1. Carré et cube d'un nombre : entiers et décimaux

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : carrés et cubes d'entiers**

(a) $9^2 = 9 \times 9 = 81$

(b) $9 \times 2 = 18$ (ce n'est pas 9^2)

(c) $1^2 = 1 \times 1 = 1$

(d) $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(e) $0^2 = 0 \times 0 = 0$

(f) $10^2 = 10 \times 10 = 100$ (2 zéros)

(g) $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ (3 zéros)

(h) $12^2 = 12 \times 12 = 144$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : carrés et cubes de décimaux**

(a) $4 \times 4 = 16$, 2 chiffres après la virgule : $0{,}4^2 = 0{,}16$

(b) $8 \times 8 = 64$, 2 chiffres après la virgule : $0{,}8^2 = 0{,}64$ (et non 1,6)

(c) $5 \times 5 = 25$, 4 chiffres après la virgule : $0{,}05^2 = 0{,}0025$

(d) $25 \times 25 = 625$, 2 chiffres après la virgule : $2{,}5^2 = 6{,}25$

(e) $12 \times 12 \times 12 = 1\,728$, 3 chiffres après la virgule : $1{,}2^3 = 1{,}728$

(f) $6 \times 6 \times 6 = 216$, 3 chiffres après la virgule : $0{,}6^3 = 0{,}216$

(g) $31 \times 31 = 961$, 2 chiffres après la virgule : $3{,}1^2 = 9{,}61$

(h) $2 \times 2 = 4$, 4 chiffres après la virgule : $0{,}02^2 = 0{,}0004$

Ex. 3 ★★☆ **Tableau des carrés et des cubes**

(a) $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$.

a	**5**	**6**	**8**	**9**
a^2	25	36	64	81

(b) $5^3 = 25 \times 5 = 125$; $6^3 = 36 \times 6 = 216$; $8^3 = 64 \times 8 = 512$; $9^3 = 81 \times 9 = 729$.

a	**5**	**6**	**8**	**9**
a^3	125	216	512	729

(c) $8^3 = 512$, et 512 est compris entre 500 et 600. C'est donc le nombre 8.

Ex. 4 ★★☆ **Retrouver le nombre de départ**

(a) $11 \times 11 = 121$, donc $121 = 11^2$. Le nombre cherché est 11.

(b) $7 \times 7 = 49$ et $49 \times 7 = 343$, donc $343 = 7^3$. Le nombre cherché est 7.

(c) $6 \times 6 = 36$ et il faut 4 chiffres après la virgule : $0{,}06^2 = 0{,}0036$ (et pas 0,6, car $0{,}6^2 = 0{,}36$). Le nombre cherché est 0,06.

(d) $5 \times 5 \times 5 = 125$ et il faut 3 chiffres après la virgule : $0{,}5^3 = 0{,}125$. Le nombre cherché est 0,5.

Ex. 5 ★★☆ **Les erreurs d'Hugo**

(a) Hugo a calculé 8×2. Or $8^2 = 8 \times 8 = 64$.

(b) Hugo a écrit l'exposant à côté de la base. Or $6^2 = 6 \times 6 = 36$.

(c) Hugo a calculé 5×3. Or $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

(d) Hugo a calculé $0{,}2 \times 2$. Or $2 \times 2 = 4$ avec 2 chiffres après la virgule, donc $0{,}2^2 = 0{,}04$.

(e) Hugo n'a pas mis assez de chiffres après la virgule. Il en faut 3 : $0{,}1^3 = 0{,}001$.

Ex. 6 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux : $3^2 = 3 \times 3 = 9$ et $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. On ne peut pas échanger la base et l'exposant.

(b) Vrai : $5^2 = 25$ et $3^3 = 27$, et $25 < 27$.

(c) Faux : $0{,}7^2 = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$ et $0{,}49 < 0{,}7$. Entre 0 et 1, le carré est plus petit que le nombre.

(d) Faux : $4 \times 4 \times 4 = 64$ avec 3 chiffres après la virgule, donc $0{,}4^3 = 0{,}064$.

(e) Faux : la base est 5 (le nombre multiplié) et l'exposant est 3 (le nombre de facteurs).

Ex. 7 ★★☆ **L'aquarium cubique de Maëlys**

(a) $V = 30^3 = 30 \times 30 \times 30 = 27\,000$. Le volume est de $27\,000$ cm^3.

(b) $27\,000 \div 1\,000 = 27$. L'aquarium contient au maximum 27 L.

(c) Le fond est un carré de 30 cm de côté : $30^2 = 900$. Son aire est de 900 cm^2.

Ex. 7 **(suite)**

(d) L'arête mesure 60 cm : $60^3 = 216\,000$, soit 216 000 cm^3. Et $216\,000 \div 27\,000 = 8$: le volume est 8 fois plus grand ($2^3 = 8$).

Ex. 8 ★★★ **Le carnet de défis de Lina**

(a) « Quatre au carré » s'écrit $4^2 = 4 \times 4 = 16$ (et pas $4 \times 2 = 8$, ni 42). « Trois au cube » s'écrit $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$ (et pas $3 \times 3 = 9$).

(b) $10^3 = 1\,000$ (3 zéros) et $32^2 = 32 \times 32 = 1\,024$, donc $10^3 < 32^2$. Puis $14^2 = 14 \times 14 = 196$ et $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216$, donc $14^2 < 6^3$.

(c) $1{,}4^2 = 1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$ et $1{,}96 > 1{,}4$: ici, ça marche. Mais $0{,}5^2 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ (et pas $0{,}5 \times 2 = 1$), et $0{,}25 < 0{,}5$. Lina a tort : le carré d'un nombre compris entre 0 et 1 est plus petit que ce nombre.

(d) $0{,}9^2 = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$ et $0{,}9^3 = 0{,}81 \times 0{,}9 = 0{,}729$. Donc $0{,}9^3 < 0{,}9^2 < 0{,}9$, soit $0{,}729 < 0{,}81 < 0{,}9$.

(e) $0^2 = 0 \times 0 = 0$ et $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$; $1^2 = 1 \times 1 = 1$ et $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$. Les nombres 0 et 1 sont égaux à leur carré et à leur cube.

Ex. 9 ★★★ **La terrasse d'Ilyès**

(a) $6^2 = 6 \times 6 = 36$. La terrasse a une aire de 36 m^2.

(b) $0{,}6^2 = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$ (je calcule $6 \times 6 = 36$ et je place 2 chiffres après la virgule ; ce n'est ni 1,2 ni 3,6). Un carreau a une aire de 0,36 m^2.

(c) $6 \div 0{,}6 = 10$: il faut 10 carreaux par côté. En tout : $10^2 = 10 \times 10 = 100$ carreaux. Vérification : $100 \times 0{,}36 = 36$ m^2.

(d) $100 \times 4{,}50 = 450$. Les carreaux coûtent 450 €.

(e) Doubler le côté multiplie l'aire par $2^2 = 4$. Vérification : le côté vaut 12 m et $12^2 = 144$ m^2 ; or $36 \times 4 = 144$. L'aire du voisin est 4 fois plus grande.

Ex. 10 ★★★ **Le jeu de cubes de Sacha**

(a) $15^2 = 225$, puis $15^3 = 225 \times 15 = 3\,375$. La boîte a un volume de 3 375 cm^3.

(b) $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$. Un petit cube a un volume de 27 cm^3.

(c) $15 \div 3 = 5$: 5 cubes par arête. En tout : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ cubes. Vérification : $125 \times 27 = 3\,375$ cm^3, c'est bien le volume de la boîte.

Ex. 10 **(suite)**

(d) $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 81 \times 9 = 729$ cm^3 et $729 \div 27 = 27$. Sacha a tort : l'arête est 3 fois plus grande, mais le volume est 27 fois plus grand ($3^3 = 27$), pas 3 fois.

(e) $0{,}8^3 = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8$: je calcule $8 \times 8 \times 8 = 512$ et je place 3 chiffres après la virgule. Son volume vaut 0,512 cm^3, et $0{,}512 < 0{,}8$.

2. *Carrés parfaits, cubes : écrire un nombre comme un carré ou un cube*

Ex. 11 ★☆☆ **Automatismes : écrire comme un carré**

(a) $225 = 15^2$ (b) $36 = 6^2$ (c) $144 = 12^2$

(d) $100 = 10^2$ (e) $169 = 13^2$ (f) $1 = 1^2$

Ex. 12 ★☆☆ **Automatismes : retrouver un nombre à partir de son carré (décimaux)**

(a) 1,1, car $1{,}1^2 = 1{,}21$

(b) 0,4, car $0{,}4^2 = 0{,}16$

(c) 0,09, car $0{,}09^2 = 0{,}0081$

(d) 0,7, car $0{,}7^2 = 0{,}49$

(e) 2,5, car $2{,}5^2 = 6{,}25$

(f) 0,2, car $0{,}2^2 = 0{,}04$

Ex. 13 ★★☆ **Tableau de cubes dans les deux sens**

(a) $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$. Le cube de 5 est 125.

(b) Je pense à $27 = 3^3$. Vérification : $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$, puis $0{,}09 \times 0{,}3 = 0{,}027$. Le nombre cherché est 0,3 (et non 0,03).

(c) $0{,}4^3 = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16 \times 0{,}4 = 0{,}064$. Le cube de 0,4 est 0,064.

(d) Je pense à $8 = 2^3$ et $1\,000 = 10^3$. Vérification : $20^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8\,000$. Le nombre cherché est 20.

Ex. 14 ★★☆ **Vrai ou faux : carrés parfaits**

(a) Faux. Un carré parfait ne se termine jamais par 7. D'ailleurs $9^2 = 81$ et $10^2 = 100$: aucun carré d'entier ne tombe entre les deux.

(b) Faux. 26 se termine par 6, mais $5^2 = 25$ et $6^2 = 36$: 26 n'est pas un carré parfait. Se terminer par 6 ne suffit pas.

(c) Faux. $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$: aucun carré d'entier n'est égal à 51. Se terminer par 1 ne suffit pas.

(d) Vrai. $50^2 = 50 \times 50 = 2\,500$. Donc 2 500 est un carré parfait.

Ex. 15 ★★☆ **Erreurs d'élèves à corriger**

(a) Tom a pris la moitié de 64. Or $32^2 = 1\,024$. Dans la table, $8^2 = 64$: le nombre cherché est 8.

(b) $0{,}03^2 = 0{,}0009$, pas 0,09. Comme $0{,}3^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$, 0,09 est le carré de 0,3.

(c) Hugo a multiplié 72 par 3 au lieu de multiplier un nombre trois fois par lui-même. Or $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216$.
Donc $216 = 6^3$.

Ex. 16 ★★☆ **Écarts et encadrements**

(a) $121 - 100 = 21$; $144 - 121 = 23$; $169 - 144 = 25$. Ce sont bien des nombres impairs qui se suivent.

(b) L'écart entre 14^2 et 15^2 est $225 - 196 = 29$. L'écart suivant est le nombre impair suivant, 31.
Donc $16^2 = 225 + 31 = 256$.

(c) $81 < 90 < 100$, c'est-à-dire $9^2 < 90 < 10^2$.

(d) $100 < 110 < 121$, c'est-à-dire $10^2 < 110 < 11^2$.

Ex. 17 ★★☆ **Retrouver un côté ou une arête**

(a) $20^2 = 20 \times 20 = 400$. Le côté du carreau mesure 20 cm.

(b) $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. L'arête du dé mesure 3 cm.

(c) Je pense à $125 = 5^3$. Vérification :
$0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$. L'arête de l'aquarium mesure 0,5 m.

(d) Je pense à $196 = 14^2$. Vérification : $1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$. Le côté de la nappe mesure 1,4 m.

Ex. 18 ★★★ **Enquête sur les carrés parfaits**

(a) Les derniers chiffres sont : 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Le dernier chiffre d'un carré ne dépend que du dernier chiffre du nombre de départ, donc c'est toujours l'un de ces chiffres. On n'obtient jamais 2, 3, 7 ni 8 : un carré parfait ne se termine jamais par ces chiffres.

(b) 1 387 se termine par 7 et 5 942 se termine par 2. D'après la première question, un carré parfait ne se termine jamais par 7 ni par 2.
Donc aucun de ces deux nombres n'est un carré parfait.

(c) 902 se termine par 2 : d'après la première question, ce n'est pas un carré parfait. Autre façon :
$31^2 = 31 \times 31 = 961$. Le carré parfait qui suit 900 est donc 961, et non 902 : Paul se trompe.

Ex. 18 **(suite)**

(d) $30^2 = 900$ et $31^2 = 961$. L'écart vaut $961 - 900 = 61$, un nombre impair. Les entiers strictement compris sont 901, 902, …, 960 : il y en a $960 - 900 = 60$. Comme 30 et 31 se suivent, aucun entier n'a son carré entre 900 et 961 : aucun de ces 60 nombres n'est un carré parfait.

Ex. 19 ★★★ **À la fois carré et cube ?**

(a) Les carrés parfaits entre 50 et 100 sont $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$. Les cubes d'entiers : $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$; seul 64 est entre 50 et 100.
Donc 64 convient : $64 = 8^2 = 4^3$.

(b) $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 81 \times 9 = 729$. Il se termine par 9, donc on essaie un nombre qui se termine par 3 ou 7 : $23^2 = 529$ ne convient pas, mais $27^2 = 729$.
Donc $729 = 27^2 = 9^3$: c'est à la fois un carré et un cube.

(c) $100^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1\,000\,000$: la première partie est exacte. Mais $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$, donc $1\,000\,000 = 1\,000^2$: c'est aussi un carré parfait. La deuxième partie est fausse.

(d) Jade n'a pas vérifié : $0{,}07^3 = 0{,}07 \times 0{,}07 \times 0{,}07 = 0{,}000\,343$, et non 0,343. Avec 0,7 : $0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49 \times 0{,}7 = 0{,}343$. Le nombre qui a pour cube 0,343 est donc 0,7.

Ex. 20 ★★★ **Le potager de Romane**

(a) Ce n'est pas la moitié de 121 : on cherche un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 121. Dans la table, $11^2 = 11 \times 11 = 121$ ✓. Le côté du potager mesure 11 m.

(b) Périmètre : $4 \times 11 = 44$ m. Prix : $44 \times 12 = 528$.
Romane paie 528 €.

(c) Je pense à $256 = 16^2$: le côté mesure 1,6 m.
Vérification : $1{,}6 \times 1{,}6 = 2{,}56$ ✓. Le côté du bac mesure 1,6 m.

(d) Je pense à $64 = 8^2$: le côté mesure 0,8 m, car $0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$ ✓. Attention : $0{,}08^2 = 0{,}006\,4$, donc 0,08 ne convient pas. Le côté d'une dalle mesure 0,8 m, c'est-à-dire 80 cm.

3. *Calculer une expression avec des puissances et des priorités*

Ex. 21 ★☆☆ Automatismes : la puissance d'abord

(a) $6 + 9 = 15$

(b) $3 \times 64 = 192$ (et non 24^2)

(c) $20 - 9 = 11$

(d) $25 - 1 = 24$

(e) $2 \times 27 = 54$

(f) $1 + 1\,000 = 1\,001$

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : parenthèses ou pas ?

(a) $8^2 = 64$ (b) $4 + 36 = 40$ (c) $4 \times 9 = 36$

(d) $12^2 = 144$ (e) $36 - 16 = 20$ (f) $2^2 = 4$

Ex. 23 ★☆☆ Quotients et décimaux

(a) $0{,}16 \times 5 = 0{,}8$ (b) $81 \div 3 = 27$

(c) $100 \div 25 = 4$ (d) $0{,}125 \times 8 = 1$

(e) $36 \div 4 = 9$ (f) $0{,}64 + 0{,}36 = 1$

Ex. 24 ★★☆ Calculer en écrivant les étapes

(a) $A = 2 \times 5^2 - 3^3$; $A = 2 \times 25 - 27$; $A = 50 - 27$; $A = 23$.
Donc $A = 23$.

(b) $B = 10^3 \div 5^2 + 4^2$; $B = 1\,000 \div 25 + 16$; $B = 40 + 16$; $B = 56$.
Donc $B = 56$.

(c) $C = 100 - (1 + 2^2)^2$; $C = 100 - (1 + 4)^2$; $C = 100 - 5^2$; $C = 100 - 25$; $C = 75$.
Donc $C = 75$.

(d) $D = 9 + 6 \times 0{,}25$; $D = 9 + 1{,}5$; $D = 10{,}5$.
Donc $D = 10{,}5$.

Ex. 25 ★★☆ Repérer et corriger les erreurs

(a) Elle a additionné $4 + 2$ avant de faire la multiplication. Ensuite elle a calculé 6×3 avant le carré. Il fallait d'abord calculer 3^2.

(b) $E = 4 + 2 \times 9$; $E = 4 + 18$; $E = 22$.
Donc $E = 22$, et non 324.

(c) Non. On calcule d'abord la parenthèse : $(1 + 5)^2 = 6^2 = 36$. Or $1^2 + 5^2 = 26$. Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés.

(d) Faux. $5 \times 4^2 = 5 \times 16 = 80$, alors que $20^2 = 400$. L'exposant ne porte que sur le 4.

Ex. 26 ★★☆ Une lettre, plusieurs valeurs

(a)

x	1	5	10	0,2
$3x^2$	3	75	300	0,12
$(3x)^2$	9	225	900	0,36
$x^2 + x$	2	30	110	0,24

(b) $3x^2 = 3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$: le carré ne porte que sur x. $(3x)^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 225$: le carré porte sur toute la parenthèse. Les résultats sont donc différents.

(c) $E = 6^3 + 2 \times 6$; $E = 216 + 12$; $E = 228$. Pour $x = 6$, l'expression vaut 228.

Ex. 27 ★★☆ La pelouse et le bassin

(a) L'aire de la pelouse moins l'aire du bassin : $9^2 - 3^2$.

(b) $9^2 - 3^2 = 81 - 9 = 72$. L'aire sans le bassin est 72 m^2.

(c) Non. $(9 - 3)^2 = 6^2 = 36$, alors que l'aire vaut 72 m^2. $9^2 - 3^2$ n'est pas égal à $(9 - 3)^2$.

(d) Prix $= 4 \times (9^2 - 3^2)$; $= 4 \times (81 - 9)$; $= 4 \times 72$; $= 288$. Le gazon coûte 288 €.

Ex. 28 ★★★ Vrai ou faux avec des puissances

(a) $10^2 \div 5 \times 2 = 100 \div 5 \times 2 = 20 \times 2 = 40$. $40 \neq 10$: c'est faux. Après la puissance, on fait $\div$ et $\times$ de gauche à droite, on ne calcule pas 5×2 d'abord.

(b) $9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17$ et $9 + 8 = 17$. Les deux valent 17 : c'est vrai.

(c) $0{,}05^2 = 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0025$, puis $0{,}0025 \times 400 = 1$. C'est vrai.

(d) $8^2 \div 4 = 64 \div 4 = 16$ et $2^2 \times 4 = 4 \times 4 = 16$. Les deux valent 16 : c'est vrai.

(e) Avec $a = 3$ et $b = 4$: $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$ et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; $49 - 25 = 24$. Les nombres 3 et 4 conviennent
(2 et 6 conviennent aussi).

Ex. 29 ★★★ Le cahier de Hugo

(a) La première étape est fausse : Hugo a calculé $2 + 3 = 5$ avant la multiplication. Dans la parenthèse, il faut d'abord calculer $3 \times 2 = 6$, puis $2 + 6 = 8$. Il trouverait 37,5 au lieu du bon résultat.

(b) $B = 50 - (2 + 3 \times 2)^2 \div 8$; $B = 50 - (2 + 6)^2 \div 8$; $B = 50 - 8^2 \div 8$; $B = 50 - 64 \div 8$; $B = 50 - 8$; $B = 42$.
Donc $B = 42$.

Ex. 29 **(suite)**

(c) Sans parenthèses, on trouve $1 + 9 \times 4 = 37$. Avec $(1 + 3^2) \times 4 = (1 + 9) \times 4 = 10 \times 4 = 40$.

(d) $(1 + 3)^2 \times 4 = 4^2 \times 4 = 16 \times 4 = 64$. L'exposant porte ici sur toute la parenthèse.

(e) On remonte les étapes : $112 - 4 = 108$; $108 \div 3 = 36$; $36 = 6^2$. Le nombre est 6. Vérification : $3 \times 6^2 + 4 = 3 \times 36 + 4 = 108 + 4 = 112$.

Ex. 30 ★★★ **La boîte de dés de Sacha**

(a) $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Un dé a un volume de 27 cm^3.

(b) $15^3 = 15 \times 15 \times 15 = 3\,375$. La boîte a un volume de 3 375 cm^3.

(c) $3\,375 \div 27 = 125$. On peut aussi dire : $15 \div 3 = 5$ dés sur chaque arête, donc $5^3 = 125$ dés. Il faut 125 dés.

(d) Nouvelle arête : 30 cm, donc un volume de $30^3 = 27\,000$ cm^3. Nombre de dés : $27\,000 \div 27 = 1\,000$. Et $1\,000 \div 125 = 8$: il faut 8 fois plus de dés, pas 2 fois plus. Sacha a tort.

(e) $6 \times 15^2 = 6 \times 225 = 1\,350$. L'aire peinte est de 1 350 cm^2. L'ami trouve $90^2 = 8\,100$: il a multiplié avant de calculer le carré, alors que l'exposant ne porte que sur 15.

4. *Avec une lettre : x^2, $2x^2$, $(2x)^2$*

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : le signe × caché**

(a) $5x^2 = 5 \times x^2$: le carré ne porte que sur x.

(b) $(4x)^2 = (4 \times x)^2$: le carré porte sur toute la parenthèse.

(c) $6x^3 = 6 \times x \times x \times x$.

(d) $x^2 + 7x = x \times x + 7 \times x$.

(e) $3 \times x \times x = 3x^2$.

(f) $x \times x \times x + x = x^3 + x$.

Ex. 32 ★☆☆ **Automatismes : calculs pour x = 6**

(a) $x^2 = 6^2 = 36$

(b) $2x = 2 \times 6 = 12$

(c) $2x^2 = 2 \times 36 = 72$

(d) $(2x)^2 = 12^2 = 144$

(e) $x^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$

(f) $x^2 + x = 36 + 6 = 42$

Ex. 33 ★★☆ **Un tableau pour tester une égalité**

(a) $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3{,}5^2 = 12{,}25$.

x	0	1	2	3,5
x^2	0	1	4	12,25
$x + 2$				

(b) $0 + 2 = 2$; $1 + 2 = 3$; $2 + 2 = 4$; $3{,}5 + 2 = 5{,}5$.

x	0	1	2	3,5
x^2	0	1	4	12,25
$x + 2$	2	3	4	5,5

(c) On compare les deux lignes : seule la colonne $x = 2$ donne la même valeur ($4 = 4$). L'égalité est vraie seulement pour $x = 2$ dans ce tableau.

(d) Pour $x = 3{,}5$: $x^2 = 12{,}25$ et $x + 2 = 5{,}5$. Or $12{,}25 > 5{,}5$. C'est faux : x^2 est plus grand.

Ex. 34 ★★☆ **Avec un décimal, étape par étape**

(a) $A = 0{,}5^3$; $A = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$; $A = 0{,}125$. Pour $x = 0{,}5$, A vaut 0,125.

(b) $B = 8 \times 0{,}5^2$; $B = 8 \times 0{,}25$; $B = 2$. On calcule le carré avant le produit : $B = 2$.

(c) $C = (8 \times 0{,}5)^2$; $C = 4^2$; $C = 16$. On calcule d'abord la parenthèse : $C = 16$.

(d) $D = 0{,}5^2 + 0{,}5$; $D = 0{,}25 + 0{,}5$; $D = 0{,}75$. Pour $x = 0{,}5$, D vaut 0,75.

(e) $E = 10 \times 0{,}5^3 + 0{,}5$; $E = 10 \times 0{,}125 + 0{,}5$; $E = 1{,}25 + 0{,}5$; $E = 1{,}75$. Pour $x = 0{,}5$, E vaut 1,75.

Ex. 35 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Pour $x = 2$, on a bien $2^2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$. Mais pour $x = 5$: $x^2 = 25$ et $2x = 10$. Un seul exemple ne suffit pas : c'est faux.

(b) $3x^2 = 3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$. C'est faux : 900 est la valeur de $(3x)^2 = 30^2$.

(c) $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ et $1^2 = 1 \times 1 = 1$. C'est vrai.

(d) $0{,}4^2 = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$ et $0{,}16 < 0{,}4$. C'est faux : ici, x^2 est plus petit que x.

Ex. 36 ★★☆ **Les erreurs de Noé**

(a) Noé a calculé $(5x)^2$: le carré ne porte que sur x. $5x^2 = 5 \times 9^2$; $5x^2 = 5 \times 81$; $5x^2 = 405$.

(b) Le carré porte sur toute la parenthèse : on la calcule d'abord. $(2x)^2 = (2 \times 9)^2$; $(2x)^2 = 18^2$; $(2x)^2 = 324$.

Ex. 36 **(suite)**

(c) Noé a additionné avant de multiplier. $x \times x + x = 9 \times 9 + 9$; $x \times x + x = 81 + 9$; $x \times x + x = 90$.

(d) Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés. $(x+1)^2 = (9+1)^2$; $(x+1)^2 = 10^2$; $(x+1)^2 = 100$.

Ex. 37 ★★☆ **Le potager de Sami**

(a) Aire $= 8^2 = 64$. Le potager actuel mesure 64 m^2.

(b) Le côté devient $8 + 1 = 9$ m. Aire $= (8+1)^2 = 9^2 = 81$. Le potager agrandi mesure 81 m^2.

(c) $x^2 + 1 = 64 + 1 = 65$, mais $(x+1)^2 = 81$. L'aire augmente de $81 - 64 = 17$ m^2. Sami a tort : cet exemple suffit à le montrer.

(d) $(0+1)^2 = 1^2 = 1$ et $0^2 + 1 = 1$: les deux valeurs sont égales. Mais un seul exemple ne prouve pas qu'une égalité est toujours vraie, et pour $x = 8$ elle est fausse.

Ex. 38 ★★★ **Le double, le carré, le carré du double**

(a) $A = 2 \times x^2$ et $B = (2 \times x)^2$. $A = 2 \times 2{,}5^2$; $A = 2 \times 6{,}25$; $A = 12{,}5$. $B = (2 \times 2{,}5)^2$; $B = 5^2$; $B = 25$. $C = 4 \times 2{,}5 \times 2{,}5$; $C = 10 \times 2{,}5$; $C = 25$. Pour $x = 2{,}5$, on a donc $B = C$, mais A est différent de B.

(b)

x	0,1	4	10
$2x^2$	0,02	32	200
$(2x)^2$	0,04	64	400

Par exemple, pour $x = 4$: $2 \times 4^2 = 2 \times 16 = 32$ et $(2 \times 4)^2 = 8^2 = 64$.

(c) Dans le tableau : $0{,}04 = 2 \times 0{,}02$, $64 = 2 \times 32$ et $400 = 2 \times 200$. En général, $(2x)^2 = 2x \times 2x = 2 \times 2 \times x \times x = 4 \times x^2$, et $4 \times x^2 = 2 \times (2 \times x^2)$. Elsa a raison : $(2x)^2$ est toujours le double de $2x^2$.

(d) $2 \times x^2 = 242$, donc $x^2 = 242 \div 2 = 121$. Dans la table, $11^2 = 121$. Vérification : $2 \times 11^2 = 2 \times 121 = 242$. Gaspard a choisi $x = 11$.

(e) D'après la question précédente, $(2x)^2$ est le double de $2x^2$.
Donc $(2x)^2 = 2 \times 242 = 484$. Vérification : $(2 \times 11)^2 = 22^2 = 484$.
Donc $(2x)^2 = 484$.

Ex. 39 ★★★ **Le nombre magique de Malik**

(a) $x \times x = x^2$, donc $M = x^2 + x$. $M = 12^2 + 12$; $M = 144 + 12$; $M = 156$. Pour $x = 12$, Malik obtient 156.

Ex. 39 **(suite)**

(b) $M = 0{,}7^2 + 0{,}7$; $M = 0{,}49 + 0{,}7$; $M = 1{,}19$. $x^3 = 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7$; $x^3 = 0{,}49 \times 0{,}7$; $x^3 = 0{,}343$.
Donc $M = 1{,}19$ et $x^3 = 0{,}343$.

(c) Malik a confondu x^2 et $2x$: 5^2 veut dire 5×5, pas 2×5. Bon calcul : $M = 5^2 + 5$; $M = 25 + 5$; $M = 30$.

(d) Pour $x = 3$: $3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$ et $3 \times (3+1) = 3 \times 4 = 12$. Pour $x = 5$: $5^2 + 5 = 30$ et $5 \times (5+1) = 5 \times 6 = 30$. Dans les deux cas, on trouve le même résultat : Léa a raison pour ces deux valeurs.

(e) $M = 99 \times (99+1)$; $M = 99 \times 100$; $M = 9\,900$.
Vérification : $99^2 + 99 = 9\,801 + 99 = 9\,900$. Pour $x = 99$, on obtient $M = 9\,900$.

Ex. 40 ★★★ **Les cubes en bois de Clémence**

(a) $6x^2 = 6 \times x^2$. Pour $x = 2$: $6 \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$, alors que $(6 \times 2)^2 = 12^2 = 144$. Comme 24 n'est pas égal à 144, $6x^2$ et $(6x)^2$ ne sont pas égaux.

(b)

x	3	5	6	10
x^3	27	125	216	1 000
$6x^2$	54	150	216	600

Par exemple, pour $x = 5$: $5^3 = 125$ et $6 \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$.

(c) Pour $x = 6$, on trouve 216 dans les deux cas. Pour $x = 3$ et $x = 5$, c'est $6x^2$ le plus grand ($54 > 27$ et $150 > 125$). Pour $x = 10$, c'est x^3 le plus grand ($1\,000 > 600$).

(d) Prenons $x = 3$: le volume vaut $3^3 = 27$ cm^3. Si on double l'arête, elle mesure 6 cm et le volume vaut $6^3 = 216$ cm^3. Or $2 \times 27 = 54$, et 216 n'est pas égal à 54 : Zoé se trompe. Ici, le volume est multiplié par 8 ($8 \times 27 = 216$).

(e) Volume d'un cube : $5^3 = 125$ cm^3. $1\,000 \div 125 = 8$. Clémence peut fabriquer au plus 8 cubes d'arête 5 cm.

5. *Aires et volumes : carrés, cubes, unités*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : aire d'un carré**

(a) $14^2 = 14 \times 14 = 196$, donc l'aire vaut 196 cm^2.

(b) $0{,}4^2 = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$, donc l'aire vaut 0,16 m^2.

(c) $2{,}5^2 = 2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25$, donc l'aire vaut 6,25 cm^2.

(d) $20^2 = 20 \times 20 = 400$, donc l'aire vaut 400 mm^2.

(e) $0{,}8^2 = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$, donc l'aire vaut 0,64 dm^2.

Ex. 41 (suite)

(f) $0{,}05^2 = 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0025$, donc l'aire vaut $0{,}0025$ m^2.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : volume d'un cube**

(a) $8^3 = 8^2 \times 8 = 64 \times 8 = 512$, donc le volume vaut 512 cm^3.

(b) $1{,}2^3 = 1{,}44 \times 1{,}2 = 1{,}728$, donc le volume vaut $1{,}728$ cm^3.

(c) $0{,}1^3 = 0{,}01 \times 0{,}1 = 0{,}001$, donc le volume vaut $0{,}001$ m^3.

(d) $2{,}2^3 = 4{,}84 \times 2{,}2 = 10{,}648$, donc le volume vaut $10{,}648$ m^3.

(e) $20^3 = 400 \times 20 = 8\,000$, donc le volume vaut $8\,000$ dm^3.

(f) $15^3 = 225 \times 15 = 3\,375$, donc le volume vaut $3\,375$ mm^3.

Ex. 43 ★☆☆ **À rebours : retrouver le côté ou l'arête**

(a) $9 \times 9 = 81$: le côté mesure 9 cm.

(b) $5 \times 5 \times 5 = 125$: l'arête mesure 5 cm.

(c) $12 \times 12 = 144$: le nombre cherché est 12.

(d) $6 \times 6 \times 6 = 216$, donc $0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}216$: l'arête mesure 0,6 m.

(e) $11 \times 11 = 121$, donc $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$: $1{,}21 = 1{,}1^2$.

(f) $5 \times 5 = 25$, donc $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$: le côté mesure 0,5 dm.

Ex. 44 ★★☆ **Périmètre ou aire ?**

(a) Périmètre : $4 \times 17 = 68$, soit 68 m. Aire : $17^2 = 289$, soit 289 m^2. Le potager a un périmètre de 68 m et une aire de 289 m^2.

(b) Périmètre : $4 \times 4 = 16$, soit 16 cm : c'est juste. Aire : $4^2 = 16$, mais l'unité est cm^2. Les deux mesures ont la même valeur, mais pas la même unité : l'aire vaut 16 cm^2.

(c) Côté : $52 \div 4 = 13$, soit 13 cm. Aire : $13^2 = 169$. Le carré a une aire de 169 cm^2.

(d) Faux. Prenons un carré de 3 cm de côté : son périmètre vaut $4 \times 3 = 12$ cm, son aire $3^2 = 9$ cm^2. Ici, 9 est plus petit que 12 : l'affirmation est donc fausse.

Ex. 45 ★★☆ **Doubler, tripler : l'effet sur l'aire et le volume**

(a) $8^2 = 64$ et $16^2 = 256$. Or $256 = 4 \times 64$. Elle a tort : l'aire est multipliée par 4, pas par 2.

(b) $3^3 = 27$ et $6^3 = 216$, soit 27 cm^3 et 216 cm^3. Or $216 \div 27 = 8$: le volume est multiplié par 8.

(c) $2^2 = 4$ et $6^2 = 36$, soit 4 m^2 et 36 m^2. Or $36 \div 4 = 9$: l'aire est multipliée par 9.

(d) Le volume est le produit de trois arêtes. Chacune est multipliée par 3, donc le volume est multiplié par $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$.

Ex. 46 ★★☆ **Convertir avant de calculer**

(a) Non. Un carré de 1 m de côté a 100 cm de côté, donc son aire vaut $100^2 = 10\,000$. Ainsi 1 m$^2 = 10\,000$ cm^2, pas 100 cm^2.

(b) L'arête mesure 10 cm. $10^3 = 1\,000$. La boîte a un volume de $1\,000$ cm^3.

(c) Le côté mesure 50 cm. $50^2 = 2\,500$. La dalle a une aire de $2\,500$ cm^2.

(d) $70^3 = 4\,900 \times 70 = 343\,000$, soit $343\,000$ cm^3. Puis $343\,000 \div 1\,000 = 343$. La cuve contient 343 L.

Ex. 47 ★★☆ **Figures composées et prix**

(a) $11^2 - 6^2 = 121 - 36 = 85$. Le cadre a une aire de 85 cm^2.

(b) $10^3 + 9^3 = 1\,000 + 729 = 1\,729$. La tour a un volume de $1\,729$ cm^3.

(c) $4{,}5^2 = 4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25$, soit $20{,}25$ m^2. Puis $20{,}25 \times 20 = 405$. Le carrelage coûte 405 €.

Ex. 48 ★★★ **Débat en classe : vrai ou faux ?**

(a) Grand carré : $9^2 = 81$ cm^2. Petit carré : $4^2 = 16$ cm^2. Il reste $81 - 16 = 65$ cm^2, pas 25 cm^2 : on ne soustrait pas les côtés avant de calculer les aires. La phrase est fausse.

(b) Aire au départ : $10^2 = 100$ cm^2. Aire à l'arrivée : $30^2 = 900$ cm^2. Or $900 \div 100 = 9$: l'aire est multipliée par $9 = 3^2$, pas par 3. La phrase est fausse.

(c) $2{,}4^2 = 2{,}4 \times 2{,}4 = 5{,}76$, puis $5{,}76 \times 2{,}4 = 13{,}824$. Le volume vaut $13{,}824$ cm^3, et $13{,}824 < 14$. La phrase est vraie.

(d) $0{,}6$ m $= 60$ cm, donc l'aire vaut $60^2 = 60 \times 60 = 3\,600$ cm^2. Autre méthode : $0{,}6^2 = 0{,}36$ m^2, et 1 m$^2 = 10\,000$ cm^2, donc $0{,}36$ m$^2 = 3\,600$ cm^2. La phrase est vraie.

Ex. 49 ★★★ **L'aquarium cubique de Nolan**

(a) $50^2 = 2\,500$, puis $2\,500 \times 50 = 125\,000$. Le volume de l'aquarium est $125\,000$ cm^3.

(b) 50 cm $= 5$ dm. Volume : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ dm^3. Comme 1 dm$^3 = 1$ L, l'aquarium peut contenir 125 L.

(c) $125 \div 2{,}5 = 50$. Il faut 50 carafes pour remplir l'aquarium.

(d) 1 m $= 10$ dm. Volume : $10^3 = 1\,000$ dm^3, soit $1\,000$ L. Or $1\,000 \div 125 = 8$. L'arête est multipliée par 2, donc le volume est multiplié par $2 \times 2 \times 2 = 8$, pas par 2. Le vendeur a tort.

Ex. 50 ★★★ **La tour de cubes de Zoé**

(a) $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$, $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$ et $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Les arêtes mesurent donc 8 cm, 7 cm et 3 cm.

(b) $8 + 7 + 3 = 18$. La tour mesure 18 cm de haut.

(c) $512 + 343 + 27 = 882$. Le volume total de bois est 882 cm^3.

(d) $9^3 = 81 \times 9 = 729$ et $10^3 = 1\,000$. Comme $729 < 882 < 1\,000$, un cube de 9 cm d'arête serait trop petit et un cube de 10 cm trop grand. L'arête serait donc comprise entre 9 cm et 10 cm.