1. *Rappels de 5e : carré, cube et priorités*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : carrés et cubes**

(a) $9^2 = 9 \times 9 = 81$

(b) $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 = 125$

(c) $0{,}3^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$

(e) $1^6 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

(f) $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : priorités avec des puissances**

(a) $2 + 6^2 = 2 + 36 = 38$

(b) $(2 + 6)^2 = 8^2 = 64$

(c) $2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

(d) $(2 \times 5)^2 = 10^2 = 100$

(e) $20 - 2^4 = 20 - 16 = 4$

(f) $10^3 \div 5^2 = 1\,000 \div 25 = 40$

Ex. 3 ★☆☆ **Carrés parfaits et exposant manquant**

(a) $20^2 = 20 \times 20 = 400$

(b) $3^3 = 27$

(c) $0{,}8^2 = 0{,}64$

(d) $2^5 = 32$ (5 facteurs égaux à 2)

(e) $0{,}5^3 = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$
(3 facteurs égaux à 0,5)

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) L'exposant compte les facteurs : $7^2 = 7 \times 7 = 49$.
Donc $7^2 = 49$, et non 14.

(b) $0{,}7^2 = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$. Lina a multiplié par 2. Le carré d'un nombre entre 0 et 1 est plus petit que ce nombre : $0{,}49 < 0{,}7$.

(c) On calcule d'abord la parenthèse : $(4 + 5)^2 = 9^2 = 81$.
Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés : $81 \neq 41$.

(d) La puissance passe avant la multiplication :
$4 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$.
Donc $4 \times 3^2 = 36$, alors que $12^2 = 144$.

Ex. 5 ★★☆ **Dalles, dés et boîtes**

(a) $11^2 = 11 \times 11 = 121$. L'aire de la dalle est 121 cm^2.

(b) $1{,}1^3 = 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21 \times 1{,}1 = 1{,}331$. Le volume du dé est 1,331 cm^3.

(c) $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 49 \times 7 = 343$. L'arête de la boîte mesure 7 cm.

(d) $3x^2 = 3 \times 8^2 = 3 \times 64 = 192$ et $(3x)^2 = 24^2 = 576$. Les aires valent 192 cm^2 et 576 cm^2 : elles sont différentes, car dans $3x^2$ l'exposant ne porte que sur x.

Ex. 6 ★★★ **Vrai ou faux : les pièges des carrés et des cubes**

(a) $0{,}9^2 = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$ et $0{,}81 < 0{,}9$: c'est un contre-exemple. L'affirmation est fausse
(de même, $1^2 = 1$ n'est pas plus grand que 1).

(b) Par exemple, $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$ alors que $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. L'affirmation est fausse : le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés.

(c) $5^2 = 25$ et $10^2 = 100 = 4 \times 25$. Le carré est multiplié par 4, pas par 2 : l'affirmation est fausse.

(d) Pour $x = 0$: $2 \times 0^2 = 0$ et $(2 \times 0)^2 = 0^2 = 0$.
L'affirmation est vraie. (Pour $x = 1$, en revanche : $2 \times 1^2 = 2$ et $(2 \times 1)^2 = 4$.)

(e) $1{,}2^2 = 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$ puis $1{,}2^3 = 1{,}44 \times 1{,}2 = 1{,}728$. Comme $1{,}728 < 2$, l'affirmation est vraie.

Ex. 7 ★★★ **Le grand cube de Zoé**

(a) $1{,}5^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$, puis $1{,}5^3 = 2{,}25 \times 1{,}5 = 3{,}375$. Un petit cube a un volume de 3,375 cm^3.

(b) $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216$. Le grand cube a un volume de 216 cm^3.

(c) $6 \div 1{,}5 = 4$: il faut 4 petits cubes par arête. Il en faut donc $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ en tout. Vérification : $64 \times 3{,}375 = 216$.

(d) Une face a une aire de $6^2 = 36$ cm^2. Aire totale : $6 \times 6^2 = 6 \times 36 = 216$ (et non 36^2). Zoé peint 216 cm^2.

Ex. 8 ★★★ **Enquête sur les carrés parfaits**

(a) $100 = 10^2$, $169 = 13^2$ et $225 = 15^2$ sont des carrés parfaits. 48 est entre $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$; 125 est entre $11^2 = 121$ et $12^2 = 144$; 210 est entre $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$: ces trois nombres ne sont pas des carrés parfaits.

Ex. 8 **(suite)**

(b) $n^2 = n \times n$. Ce produit est égal à $n \times 2$ seulement si le second facteur n vaut 2. C'est donc vrai seulement pour $n = 2$: $2^2 = 4 = 2 \times 2$.

(c) Sans parenthèses : $2 + 4 \times 3^2 = 2 + 4 \times 9 = 2 + 36 = 38$. Ensuite : $(2 + 4) \times 3^2 = 6 \times 9 = 54$ et $(2 + 4 \times 3)^2 = 14^2 = 196$.

(d) On essaie des carrés parfaits : $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$. Les deux entiers sont 7 et 8.

2. *Puissance d'un nombre : a^n, a^1, a^0 et signe d'une puissance*

Ex. 9 ★☆☆ **Calculer une puissance**

(a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

(b) $0{,}3^4 = 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}0081$
(4 facteurs : 4 chiffres après la virgule)

(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{16}{81}$

(d) $6^1 = 6$ (un seul facteur)

(e) $37^0 = 1$ (et pas 0)

(f) $1^{2026} = 1$
(1 multiplié par lui-même donne toujours 1)

(g) $0^7 = 0$

(h) $(-2)^5 = -32$
(exposant impair : résultat négatif)

Ex. 10 ★☆☆ **Écrire sous forme d'une puissance**

(a) $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$
(4 facteurs égaux à 7)

(b) $0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}6^3$

(c) $(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^5$
(parenthèses obligatoires)

(d) $\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \left(\frac{3}{8}\right)^3$

(e) $x \times x \times x = x^3$

(f) $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$, et aussi $81 = 9 \times 9 = 9^2$

(g) $100\,000 = 10^5$
(5 zéros, 5 facteurs égaux à 10)

Ex. 11 ★☆☆ **Le signe d'une puissance**

(a) Négatif : base négative, exposant 13 impair.

(b) Positif : base négative, exposant 6 pair.

(c) Négatif : exposant 101 impair, donc $(-1)^{101} = -1$.

(d) Négatif : sans parenthèses, $-8^4 = -(8^4)$ et 8^4 est positif.

(e) Positif : exposant 8 pair.

(f) Positif : $(-4)^0 = 1$.

(g) Négatif : base négative, exposant 7 impair.

Ex. 12 ★★☆ **Puissances de 2 et exposant manquant**

(a) $2^3 = 8$; $2^5 = 32$; $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$, donc l'exposant manquant est 6 ; $2^9 = 512$.

(b) $6 \times 6 = 36$ et $36 \times 6 = 216$: il faut 3 facteurs égaux à 6. Donc $n = 3$.

(c) Le résultat est négatif, donc p est impair. Or $2^7 = 128$. Donc $p = 7$: $(-2)^7 = -128$.

(d) Chaque pliage multiplie le nombre d'épaisseurs par 2. Après 8 pliages : $2^8 = 256$ (8 facteurs égaux à 2). Zoé obtient 256 épaisseurs.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux ? Repère l'erreur**

(a) Faux. 2^5 n'est pas 2×5 : c'est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Donc $2^5 = 32$.

(b) Faux. $2^5 = 32$ et $5^2 = 25$, donc $2^5 > 5^2$. On ne peut pas échanger la base et l'exposant.

(c) Faux. Pour une base non nulle, la puissance 0 vaut 1 : $13^0 = 1$.

(d) Faux. Sans parenthèses, l'exposant porte seulement sur 15 : $-15^2 = -(15 \times 15) = -225$. Seul $(-15)^2$ vaut 225.

(e) Vrai. $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064$: $4 \times 4 \times 4 = 64$, et 3 facteurs donnent 3 chiffres après la virgule.

Ex. 14 ★★★ **Une culture de bactéries**

(a) En 2 h, il y a $120 \div 30 = 4$ doublements.
$5 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$. Au bout de 2 h, il y a 80 bactéries.

(b) En 4 h, il y a $240 \div 30 = 8$ doublements. $2^8 = 256$ (8 facteurs égaux à 2), donc $5 \times 2^8 = 5 \times 256 = 1\,280$. Au bout de 4 h, il y a 1 280 bactéries.

(c) $5 \times 2^8 = 1\,280 < 2\,000$ et $5 \times 2^9 = 5 \times 512 = 2\,560 > 2\,000$. Il faut donc 9 doublements, soit $9 \times 30 = 270$ min. Le nombre dépasse 2 000 pour la première fois au bout de 4 h 30 min.

Ex. 14 (suite)

(d) Non, elle a tort : $2^0 = 1$ et pas 0.
Donc $5 \times 2^0 = 5 \times 1 = 5$. La formule donne bien les 5 bactéries du départ.

Ex. 15 ★★★ Six puissances à ranger

(a) $A = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$ (3 facteurs, exposant impair : résultat négatif). $B = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$ (4 facteurs, exposant pair : résultat positif). $C = -(5 \times 5 \times 5 \times 5) = -625$.

(b) 77 est impair, donc $D = (-1)^{77} = -1$. Pour une base non nulle, la puissance 0 vaut 1, donc $E = 5^0 = 1$. Un produit de facteurs égaux à 0 vaut 0, donc $F = 0^9 = 0$.

(c) $-625 < -125 < -1 < 0 < 1 < 625$, donc $C < A < D < F < E < B$.

(d) Non, il a tort. Dans $B = (-5)^4$, l'exposant porte sur -5 : $B = 625$. Dans $C = -5^4$, l'exposant porte seulement sur 5 et le signe moins reste devant : $C = -625$.
Donc $B \neq C$.

Ex. 16 ★★★ Le défi de Ben

(a) $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ et $4^2 = 4 \times 4 = 16$: l'égalité est vraie, mais c'est une exception. Par exemple, $3^2 = 9$ et $2^3 = 8$, donc $3^2 \neq 2^3$. Ben a tort : en général, on ne peut pas échanger la base et l'exposant.

(b) Les cubes strictement compris entre 100 et 1 000 sont $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ et $9^3 = 729$ ($10^3 = 1\,000$ est exclu). 125, 216, 343 et 512 ne sont pas des carrés : ils sont entre $11^2 = 121$ et $12^2 = 144$, entre $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$, entre $18^2 = 324$ et $19^2 = 361$, entre $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$. Mais $729 = 27^2$. Le nombre cherché est 729.

(c) $0{,}8^2 = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$ et $0{,}8^3 = 0{,}64 \times 0{,}8 = 0{,}512$. De plus, $0{,}8^0 = 1$.
Donc $0{,}8^3 < 0{,}8^2 < 0{,}8^0$. Multiplier par 0,8, qui est inférieur à 1, rend le résultat plus petit : plus l'exposant est grand, plus la puissance est petite.

(d) $(-3)^7$ est négatif (exposant 7 impair) et $(-6)^4$ est positif (exposant 4 pair) : leur produit est négatif.
$-2^4 = -16$ est négatif (sans parenthèses, l'exposant porte seulement sur 2) et $(-1)^9 = -1$ est négatif : le produit de deux nombres négatifs est positif.

3. *Produits et quotients de puissances d'un même nombre*

Ex. 17 ★☆☆ Automatismes : produits d'un même nombre

(a) $6^3 \times 6^5 = 6^{3+5} = 6^8$ (8 facteurs égaux à 6) ; ni 6^{15} ni 36^8.

(b) $7^4 \times 7 = 7^4 \times 7^1 = 7^{4+1} = 7^5$
(5 facteurs égaux à 7).

(c) $(-2)^3 \times (-2)^6 = (-2)^{3+6} = (-2)^9$
(9 facteurs égaux à -2).

(d) $0{,}5^2 \times 0{,}5^7 = 0{,}5^{2+7} = 0{,}5^9$
(9 facteurs égaux à 0,5).

(e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$
(7 facteurs).

(f) $9 \times 9^6 = 9^1 \times 9^6 = 9^{1+6} = 9^7$
(7 facteurs égaux à 9).

Ex. 18 ★☆☆ Automatismes : quotients et puissances de puissances

(a) $8^9 \div 8^4 = 8^{9-4} = 8^5$: on simplifie 4 facteurs, il en reste 5.

(b) $\frac{(-5)^7}{(-5)^2} = (-5)^{7-2} = (-5)^5$: on simplifie 2 facteurs, il en reste 5.

(c) $13^6 \div 13^6 = 13^{6-6} = 13^0 = 1$: tous les facteurs se simplifient.

(d) $(7^3)^2 = 7^3 \times 7^3 = 7^{3\times 2} = 7^6$: 2 fois 3 facteurs ; ni 7^9 ni 7^5.

(e) $(1{,}2^4)^3 = 1{,}2^4 \times 1{,}2^4 \times 1{,}2^4 = 1{,}2^{4\times 3} = 1{,}2^{12}$: 3 fois 4 facteurs.

(f) $\frac{4^8}{4} = \frac{4^8}{4^1} = 4^{8-1} = 4^7$: on simplifie 1 facteur, il en reste 7.

Ex. 19 ★★☆ L'exposant manquant

(a) Il faut $4 + n = 13$ facteurs, donc $n = 13 - 4 = 9$.
Vérification : $3^4 \times 3^9 = 3^{4+9} = 3^{13}$.
Donc $n = 9$.

(b) On simplifie 6 facteurs et il en reste 2, donc $n = 6 + 2 = 8$. Vérification : $5^8 \div 5^6 = 5^{8-6} = 5^2$.
Donc $n = 8$.

(c) 4 fois n facteurs donnent 20 facteurs : $n \times 4 = 20$, donc $n = 5$. Vérification : $(2^5)^4 = 2^{5\times 4} = 2^{20}$.
Donc $n = 5$.

Ex. 19 (suite)

(d) Le produit vaut déjà 9^5 : on multiplie par 1, et $1 = 9^0$.
Vérification : $9^5 \times 9^0 = 9^{5+0} = 9^5$.
Donc $n = 0$.

(e) Il faut $2 + n - 3 = 6$, donc $n - 1 = 6$ et $n = 7$.
Vérification : $4^2 \times 4^7 \div 4^3 = 4^9 \div 4^3 = 4^{9-3} = 4^6$.
Donc $n = 7$.

Ex. 20 ★★☆ Regrouper… ou pas ?

(a) C'est une somme : rien ne se regroupe. $3^2 + 3^4 = 9 + 81 = 90$. Ce n'est pas $3^6 = 729$.
Donc $3^2 + 3^4 = 90$.

(b) Même base, produit : $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ (6 facteurs égaux à 3), donc $3^2 \times 3^4 = 729$.

(c) Bases et exposants différents : rien ne se regroupe. $2^3 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200$. Ce n'est pas 10^5.
Donc $2^3 \times 5^2 = 200$.

(d) Même exposant : $2^6 \times 5^6 = (2 \times 5) \times \ldots \times (2 \times 5)$ (6 fois) $= 10^6$, donc $2^6 \times 5^6 = 1\,000\,000$.

(e) C'est une différence : rien ne se regroupe. $4^3 - 4^2 = 64 - 16 = 48$. Ce n'est pas $4^1 = 4$.
Donc $4^3 - 4^2 = 48$.

Ex. 21 ★★☆ Les calculs d'Inès

(a) Non : elle a divisé les exposants. On simplifie 2 facteurs sur 8, il en reste 6 : $6^8 \div 6^2 = 6^{8-2} = 6^6$.
Donc $6^8 \div 6^2 = 6^6$.

(b) Non : elle a ajouté les exposants. $(4^2)^5$, c'est 5 fois 2 facteurs : $(4^2)^5 = 4^{2\times5} = 4^{10}$.
Donc $(4^2)^5 = 4^{10}$.

(c) Non : la base ne change pas. $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$ (7 facteurs égaux à 5).
Donc $5^3 \times 5^4 = 5^7$, et pas 25^7.

(d) Oui : $2 = 2^1$, donc $2^7 \times 2 = 2^{7+1} = 2^8$ (8 facteurs égaux à 2). Inès a raison.

(e) Non : $3^6 \times 3^3 \div 3^7 = 3^9 \div 3^7 = 3^{9-7} = 3^2$ est juste, mais $3^2 = 3 \times 3 = 9$, pas 3×2.
Donc le résultat est 9.

Ex. 22 ★★★ Les photos du club de Rennes

(a) $2^5 \times 2^8 \times 2^6 = 2^{5+8+6} = 2^{19}$ ($5 + 8 + 6 = 19$ facteurs égaux à 2). Le serveur contient 2^{19} photos.

(b) Non. Dans un produit de puissances d'un même nombre, on additionne les nombres de facteurs, on ne les multiplie pas : $2^5 \times 2^8 \times 2^6 = 2^{19}$, pas 2^{240}. Malo a tort.

Ex. 22 (suite)

(c) $2^{19} \times 2 = 2^{19} \times 2^1 = 2^{19+1} = 2^{20}$ (20 facteurs égaux à 2). Il y a maintenant 2^{20} photos.

(d) $2^{20} \div 2^{14} = 2^{20-14} = 2^6$: on simplifie 14 facteurs, il en reste 6. Or $2^6 = 64$. Il faut 64 clés USB.

Ex. 23 ★★★ Le défi de Ben : quatre calculs à ranger

(a) $7^6 \times 7^3 = 7^{6+3} = 7^9$ (9 facteurs égaux à 7). Puis $7^9 \div 7^8 = 7^{9-8} = 7^1 = 7$.
Donc $A = 7$.

(b) $(5^3)^2 = 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3} = 5^6$ (2 fois 3 facteurs), ni 5^9 ni 5^5. Puis $5^6 \div 5^6 = 1$: tous les facteurs se simplifient, c'est 5^0.
Donc $B = 1$.

(c) Non : une somme ne se regroupe pas. $C = 8 + 32 = 40$, alors que $2^8 = 256$. Lou a tort, et $C = 40$.

(d) Même exposant : $D = (5 \times 20)^4 = 100^4 = 100\,000\,000$ (4 facteurs égaux à 100). Comme $1 < 7 < 40 < 100\,000\,000$, on obtient $B < A < C < D$.

Ex. 24 ★★★ Enquête sur des bases variées

(a) $(-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^{4+3} = (-2)^7$ (7 facteurs égaux à -2). L'exposant 7 est impair, donc le résultat est négatif. Comme $2^7 = 128$, on obtient $(-2)^7 = -128$.

(b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$: on simplifie 3 facteurs, il en reste 2.
Donc le résultat vaut $\frac{3\times3}{4\times4} = \frac{9}{16}$.

(c) $(1{,}5^2)^4$, c'est 4 fois 2 facteurs égaux à 1,5 : $(1{,}5^2)^4 = 1{,}5^{2\times4} = 1{,}5^8$. Et $1{,}5^3 \times 1{,}5^5 = 1{,}5^{3+5} = 1{,}5^8$ (8 facteurs). Les deux expressions valent $1{,}5^8$: elles sont égales.

(d) Faux : les bases sont différentes et les exposants aussi, donc rien ne se regroupe. $2^3 \times 3^4 = 8 \times 81 = 648$, alors que $6^7 = 279\,936$. L'égalité est fausse.

4. *Puissances de 10 : exposant positif ou négatif*

Ex. 25 ★☆☆ Automatismes : écriture décimale

(a) $10^3 = 1\,000$ (le 1 suivi de 3 zéros).

(b) $10^1 = 10$ (un seul facteur 10).

(c) $10^{-2} = 0{,}01$
(2 chiffres après la virgule, le dernier étant le 1).

(d) $10^{10} = 10\,000\,000\,000$
(le 1 suivi de 10 zéros).

Ex. 25 **(suite)**

(e) $10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$
(9 chiffres après la virgule, le dernier étant le 1).

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : écrire sous forme d'une puissance de 10**

(a) $100\,000\,000 = 10^8$
(le 1 suivi de 8 zéros).

(b) $0{,}000\,001 = 10^{-6}$
(le 1 est au 6e chiffre après la virgule).

(c) $1 = 10^0$.

(d) $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
(le 1 suivi de 12 zéros).

(e) $1 \div 10^4 = 10^{-4}$ (l'inverse de 10^4).

(f) $1 \div 1\,000 = 1 \div 10^3 = 10^{-3}$.

Ex. 27 ★☆☆ **Comparer des puissances de 10**

(a) $10^{-2} = 0{,}01$ et $10^{-5} = 0{,}000\,01$, donc $10^{-2} > 10^{-5}$.

(b) $10^0 = 1$, donc $10^0 < 10$.

(c) $10^{-3} = 0{,}001$ est positif, donc $10^{-3} > -1\,000$.

(d) $10^5 = 100\,000$, donc $10^5 > 50$.

(e) $10^2 = 10 \times 10 = 100$, donc $10^2 = 100$.

(f) $10^{-4} = 0{,}000\,1$ (4 chiffres après la virgule), donc $10^{-4} < 0{,}001$.

Ex. 28 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux : $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ (le 1 suivi de 4 zéros), et non 4×10.

(b) Faux : $10^{-6} = 0{,}000\,001$, un millionième. C'est un nombre positif, plus petit que 1.

(c) Faux : $10^{-5} = 0{,}000\,01$. Il y a 5 chiffres après la virgule, mais seulement 4 zéros.

(d) Vrai : $10^0 = 1$ et $10^{-1} = 0{,}1$. Or $0{,}1 \times 10 = 1$, donc 10^{-1} est dix fois plus petit que 10^0.

Ex. 29 ★★☆ **La copie de Hugo**

(a) Il a tort : $10^6 = 1\,000\,000$, c'est un million. Un milliard s'écrit $1\,000\,000\,000$: le 1 suivi de 9 zéros.
Donc un milliard $= 10^9$.

(b) Il a tort : $10^3 = 1\,000$, c'est mille. Un millième s'écrit $0{,}001 = 1 \div 10^3$.
Donc un millième $= 10^{-3}$.

(c) Il a tort : il faut compter les chiffres après la virgule, pas les zéros. Il y en a 8, et le dernier est le 1.
Donc $0{,}000\,000\,01 = 10^{-8}$.

Ex. 29 **(suite)**

(d) Il a tort : un dixième $= 0{,}1 = 1 \div 10$, il n'y a qu'un chiffre après la virgule.
Donc un dixième $= 10^{-1}$
(10^{-10} est un dix-milliardième).

(e) Il a raison : un dix-millième $= 1 \div 10\,000 = 0{,}000\,1$. Il y a 4 chiffres après la virgule, le dernier étant le 1.
Donc un dix-millième $= 10^{-4}$.

Ex. 30 ★★★ **Comprendre les exposants négatifs**

(a) $100 \div 10 = 10$, donc $10^1 = 10$; $10 \div 10 = 1$, donc $10^0 = 1$; $1 \div 10 = 0{,}1$, donc $10^{-1} = 0{,}1$.

(b) Dans le tableau, $10^0 = 10^1 \div 10 = 10 \div 10 = 1$. Léna a tort : $10^0 = 1$, et non 0.

(c) En prolongeant : $10^{-2} = 0{,}1 \div 10 = 0{,}01$. De 10^2 à 10^{-2}, on avance de 4 cases : on divise 4 fois par 10, donc par $10^4 = 10\,000$. Vérification : $0{,}01 \times 10\,000 = 100$.
Donc 10^2 est 10 000 fois plus grand que 10^{-2}.

(d) Vers la gauche, l'exposant augmente de 1 à chaque case : 5 cases avant 10^2, on trouve $10^{2+5} = 10^7$. On a multiplié 100 cinq fois par 10 : $10^7 = 10\,000\,000$ (le 1 suivi de 7 zéros), dix millions.

(e) $10^{-4} = 1 \div 10^4$: c'est un quotient de deux nombres positifs, donc un nombre positif. Il ne peut pas valoir -40. On écrit 4 chiffres après la virgule, le dernier étant le 1 : $10^{-4} = 0{,}000\,1$.

Ex. 31 ★★★ **Du milliard au dix-milliardième**

(a) Un centième $= 0{,}01 = 10^{-2}$; un cent-millième $= 0{,}000\,01 = 10^{-5}$ (5 chiffres après la virgule) ; un million $= 1\,000\,000 = 10^6$
(le 1 suivi de 6 zéros).

(b) $0{,}000\,001 = 10^{-6}$ et $100 = 10^2$. Pour des puissances de 10, le plus grand exposant donne le plus grand nombre : $10^{-7} < 0{,}000\,001 < 10^{-1} < 10^0 < 100 < 10^4$.

(c) $10^4 = 10\,000$ est trop petit et $10^6 = 1\,000\,000$ est trop grand. $10^5 = 100\,000$ est compris entre 50 000 et 500 000, donc $n = 5$.

(d) Non. $10^{-10} = 0{,}000\,000\,000\,1$ (10 chiffres après la virgule) et $10^{-1} = 0{,}1$.
Donc $10^{-10} < 10^{-1}$: c'est 10^{-1} le plus grand.

(e) Sami a multiplié 9 par 10. Or $10^9 = 10 \times 10 \times \cdots \times 10$ (9 facteurs égaux à 10), soit le 1 suivi de 9 zéros : $10^9 = 1\,000\,000\,000$, un milliard.

Ex. 32 ★★★ **Dilutions au laboratoire**

(a) Pour toute base non nulle, la puissance d'exposant 0 vaut 1, donc $1 = 10^0$. Au départ, il y a 10^0 g/L de colorant.

(b) Après 1 dilution : $1 \div 10 = 0{,}1 = 10^{-1}$ g/L. Après 2 : $0{,}1 \div 10 = 0{,}01 = 10^{-2}$ g/L. Après 3 : $0{,}01 \div 10 = 0{,}001 = 10^{-3}$ g/L.

(c) Après 6 dilutions : $1 \div 10^6 = 10^{-6} = 0{,}000\,001$ g/L (6 chiffres après la virgule). C'est un millionième de gramme par litre.

(d) Non. Après 7 dilutions, il reste 10^{-7} g/L, soit 7 chiffres après la virgule, le dernier étant le 1 : $0{,}000\,000\,1$ g/L. Il n'y a que 6 zéros après la virgule. Malik a écrit 10^{-8}.

(e) Dans $0{,}000\,000\,001$, le 1 est au 9e rang après la virgule, donc $0{,}000\,000\,001 = 10^{-9} = 1 \div 10^9$. Il faut 9 dilutions. Ce nombre est un milliardième.

5. *Calculer avec les puissances de 10*

Ex. 33 ★☆☆ **Décaler la virgule**

(a) Virgule décalée de 4 rangs vers la droite : $3{,}62 \times 10^4 = 36\,200$.

(b) Virgule décalée de 5 rangs vers la droite, on complète par des zéros : $0{,}029 \times 10^5 = 2\,900$.

(c) On ajoute 3 zéros, donc la virgule est décalée de 3 rangs vers la droite : $56 \times 10^3 = 56\,000$.

(d) Virgule décalée de 4 rangs vers la gauche : $815 \times 10^{-4} = 0{,}081\,5$
(le nombre reste positif).

(e) Virgule décalée de 3 rangs vers la gauche : $7{,}3 \times 10^{-3} = 0{,}007\,3$.

(f) Virgule décalée de 2 rangs vers la gauche : $0{,}6 \times 10^{-2} = 0{,}006$.

Ex. 34 ★☆☆ **Une seule puissance de 10**

(a) $10^5 \times 10^6 = 10^{5+6} = 10^{11}$
($5 + 6 = 11$ zéros, et non 10^{30}).

(b) $10^7 \times 10^{-3} = 10^{7+(-3)} = 10^4$: multiplier par 0,001 enlève 3 zéros.

(c) $10^{-2} \times 10^{-6} = 10^{(-2)+(-6)} = 10^{-8}$.

(d) $10^3 \div 10^8 = 10^{3-8} = 10^{-5}$.

(e) $10^4 \div 10^{-3} = 10^{4-(-3)} = 10^{4+3} = 10^7$
(soustraire -3, c'est ajouter 3).

Ex. 34 (suite)

(f) $(10^4)^3 = 10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 10^{12}$
(3 fois 4 zéros).

(g) $10^9 \div 10^9 = 10^{9-9} = 10^0 = 1$.

Ex. 35 ★★☆ **Entier × puissance de 10**

(a) 9 suivi de 9 zéros : $9\,000\,000\,000 = 9 \times 10^9$.

(b) Il faut décaler la virgule de 5 rangs vers la gauche à partir de 7 : $0{,}000\,07 = 7 \times 10^{-5}$.

(c) 34 suivi de 4 zéros : $340\,000 = 34 \times 10^4$.

(d) Il faut décaler la virgule de 4 rangs vers la gauche à partir de 26 : $0{,}002\,6 = 26 \times 10^{-4}$.

(e) 6 suivi de 2 zéros : $600 = 6 \times 10^2$.

(f) Il faut décaler la virgule de 1 rang vers la gauche à partir de 8 : $0{,}8 = 8 \times 10^{-1}$.

Ex. 36 ★★☆ **Les égalités d'Inès**

(a) Faux : on ajoute les exposants, on ne les multiplie pas.
$10^2 \times 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$
($2 + 5 = 7$ zéros).

(b) Faux : $10^4 + 10^3 = 10\,000 + 1\,000 = 11\,000$. C'est une somme, et le résultat n'est pas une puissance de 10.

(c) Faux : multiplier par 10^{-2} décale la virgule de 2 rangs vers la gauche. $6 \times 10^{-2} = 0{,}06$, un nombre positif.

(d) Faux : $10^6 \div 10^{-2} = 10^{6-(-2)} = 10^{6+2} = 10^8$. Soustraire -2, c'est ajouter 2.

(e) Vrai : $(10^2)^5 = 10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^{10}$
(5 fois 2 zéros).

Ex. 37 ★★☆ **Calculs enchaînés et exposant caché**

(a) $10^6 \times 10^{-8} = 10^{6+(-8)} = 10^{-2}$, donc $E = 41 \times 10^{-2}$: on décale la virgule de 2 rangs vers la gauche. $E = 0{,}41$.

(b) $F = 10^3 \div 10^2$ car $-4 + 7 = 3$, puis $F = 10^1$ car $3 - 2 = 1$.
Donc $F = 10$.

(c) $G = 10^8 \times 10^{-6}$ car $5 - (-3) = 8$, puis $G = 10^2$ car $8 + (-6) = 2$.
Donc $G = 100$.

(d) Il faut $n + 3 = -2$, donc $n = -5$. Vérification : $10^{-5} \times 10^3 = 10^{-2}$.

(e) Il faut $7 - n = 9$, donc $n = -2$. Vérification : $10^7 \div 10^{-2} = 10^{7+2} = 10^9$.

Ex. 38 ★★★ **La mémoire du téléphone de Clara**

(a) $1\,\text{Go} = 10^3\,\text{Mo} = 10^3 \times 10^3\,\text{ko} = 10^3 \times 10^3 \times 10^3$ octets $= (10^3)^3$ octets. On a 3 fois 3 zéros, donc $(10^3)^3 = 10^{3\times3} = 10^9$: $1\,\text{Go} = 10^9$ octets (et non 10^6).

(b) $256\,\text{Go} = 256 \times 10^3\,\text{Mo}$. Puis $256 \times 10^3 \div 4 = 64 \times 10^3 = 64\,000$. Clara peut stocker au maximum 64 000 photos.

(c) $1\,\text{Mo} = 10^{-3}\,\text{Go}$, donc $1\,800\,\text{Mo} = 1\,800 \times 10^{-3}\,\text{Go}$: on décale la virgule de 3 rangs vers la gauche. La vidéo pèse 1,8 Go.

(d) $1\,\text{Mo} = 10^3 \times 10^3$ octets $= 10^6$ octets.
Donc 5×10^8 octets $= 5 \times 10^8 \div 10^6\,\text{Mo} = 5 \times 10^{8-6}\,\text{Mo} = 5 \times 10^2\,\text{Mo} = 500\,\text{Mo}$. Tom a tort : l'application occupe 500 Mo.

Ex. 39 ★★★ **Sous le microscope de Sacha**

(a)

Préfixe	méga (M)	milli (m)	micro (μ)	nano (n)
Puissance de 10	10^6	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

(b) $8\,\mu\text{m} = 8 \times 10^{-6}$ m. On décale la virgule de 6 rangs vers la gauche : $8 \times 10^{-6} = 0{,}000\,008$. Le diamètre est de 0,000 008 m (un nombre positif, très petit).

(c) $100\,\text{nm} = 100 \times 10^{-9}\,\text{m} = 10^2 \times 10^{-9}\,\text{m} = 10^{2+(-9)}\,\text{m} = 10^{-7}\,\text{m}$. Le virus mesure 10^{-7} m.

(d) $8 \times 10^{-6} \div 10^{-7} = 8 \times 10^{-6-(-7)} = 8 \times 10^{-6+7} = 8 \times 10^1 = 80$. Il faut 80 virus alignés.

(e) $1\,\text{mm} = 10^{-3}\,\text{m}$ et $2\,\mu\text{m} = 2 \times 10^{-6}\,\text{m}$. $10^{-3} \div (2 \times 10^{-6}) = 0{,}5 \times 10^{-3-(-6)} = 0{,}5 \times 10^3 = 500$. On peut aligner 500 bactéries sur 1 mm.

Ex. 40 ★★★ **Le voyage de la lumière**

(a) $300\,000\,\text{km} = 3 \times 10^5\,\text{km}$ et $1\,\text{km} = 10^3\,\text{m}$.
Donc $3 \times 10^5 \times 10^3 = 3 \times 10^{5+3} = 3 \times 10^8$. La lumière parcourt 3×10^8 m en une seconde.

(b) $384 \times 10^3 \div (3 \times 10^5) = (384 \div 3) \times 10^{3-5} = 128 \times 10^{-2} = 1{,}28$. La lumière met environ 1,28 seconde pour venir de la Lune.

(c) $15 \times 10^7 \div (3 \times 10^5) = 5 \times 10^{7-5} = 5 \times 10^2 = 500$ s. Comme $500 = 8 \times 60 + 20$, la lumière du Soleil met environ 8 min 20 s pour arriver sur Terre.

Ex. 40 (suite)

(d) $3 \times 10^5 \times 2 \times 10^4 = 6 \times 10^{5+4} = 6 \times 10^9$ km. En mètre : $6 \times 10^9 \times 10^3 = 6 \times 10^{12}$ m. La sonde est à 6×10^9 km, soit 6×10^{12} m.

6. *Préfixes de nano à giga*

Ex. 41 ★☆☆ **Du préfixe à l'unité**

(a) $6\,\text{km} = 6 \times 10^3\,\text{m} = 6\,000\,\text{m}$

(b) $2\,\text{MW} = 2 \times 10^6\,\text{W} = 2\,000\,000\,\text{W}$

(c) $2\,\text{mW} = 2 \times 10^{-3}\,\text{W} = 0{,}002\,\text{W}$ (m minuscule : milli, pas méga)

(d) $4\,\mu\text{m} = 4 \times 10^{-6}\,\text{m} = 0{,}000\,004\,\text{m}$

(e) $9\,\text{ns} = 9 \times 10^{-9}\,\text{s} = 0{,}000\,000\,009\,\text{s}$

(f) $1{,}2\,\text{Go} = 1{,}2 \times 10^9$ octets $= 1\,200\,000\,000$ octets

(g) $5\,\text{cL} = 5 \times 10^{-2}\,\text{L} = 0{,}05\,\text{L}$

(h) $3\,\text{hL} = 3 \times 10^2\,\text{L} = 300\,\text{L}$

Ex. 42 ★☆☆ **D'un préfixe à un autre**

(a) $0{,}5\,\mu\text{s} = 0{,}5 \times 10^{-6}\,\text{s} = 500 \times 10^{-9}\,\text{s} = 500\,\text{ns}$

(b) $3\,200\,\text{MW} = 3\,200 \times 10^6\,\text{W} = 3{,}2 \times 10^9\,\text{W} = 3{,}2\,\text{GW}$

(c) $2\,\text{kW} = 2 \times 10^3\,\text{W} = 2\,000\,000 \times 10^{-3}\,\text{W} = 2\,000\,000\,\text{mW}$

(d) $8\,400\,\text{nm} = 8\,400 \times 10^{-9}\,\text{m} = 8{,}4 \times 10^{-6}\,\text{m} = 8{,}4\,\mu\text{m}$

(e) $1{,}5\,\text{dm} = 1{,}5 \times 10^{-1}\,\text{m} = 150 \times 10^{-3}\,\text{m} = 150\,\text{mm}$

Ex. 43 ★★☆ **Corrige l'erreur**

(a) Tom a pris 10^{-4} pour micro. Or $1\,\mu\text{m} = 10^{-6}$ m, donc $1\,\text{m} = 10^6\,\mu\text{m} = 1\,000\,000\,\mu\text{m}$.

(b) Sarah a confondu M (méga) et m (milli). $4\,\text{MW} = 4 \times 10^6\,\text{W} = 4\,000\,000\,\text{W}$. C'est 4 mW qui vaut 0,004 W.

(c) De milli à micro, on passe de 10^{-3} à 10^{-6} : c'est un facteur 10^3. $3\,\text{mm} = 3 \times 10^{-3}\,\text{m} = 3\,000 \times 10^{-6}\,\text{m} = 3\,000\,\mu\text{m}$.

(d) De kilo à giga, on passe de 10^3 à 10^9 : ce sont deux pas de 3 en 3. $1\,\text{GW} = 10^9\,\text{W} = 10^6 \times 10^3\,\text{W} = 1\,000\,000\,\text{kW}$.

Ex. 44 ★★☆ **Les photos de Jade**

(a) $32\,\text{Go} = 32 \times 10^9$ octets $= 32\,000 \times 10^6$ octets $= 32\,000$ Mo.

(b) $32\,000 \div 5 = 6\,400$. Jade peut stocker 6 400 photos.

(c) $1{,}6\,\text{Go} = 1{,}6 \times 10^9$ octets $= 1\,600 \times 10^6$ octets $= 1\,600$ Mo.

Ex. 44 **(suite)**

(d) $32\,000 - 1\,600 = 30\,400$ Mo libres, et $30\,400 \div 5 = 6\,080$. Elle peut encore stocker 6 080 photos.

Ex. 45 ★★☆ **Comparer des grandeurs**

(a) $1\text{ MW} = 10^6\text{ W}$ et $1\text{ mW} = 10^{-3}\text{ W}$. $10^6 \div 10^{-3} = 10^{6+3} = 10^9$. 1 MW vaut un milliard de fois 1 mW.

(b) $2{,}6\text{ GW} = 2{,}6 \times 10^9\text{ W} = 2\,600 \times 10^6\text{ W} = 2\,600\text{ MW}$. Comme $2\,600 > 2\,400$, la centrale A est la plus puissante.

(c) $0{,}08\text{ mm} = 0{,}08 \times 10^{-3}\text{ m} = 80 \times 10^{-6}\text{ m} = 80\ \mu\text{m}$ et $80 \div 4 = 20$. Le cheveu est 20 fois plus épais que le fil d'araignée.

(d) $0{,}2\text{ ms} = 0{,}2 \times 10^{-3}\text{ s} = 200 \times 10^{-6}\text{ s} = 200\ \mu\text{s}$ et $80\,000\text{ ns} = 80\,000 \times 10^{-9}\text{ s} = 80 \times 10^{-6}\text{ s} = 80\ \mu\text{s}$. Donc $50\ \mu\text{s} < 80\,000\text{ ns} < 0{,}2\text{ ms}$.

Ex. 46 ★★★ **Le virus et la bactérie**

(a) $120\text{ nm} = 120 \times 10^{-9}\text{ m} = 0{,}000\,000\,12\text{ m}$ (je décale la virgule de 9 rangs vers la gauche). Le virus mesure 0,000 000 12 m.

(b) $3\ \mu\text{m} = 3 \times 10^{-6}\text{ m} = 3 \times 10^3 \times 10^{-9}\text{ m} = 3\,000\text{ nm}$. La bactérie mesure 3 000 nm.

(c) Avec le même préfixe : $3\,000 \div 120 = 25$. La bactérie est 25 fois plus longue que le virus.

(d) $0{,}6\text{ mm} = 0{,}6 \times 10^{-3}\text{ m} = 0{,}6 \times 10^3 \times 10^{-6}\text{ m} = 600\ \mu\text{m}$, car $1\text{ mm} = 1\,000\ \mu\text{m}$. Puis $600 \div 3 = 200$. Il faut aligner 200 bactéries.

(e) Faux : de nano à milli, on passe de 10^{-9} à 10^{-3}, soit deux pas de 3 en 3. $120\text{ nm} = 120 \times 10^{-9}\text{ m} = 120 \times 10^{-6} \times 10^{-3}\text{ m} = 0{,}000\,12\text{ mm}$. Le virus mesure 0,000 12 mm.

Ex. 47 ★★★ **La centrale et le voyant**

(a) $1\,300\text{ MW} = 1\,300 \times 10^6\text{ W}$ et $1\text{ GW} = 10^9\text{ W} = 10^3 \times 10^6\text{ W} = 1\,000\text{ MW}$.
Donc $1\,300\text{ MW} = 1{,}3\text{ GW}$.

(b) $1\,300 \div 4 = 325$. Il faut 325 éoliennes.

(c) $40\text{ mW} = 40 \times 10^{-3}\text{ W} = 0{,}04\text{ W}$ (milli, m minuscule, vaut 10^{-3}). Le voyant consomme 0,04 W.

(d) $\frac{1\,300 \times 10^6}{40 \times 10^{-3}} = 32{,}5 \times 10^6 \times 10^3 = 32{,}5 \times 10^9 = 325 \times 10^8$. La centrale est 325×10^8 fois plus puissante que le voyant.

(e) Vrai : $1{,}3\text{ GW} = 1{,}3 \times 10^9\text{ W} = 1{,}3 \times 10^6 \times 10^3\text{ W} = 1\,300\,000\text{ kW}$. Malik a raison.

Ex. 48 ★★★ **L'ordinateur de Noé**

(a) $0{,}4\text{ ns} = 0{,}4 \times 10^{-9}\text{ s} = 0{,}000\,000\,000\,4\text{ s}$. Une opération dure 0,000 000 000 4 s.

(b) $1\ \mu\text{s} = 10^{-6}\text{ s} = 10^3 \times 10^{-9}\text{ s} = 1\,000\text{ ns}$. Puis $1\,000 \div 0{,}4 = 2\,500$. Le processeur effectue 2 500 opérations en 1 μs.

(c) $1\text{ ms} = 10^{-3}\text{ s} = 10^3 \times 10^{-6}\text{ s} = 1\,000\ \mu\text{s}$.
Donc $2\,500 \times 1\,000 = 2\,500\,000 = 25 \times 10^5$ opérations en 1 ms.

(d) $1{,}8\text{ Go} = 1{,}8 \times 10^9$ octets $= 1{,}8 \times 10^3 \times 10^6$ octets $= 1\,800$ Mo. Puis $1\,800 \div 12 = 150$. Le téléchargement dure 150 s, soit 2 min 30 s.

(e) $150\text{ s} = 150 \times 10^3$ ms, et $25 \times 10^5 \times 150 \times 10^3 = 3\,750 \times 10^8 = 375 \times 10^9$. Le processeur effectue 375×10^9 opérations.