, $(GF) \perp (EG)$, et d'après la question 2, $(OK) \parallel (GF)$. Or, si deux droites sont parallèles et que l'une est perpendiculaire à une troisième droite, alors l'autre l'est aussi.
Donc $(OK) \perp (EG)$. Comme K est sur (EG), le triangle EKO est rectangle en K.

(d) D'après la question 3, le triangle EKO est rectangle en K : son hypoténuse est $[EO]$ et $[EK]$ est le côté adjacent à $\widehat{KEO}$. Noé a utilisé le sinus (côté opposé ÷ hypoténuse) au lieu du cosinus. $EK = \frac{3{,}6}{2} = 1{,}8$ cm et $EO = \frac{8{,}5}{2} = 4{,}25$ cm. $\cos(\widehat{KEO}) = \frac{EK}{EO} = \frac{1{,}8}{4{,}25}$. Avec $\cos^{-1}$ en mode degrés, $\widehat{KEO} \approx 65°$. Noé a en fait calculé $\widehat{EOK}$: les deux angles aigus sont complémentaires, et $25° + 65° = 90°$.

Ex. 35 ★★★ **Toit pyramidal : $x^2 = a$, arête, angle et section**

(a) $ABCD$ est un carré, donc le triangle ABC est rectangle en B, avec $AB = BC = x$. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc $9^2 = x^2 + x^2$, soit $81 = 2x^2$, d'où $x^2 = \frac{81}{2} = 40{,}5$. L'équation $x^2 = 40{,}5$ a deux solutions, $\sqrt{40{,}5}$ et $-\sqrt{40{,}5}$. Une longueur est positive, donc on rejette la solution négative : $x = \sqrt{40{,}5}$ m (valeur exacte), soit $x \approx 6{,}4$ m.

(b) Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, donc $AH = \frac{9}{2} = 4{,}5$ m. La hauteur $[SH]$ est perpendiculaire à la base, donc le triangle SHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SH^2 + AH^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$.
Donc $SA = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ m.

Ex. 35 (suite)

(c) Dans le triangle SHA rectangle en H, $[SH]$ est le côté opposé à $\widehat{SAH}$ et $[AH]$ est le côté adjacent : $\tan(\widehat{SAH}) = \frac{SH}{AH} = \frac{6}{4{,}5}$. Avec $\tan^{-1}$ en mode degrés, $\widehat{SAH} \approx 53°$.

(d) $k = \frac{SH'}{SH} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2. L'aire de la base vaut $x^2 = 40{,}5$ m², valeur exacte trouvée à la question 1. L'aire de la section vaut donc $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 40{,}5 = \frac{40{,}5}{9} = 4{,}5$ m². Attention : avec $x \approx 6{,}4$, on obtiendrait $6{,}4^2 \div 9 \approx 4{,}55$ m², une réponse fausse à cause de l'arrondi fait trop tôt.

6. *Dans l'espace : pavé, cône, pyramide*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : la boîte de craies**

(a) La face $BFGC$ d'un pavé droit est un rectangle, donc le triangle BFG est rectangle en F : l'angle droit se justifie, il ne se mesure pas sur la perspective. $FG = AD = 6{,}6$ cm. D'après le théorème de Pythagore : $BG^2 = BF^2 + FG^2 = 8{,}8^2 + 6{,}6^2 = 77{,}44 + 43{,}56 = 121$.
Donc $BG = \sqrt{121} = 11$ cm.

(b) La face $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B, avec $BC = AD = 6{,}6$ cm. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 6{,}6^2 = 225 + 43{,}56 = 268{,}56$.
Donc $AC = \sqrt{268{,}56}$ cm, soit $AC \approx 16{,}4$ cm.

(c) Dans le triangle ABC rectangle en B, $[BC]$ est le côté opposé à $\widehat{BAC}$ et $[AB]$ le côté adjacent : $\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{6{,}6}{15}$.
Donc $\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\frac{6{,}6}{15}\right) \approx 24°$
(calculatrice en degrés).

(d) Dans le triangle BFG rectangle en F, $[BF]$ est le côté adjacent à $\widehat{FBG}$ et $[BG]$ l'hypoténuse : $\cos(\widehat{FBG}) = \frac{BF}{BG} = \frac{8{,}8}{11} = 0{,}8$.
Donc $\widehat{FBG} = \cos^{-1}(0{,}8) \approx 37°$
(calculatrice en degrés).

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : le cornet de glace**

(a) Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm.

(b) Le triangle SOA est rectangle en O (la hauteur est perpendiculaire à la base). D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SO^2 + OA^2$, donc $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 11{,}7^2 - 4{,}5^2 = 136{,}89 - 20{,}25 = 116{,}64$.
Donc $SO = \sqrt{116{,}64} = 10{,}8$ cm.

Ex. 37 **(suite)**

(c) Dans le triangle SOA rectangle en O, $[OA]$ est le côté opposé à $\widehat{OSA}$ et $[SA]$ l'hypoténuse : $\sin(\widehat{OSA}) = \frac{OA}{SA} = \frac{4{,}5}{11{,}7}$.
Donc $\widehat{OSA} = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}5}{11{,}7}\right) \approx 23°$ (calculatrice en degrés).

(d) $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 4{,}5^2 \times 10{,}8 = 72{,}9\pi$ cm³, soit $V \approx 229$ cm³.

Ex. 38 ★★☆ **Le presse-papier pyramidal**

(a) Le triangle ABC est rectangle en B (angle d'un carré). D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5{,}6^2 + 5{,}6^2 = 62{,}72$.
Donc $AC = \sqrt{62{,}72}$ cm, soit $AC \approx 7{,}9$ cm.

(b) 2,8 cm est la distance de H au milieu de $[AB]$, pas AH. H est le milieu de la diagonale $[AC]$: $AH = AC \div 2$, la demi-diagonale, et non la moitié du côté.

(c) $AH = \sqrt{62{,}72} \div 2$, donc $AH^2 = 62{,}72 \div 4 = 15{,}68$. Le triangle SHA est rectangle en H (la hauteur est perpendiculaire à la base). D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SH^2 + AH^2$, donc $SH^2 = 5{,}7^2 - 15{,}68 = 32{,}49 - 15{,}68 = 16{,}81$.
Donc $SH = \sqrt{16{,}81} = 4{,}1$ cm.

(d) Aire de la base : $5{,}6^2 = 31{,}36$ cm². $V = \frac{1}{3} \times 31{,}36 \times 4{,}1 \approx 42{,}9$ cm³.

Ex. 39 ★★☆ **La tranche de pastèque**

(a) La pastèque est pleine (une boule), donc la section est un disque de centre H. La droite (OH) est perpendiculaire au plan, donc à toute droite de ce plan passant par H, en particulier à (HM) : le triangle OHM est rectangle en H.

(b) Le rayon de la boule est $OM = 29 \div 2 = 14{,}5$ cm (pas le diamètre). Le triangle OHM est rectangle en H ; d'après le théorème de Pythagore :
$OM^2 = OH^2 + HM^2$, donc $HM^2 = 14{,}5^2 - 10^2 = 210{,}25 - 100 = 110{,}25$.
Donc $HM = \sqrt{110{,}25} = 10{,}5$ cm.

(c) Aire du disque : $\pi \times HM^2 = 110{,}25\pi$ cm², soit environ 346,4 cm².

(d) Dans le triangle OHM rectangle en H, avec $HM = 14$ cm : d'après le théorème de Pythagore, $OH^2 = OM^2 - HM^2 = 14{,}5^2 - 14^2 = 210{,}25 - 196 = 14{,}25$.
Donc $OH = \sqrt{14{,}25}$ cm, soit environ 3,8 cm : Ben doit couper à environ 3,8 cm du centre.

Ex. 40 ★★★ **L'aquarium de Lina**

(a) La face $ABFE$ est un rectangle, donc le triangle ABF est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $AF^2 = AB^2 + BF^2 = 60^2 + 32^2 = 3\,600 + 1\,024 = 4\,624$.
Donc $AF = \sqrt{4\,624} = 68$ cm.

(b) Dans un pavé droit, l'arête $[FG]$ est perpendiculaire à la face $ABFE$. Elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de cette face qui passent par F, en particulier à (AF). Le triangle AFG est donc rectangle en F. En perspective cavalière, un angle droit n'est pas toujours dessiné droit : il ne faut pas mesurer sur le dessin.

(c) Le triangle AFG est rectangle en F et $FG = AD = 40$ cm. D'après le théorème de Pythagore : $AG^2 = AF^2 + FG^2 = 4\,624 + 40^2 = 4\,624 + 1\,600 = 6\,224$. La valeur exacte est $AG = \sqrt{6\,224}$ cm, donc $AG \approx 78{,}9$ cm.

(d) Le plus long segment qui tient dans le pavé est la diagonale $[AG]$. On compare les carrés : $AG^2 = 6\,224$ et $79^2 = 6\,241$. Comme $6\,224 < 6\,241$, on a $AG < 79$ cm. La baguette ne peut donc pas tenir dans l'aquarium fermé.

(e) Dans le triangle AFG rectangle en F, $[FG]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{GAF}$ et $[AF]$ le côté adjacent.
$\tan(\widehat{GAF}) = \frac{FG}{AF} = \frac{40}{68}$, donc $\widehat{GAF} = \tan^{-1}\left(\frac{40}{68}\right) \approx 30°$ (calculatrice en mode degrés).

Ex. 41 ★★★ **Le tas de sel d'Inès**

(a) Le rayon est la moitié du diamètre : $OA = 4 \div 2 = 2$ m. Le triangle SOA est rectangle en O, car la hauteur $[SO]$ est perpendiculaire à la base. D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SO^2 + OA^2 = 2{,}1^2 + 2^2 = 4{,}41 + 4 = 8{,}41$.
Donc $SA = \sqrt{8{,}41} = 2{,}9$ m.

(b) Dans le triangle SOA rectangle en O : $\tan(\widehat{ASO}) = \frac{OA}{SO} = \frac{2}{2{,}1}$, donc $\widehat{ASO} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2{,}1}\right) \approx 43{,}6°$. La hauteur (SO) partage l'angle au sommet en deux angles égaux : $\widehat{ASB} = 2 \times \widehat{ASO} \approx 87°$. On n'arrondit pas avant de doubler : avec 44°, on trouverait 88°, ce qui est faux.

(c) Un cône coupé par un plan parallèle à sa base donne un disque, qui est une réduction de la base. Le petit cône a pour hauteur $2{,}1 - 1{,}4 = 0{,}7$ m. Le rapport de réduction est $k = \frac{0{,}7}{2{,}1} = \frac{1}{3}$. Le rayon de la section vaut $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$ m $\approx 0{,}7$ m.

(d) $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2{,}1 = 2{,}8\pi$ m³ $\approx 8{,}8$ m³.

Ex. 41 (suite)

(e) Non, cette affirmation est fausse. Le petit cône est une réduction du tas de rapport $k = \frac{1}{3}$: les volumes sont multipliés par $k^3 = \frac{1}{27}$, et non par $\frac{1}{3}$. Le petit cône a donc un volume de $\frac{2{,}8\pi}{27}$ m$^3 \approx 0{,}3$ m^3, alors que le tiers du tas représente environ 2,9 m^3.

Ex. 42 ★★★ La verrière du hall

(a) Le triangle ABC est rectangle en B, car $ABCD$ est un carré. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 8^2 = 128$, donc $AC = \sqrt{128}$ m. Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu H, donc $HA = \frac{AC}{2}$ et $HA^2 = \frac{128}{4} = 32$.

(b) La hauteur $[SH]$ est perpendiculaire à la base, donc à (HA) : le triangle SHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SH^2 + HA^2 = 7^2 + 32 = 49 + 32 = 81$.
Donc $SA = \sqrt{81} = 9$ m.

(c) Dans le triangle SHA rectangle en H, $[SH]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{SAH}$ et $[SA]$ est l'hypoténuse. $\sin(\widehat{SAH}) = \frac{SH}{SA} = \frac{7}{9}$, donc $\widehat{SAH} = \sin^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 51°$.

(d) Une pyramide coupée par un plan parallèle à sa base donne une réduction de la base : la section est un carré. Le rapport de réduction est $k = \frac{SK}{SH} = \frac{2{,}8}{7} = 0{,}4$. Le côté de la section mesure $0{,}4 \times 8 = 3{,}2$ m. Son aire vaut $3{,}2^2 = 10{,}24$ m^2 ; on peut aussi calculer $k^2 \times 64 = 0{,}16 \times 64$.

(e) La petite pyramide a pour base le carré de section, d'aire 10,24 m^2, et pour hauteur $SK = 2{,}8$ m. $V = \frac{1}{3} \times 10{,}24 \times 2{,}8 \approx 9{,}6$ m^3.

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ Automatismes : quel outil pour quelle figure ?

(a) Le triangle KLM est rectangle en L : son hypoténuse est $[KM]$. D'après le théorème de Pythagore : $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 25 + 64 = 89$, donc $KM = \sqrt{89}$ cm (valeur exacte).

(b) Le plus grand côté est $[PR]$. D'une part $PR^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$; d'autre part $PQ^2 + QR^2 = 3{,}3^2 + 5{,}6^2 = 10{,}89 + 31{,}36 = 42{,}25$. Comme $PR^2 = PQ^2 + QR^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PQR est rectangle en Q.

Ex. 43 (suite)

(c) Le triangle UVW est rectangle en V : $[UW]$ est l'hypoténuse et $[VW]$ le côté opposé à $\widehat{VUW}$. On utilise le sinus : $\sin(\widehat{VUW}) = \frac{VW}{UW}$, donc $VW = 10 \times \sin(30°) = 5$ cm.

(d) Les points P, O, R et Q, O, S sont alignés et $(PQ) \parallel (RS)$: c'est une configuration de Thalès (papillon). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OR}{OP} = \frac{OS}{OQ} = \frac{RS}{PQ}$, soit $\frac{4{,}5}{3} = \frac{RS}{3{,}4}$.
Donc $RS = \frac{4{,}5 \times 3{,}4}{3} = 5{,}1$ cm.

Ex. 44 ★☆☆ Automatismes : trigonométrie, unités et pente

(a) Le triangle EFG est rectangle en G : $[EF]$ est l'hypoténuse et $[EG]$ le côté adjacent à $\widehat{GEF}$. $\cos(\widehat{GEF}) = \frac{EG}{EF}$, donc $EG = 8 \times \cos(40°) \approx 6{,}1$ cm.

(b) Même unité d'abord : $HI = 45$ mm $= 4{,}5$ cm. Le triangle HIJ est rectangle en I : $[IJ]$ est le côté opposé à $\widehat{IHJ}$ et $[HI]$ le côté adjacent. $\tan(\widehat{IHJ}) = \frac{IJ}{HI} = \frac{8}{4{,}5}$, donc $\widehat{IHJ} = \tan^{-1}\left(\frac{8}{4{,}5}\right) \approx 60{,}6°$ (calculatrice en mode degrés).

(c) Le triangle RST est rectangle en S : $[RT]$ est l'hypoténuse et $[ST]$ le côté opposé à $\widehat{SRT}$. $\sin(\widehat{SRT}) = \frac{ST}{RT}$, donc $RT = \frac{5}{\sin(25°)} \approx 11{,}8$ cm (on divise : la longueur cherchée est en bas du quotient).

(d) Même unité : 0,3 km $= 300$ m. Pente $= \frac{21}{300} = 0{,}07$, soit une pente de 7 %.

Ex. 45 ★★☆ La voile d'ombrage d'Inès

(a) On ne mesure rien : on calcule. Le plus grand côté est $[DF]$. D'une part $DF^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$; d'autre part $DE^2 + EF^2 = 4{,}41 + 7{,}84 = 12{,}25$. Comme $DF^2 = DE^2 + EF^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en E.

(b) D'après la question précédente, DEF est rectangle en E : $[DF]$ est l'hypoténuse et $[EF]$ le côté opposé à $\widehat{EDF}$. $\sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DF} = \frac{2{,}8}{3{,}5} = 0{,}8$, donc $\widehat{EDF} = \sin^{-1}(0{,}8) \approx 53°$.

(c) Le triangle est rectangle en E, donc son aire vaut $\frac{DE \times EF}{2} = \frac{2{,}1 \times 2{,}8}{2} = 2{,}94$ m^2. Prix : $2{,}94 \times 15 = 44{,}10$ €. La toile coûte 44,10 €.

Ex. 46 ★★☆ **La rampe de la médiathèque**

(a) Même unité : $BC = 36$ cm $= 0{,}36$ m. Pente $= \frac{0{,}36}{7{,}5} = 0{,}048$, soit $4{,}8\ \%$. Comme $4{,}8\ \% \leqslant 5\ \%$, la rampe est conforme.

(b) Le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 56{,}25 + 0{,}1296 = 56{,}3796$, donc $AB = \sqrt{56{,}3796}$ m (valeur exacte) $\approx 7{,}51$ m.

(c) Même unité : $BC = 0{,}36$ m. On cherche la longueur horizontale d (en m) telle que $\frac{0{,}36}{d} = 0{,}04$.
Donc $d = \frac{0{,}36}{0{,}04} = 9$ m. Il faut une longueur horizontale de 9 m, soit 1,5 m de plus qu'aujourd'hui.

(d) On réutilise la valeur exacte de AB (pas l'arrondi 7,51) : prix $= 45 \times \sqrt{56{,}3796} \approx 337{,}89$ €. La main courante coûte environ 337,89 €.

Ex. 47 ★★★ **La tyrolienne de Yanis**

(a) La tour $[DH]$ est verticale et le sol (HA) est horizontal, donc le triangle DHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $DA^2 = DH^2 + HA^2 = 16^2 + 63^2 = 256 + 3\,969 = 4\,225$, donc $DA = \sqrt{4\,225} = 65$ m. Le câble mesure 65 m.

(b) Dans le triangle DHA rectangle en H, $[DH]$ est le côté opposé à $\widehat{DAH}$ et $[HA]$ est le côté adjacent.
$\tan(\widehat{DAH}) = \frac{DH}{HA} = \frac{16}{63}$, donc $\widehat{DAH} = \tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right) \approx 14°$ (environ $14{,}25^\circ$ avant l'arrondi). Comme $5^\circ < 14{,}25^\circ < 15^\circ$, la notice est respectée.

(c) $(MN) \perp (HA)$ et $(DH) \perp (HA)$. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(MN) \parallel (DH)$. Les points A, N, H et A, M, D sont alignés et $(MN) \parallel (DH)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AN}{AH} = \frac{AM}{AD} = \frac{MN}{HD}$, soit $\frac{21}{63} = \frac{MN}{16}$.
Donc $MN = \frac{21 \times 16}{63} = \frac{16}{3}$ m (valeur exacte), soit $MN \approx 5{,}33$ m. Le poteau mesure environ 5,33 m.

(d) On reprend la valeur exacte $DA = 65$ m. Longueur achetée : $65 + 4 = 69$ m. Prix : $69 \times 12{,}50 = 862{,}50$ €. Le câble coûte 862,50 €.

Ex. 48 ★★★ **Le toit de l'abri de Clémence**

(a) On convertit : $TU = 320$ cm $= 3{,}2$ m. Le plus long côté est $[TV]$. D'une part, $TV^2 = 6{,}8^2 = 46{,}24$. D'autre part, $TU^2 + UV^2 = 3{,}2^2 + 6^2 = 10{,}24 + 36 = 46{,}24$. On a $TV^2 = TU^2 + UV^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TUV est rectangle en U. Clémence a raison : $(TU) \perp (UV)$.

Ex. 48 (suite)

(b) Le triangle TUV est rectangle en U (question précédente) : $[TV]$ est l'hypoténuse et $[UV]$ le côté adjacent à $\widehat{TVU}$. $\cos(\widehat{TVU}) = \frac{UV}{TV} = \frac{6}{6{,}8}$, donc $\widehat{TVU} = \cos^{-1}\left(\frac{6}{6{,}8}\right) \approx 28{,}1°$ (calculatrice en mode degrés). Comme $28{,}1° \geqslant 25°$, l'abri convient.

(c) Les points V, K, T et V, L, U sont alignés dans le même ordre. D'une part, $\frac{VK}{VT} = \frac{2{,}55}{6{,}8} = 0{,}375$. D'autre part, $\frac{VL}{VU} = \frac{2{,}25}{6} = 0{,}375$. Les deux rapports sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(KL) \parallel (TU)$. Oui, les droites sont parallèles.

(d) Les points V, K, T et V, L, U sont alignés et $(KL) \parallel (TU)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{VK}{VT} = \frac{VL}{VU} = \frac{KL}{TU}$, soit $0{,}375 = \frac{KL}{3{,}2}$.
Donc $KL = 0{,}375 \times 3{,}2 = 1{,}2$ m. La jambe de force mesure 1,2 m.

(e) Aire d'un rectangle : longueur × largeur. $\mathcal{A} = TV \times 4{,}5 = 6{,}8 \times 4{,}5 = 30{,}6$ m². Le pan du toit mesure 30,6 m².

Ex. 49 ★★★ **La verrière du musée**

(a) $ABCD$ est un carré, donc le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 64 = 128$, donc $AC = \sqrt{128}$ m (valeur exacte), soit $AC \approx 11{,}31$ m.

(b) H est le milieu de la diagonale $[AC]$, donc $AH = \frac{\sqrt{128}}{2}$ et $AH^2 = \frac{128}{4} = 32$. La hauteur $[SH]$ est perpendiculaire à la base, donc le triangle SHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SH^2 + AH^2 = 49 + 32 = 81$, donc $SA = \sqrt{81} = 9$ m. Une arête mesure 9 m.

(c) Noé a arrondi un résultat intermédiaire puis l'a réutilisé : $SA^2 = 49 + 5{,}5^2 = 79{,}25$ donne $SA \approx 8{,}9$ m, ce qui est faux. Il faut garder la valeur exacte $AH^2 = 32$: on obtient $SA^2 = 81$, donc $SA = 9$ m exactement. On n'arrondit que la réponse finale.

(d) Dans le triangle SHA rectangle en H, $[SH]$ est le côté opposé à $\widehat{SAH}$ et $[SA]$ est l'hypoténuse. $\sin(\widehat{SAH}) = \frac{SH}{SA} = \frac{7}{9}$, donc $\widehat{SAH} = \sin^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 51°$. L'arête fait un angle d'environ 51° avec le sol.

(e) On convertit : $SA' = 300$ cm $= 3$ m. La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une réduction de la base, de rapport $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
Donc $A'B' = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}$ m, et l'aire vaut $\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$ m², soit environ 7,11 m².