1. Rappels de 4^e : puissances d'exposant positif et puissances de 10

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : calculer une puissance**

(a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

(b) $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
(et non $2 \times 5 = 10$).

(c) $8{,}4^1 = 8{,}4$: un seul facteur.

(d) $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$
(base négative, exposant impair : résultat négatif).

(e) $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$
(exposant pair : résultat positif).

(f) $-4^2 = -(4 \times 4) = -16$: sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur le 4.

(g) $23^0 = 1$ (et non 0).

(h) $0{,}2^4 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}001\,6$
($2^4 = 16$, avec 4 chiffres après la virgule).

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : puissances de 10**

(a) $10^7 = 10\,000\,000$: un 1 suivi de 7 zéros.

(b) 10^{-5} a 5 chiffres après la virgule, le dernier est le 1 : $10^{-5} = 0{,}000\,01$.

(c) $0{,}38 \times 10^4 = 3\,800$: la virgule se décale de 4 rangs vers la droite.

(d) De 46 à 0,046, la virgule se décale de 3 rangs vers la gauche : $46 \times 10^{-3} = 0{,}046$.

(e) $0{,}72 \times 10^{-2} = 0{,}007\,2$: la virgule se décale de 2 rangs vers la gauche.

(f) $0{,}000\,000\,1$ a 7 chiffres après la virgule, donc $n = -7$.

(g) 100 000 000 est un 1 suivi de 8 zéros : $100\,000\,000 = 10^8$.

(h) De 0,9 à 900, la virgule se décale de 3 rangs vers la droite : $0{,}9 \times 10^3 = 900$.

Ex. 3 ★☆☆ **Le signe sans calculer**

(a) Base négative, exposant 6 pair : $(-7)^6$ est positif.

(b) Base négative, exposant 9 impair : $(-3)^9$ est négatif.

(c) Sans parenthèses, $-2^8 = -(2^8)$: c'est l'opposé d'un nombre positif, donc il est négatif.

(d) Base négative, exposant 11 impair : $(-1{,}5)^{11}$ est négatif.

Ex. 3 (suite)

(e) $10^{-8} = 0{,}000\,000\,01$: il est positif
(l'exposant négatif ne rend pas le nombre négatif).

(f) $(-8)^0 = 1$: il est positif.

(g) Base négative, exposant 4 pair : $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ est positif.

Ex. 4 ★★☆ **Préfixes : du virus à la clé USB**

(a) giga : 10^9 ; méga : 10^6 ; kilo : 10^3 ; milli : 10^{-3} ; micro : 10^{-6} ; nano : 10^{-9}.

(b) 64 Go $= 64 \times 10^9$ octets $= 64\,000\,000\,000$ octets
(virgule décalée de 9 rangs vers la droite). La clé contient 64 milliards d'octets.

(c) Non : 0,025 m correspond à 25 mm, car Lina a confondu micro et milli. Or $25\ \mu\text{m} = 25 \times 10^{-6}$ m $= 0{,}000\,025$ m. Lina a donc tort.

(d) 120 nm $= 120 \times 10^{-9}$ m : la virgule se décale de 9 rangs vers la gauche, donc 120 nm $= 0{,}000\,000\,12$ m.

(e) 5 Go $= 5 \times 10^9$ octets $= 5 \times 10^3 \times 10^6$ octets $= 5\,000 \times 10^6$ octets. Il y a donc 5 000 Mo dans 5 Go.

Ex. 5 ★★☆ **Repère l'erreur**

(a) Non. La puissance passe avant le produit : $5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$. Le bon résultat est 40.

(b) Faux. Sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur le 6 : $-6^2 = -(6 \times 6) = -36$. C'est $(-6)^2$ qui vaut 36.

(c) $0{,}4^3 = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4$: $4^3 = 64$ avec 3 chiffres après la virgule.
Donc $0{,}4^3 = 0{,}064$ et non 0,64.

(d) Multiplier par 10^{-3} décale la virgule de 3 rangs vers la gauche, et non vers la droite.
Donc $75 \times 10^{-3} = 0{,}075$.

(e) Vrai. 10^{-4} a 4 chiffres après la virgule, le dernier est le 1 : $10^{-4} = 0{,}000\,1$. Attention : 0,000 01 a 5 chiffres après la virgule, c'est 10^{-5}.

Ex. 6 ★★★ **Calculs rédigés avec priorités**

(a) $A = 4 \times 3^2 - 2^6$; $A = 4 \times 9 - 64$ (la puissance passe avant le produit, et $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, pas 2×6) ; $A = 36 - 64$; $A = -28$. Attention : 4×3^2 ne vaut pas 12^2.

Ex. 6 **(suite)**

(b) $B = -3^4 + (-3)^4 + 9^0$; $B = -81 + 81 + 1$ (sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur le 3 ; avec les parenthèses et un exposant pair, $(-3)^4$ est positif ; $9^0 = 1$ et non 0) ; $B = 1$.

(c) $C = (-5)^3 \times 7^1 - 0{,}3^4 \times 10^4$; $C = -125 \times 7 - 0{,}008\,1 \times 10\,000$ (exposant impair, donc $(-5)^3$ est négatif ; $7^1 = 7$; $0{,}3^4$ a 4 décimales) ; $C = -875 - 81$; $C = -956$.

(d) $D = 0{,}5^3 + 86 \times 10^{-2} + 10^{-6}$; $D = 0{,}125 + 0{,}86 + 0{,}000\,001$ ($0{,}5^3$ a 3 décimales ; $\times 10^{-2}$ décale la virgule de 2 rangs vers la gauche ; 10^{-6} a 6 chiffres après la virgule) ; $D = 0{,}985\,001$.

Ex. 7 ★★★ **La feuille pliée**

(a) Avant tout pliage, il y a 1 épaisseur : $2^0 = 1$ (et non 0). Après 1 pliage, il y en a 2 : $2^1 = 2$.

(b) Non. Le nombre d'épaisseurs double 7 fois, donc $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$. Léa a multiplié la base par l'exposant. Il y a 128 épaisseurs.

(c) 0,1 mm $= 0{,}1 \times 10^{-3}$ m $= 0{,}000\,1$ m $= 10^{-4}$ m (4 chiffres après la virgule). Après 7 pliages : 128×10^{-4} m $= 0{,}012\,8$ m (on décale la virgule de 4 rangs vers la gauche). Le paquet mesure 0,012 8 m.

(d) $2^{10} = 1\,024$ épaisseurs, donc $1\,024 \times 0{,}1$ mm $= 102{,}4$ mm $= 10{,}24$ cm. Comme $10{,}24 > 10$, oui, le paquet dépasse 10 cm.

(e) 1 m $= 10\,000 \times 10^{-4}$ m : il faut donc plus de 10 000 épaisseurs. Or $2^{13} = 8\,192 < 10\,000$ et $2^{14} = 16\,384 > 10\,000$. Il faut donc au minimum 14 pliages.

Ex. 8 ★★★ **Mémoire et gravure (type brevet)**

(a) Giga $= 10^9$ et méga $= 10^6$.
Donc 128 Go $= 128 \times 10^9$ octets $= 128 \times 10^3 \times 10^6$ octets $= 128\,000$ Mo. Et $128\,000 \div 4 = 32\,000$. Karim peut stocker au maximum 32 000 photos.

(b) Les vidéos occupent 20 Go $= 20 \times 10^3$ Mo $= 20\,000$ Mo et les photos $9\,000 \times 4 = 36\,000$ Mo. Il reste $128\,000 - 20\,000 - 36\,000 = 72\,000$ Mo, et $72\,000 \div 4 = 18\,000$. Karim peut encore ajouter 18 000 photos.

(c) Non : micro vaut 10^{-6}, mais nano vaut 10^{-9}.
Donc 3 nm $= 3 \times 10^{-9}$ m $= 0{,}000\,000\,003$ m (on décale la virgule de 9 rangs vers la gauche). Sami a tort.

Ex. 8 **(suite)**

(d) 60 μm $= 60 \times 10^{-6}$ m (micro $= 10^{-6}$, à ne pas confondre avec milli $= 10^{-3}$). Or $10^{-6} = 10^3 \times 10^{-9}$, donc 60 μm $= 60\,000 \times 10^{-9}$ m $= 60\,000$ nm. Et $60\,000 \div 3 = 20\,000$. Le diamètre du cheveu est 20 000 fois plus grand que la finesse de gravure.

2. *Puissances d'exposant négatif*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : calculer une puissance d'exposant négatif**

(a) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$: c'est un inverse, pas -125.

(b) $12^{-1} = \frac{1}{12}$: c'est l'inverse de 12.

(c) $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$: positif, car l'exposant 2 est pair.

(d) $7^0 = 1$ (car $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$).

(e) On retourne la fraction : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

(f) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{1} = 6$: l'inverse de $\frac{1}{6}$ est 6.

(g) $(-1)^{-7} = \frac{1}{(-1)^7} = \frac{1}{-1} = -1$: négatif, car l'exposant 7 est impair.

(h) $(-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = \frac{1}{-1\,000} = -\frac{1}{1\,000}$: négatif, car l'exposant 3 est impair.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : écrire un nombre comme une puissance d'exposant négatif**

(a) $\frac{1}{6^4} = 6^{-4}$.

(b) $\frac{1}{11 \times 11 \times 11} = \frac{1}{11^3} = 11^{-3}$.

(c) $\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$.

(d) $0{,}000\,1 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$.

(e) $\frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$.

(f) $(-2)^5 = -32$, donc $-\frac{1}{32} = \frac{1}{(-2)^5} = (-2)^{-5}$ (exposant 5 impair, donc négatif).

(g) $\frac{7}{3}$ est l'inverse de $\frac{3}{7}$, donc $\frac{7}{3} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$.

Ex. 11 ★☆☆ **Le signe d'une puissance d'exposant négatif**

(a) Positif : la base 7 est positive. L'exposant négatif ne rend pas le nombre négatif ($7^{-5} = \frac{1}{16\,807}$).

(b) Positif : la base est négative mais l'exposant 4 est pair ($(-3)^{-4} = \frac{1}{81}$).

(c) Négatif : la base est négative et l'exposant 3 est impair ($(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = -\frac{1}{343}$).

(d) Négatif : sans parenthèses, la base est 2 et le « − » s'applique au résultat : $-2^{-4} = -\frac{1}{16}$.

Ex. 11 (suite)

(e) Négatif : la base est négative et l'exposant 5 est impair ($\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^5 = -32$).

(f) Positif : la base est négative mais l'exposant 2 est pair ($(-0{,}3)^{-2} = \frac{1}{0{,}09} = \frac{100}{9}$).

Ex. 12 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) Lina a tort : 6^{-2} est l'inverse de 6^2, pas un opposé. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$. Le bon résultat est $\frac{1}{36}$.

(b) Noé a tort : il a pris l'opposé au lieu de l'inverse. $7^{-1} = \frac{1}{7}$. Le bon résultat est $\frac{1}{7}$.

(c) Inès a tort : elle n'a pas retourné la fraction. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Le bon résultat est $\frac{25}{4}$.

(d) Tom a tort : l'exposant négatif ne donne pas le signe. $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$, positif car l'exposant 2 est pair. Le bon résultat est $\frac{1}{25}$.

(e) Sacha a tort : $0{,}1^{-2} = \frac{1}{0{,}1^2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$. Avec une base entre 0 et 1, le résultat est plus grand que 1. Le bon résultat est 100.

Ex. 13 ★★☆ **Écriture décimale et comparaison**

(a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}062\,5$.
Donc $2^{-4} = 0{,}062\,5$.

(b) $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$: c'est un inverse, pas un nombre négatif.
Donc $10^{-6} = 0{,}000\,001$.

(c) $0{,}5^3 = 0{,}125$, donc $0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}125} = 8$. C'est plus grand que 1, car la base est comprise entre 0 et 1.

(d) $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$ et $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$. Deux fractions de numérateur 1 : la plus grande a le plus petit dénominateur. Comme $81 < 128$, $\frac{1}{81} > \frac{1}{128}$.
Donc $9^{-2} > 2^{-7}$.

(e) $5^{-1} = 0{,}2$; $(-2)^{-1} = -0{,}5$; $0{,}5^{-1} = 2$; $10^{-1} = 0{,}1$.
Donc $(-2)^{-1} < 10^{-1} < 5^{-1} < 0{,}5^{-1}$.

Ex. 14 ★★★ **Problème : dilutions successives**

(a) On divise 3 fois par 10 : $1 \div 10 \div 10 \div 10 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ (définition $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$).
Donc la concentration vaut $10^{-3} = 0{,}001$ g/L.

(b) Non. Une concentration ne peut pas être négative, et 10^{-2} est l'inverse de 10^2, pas l'opposé de 100 : $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Après 2 dilutions, il reste 0,01 g/L.

(c) Après n dilutions, la concentration vaut 10^{-n} g/L. $10^{-4} = 0{,}000\,1$: c'est plus grand que 0,000 05, le colorant est encore visible. $10^{-5} = 0{,}000\,01$: c'est plus petit que 0,000 05. Il faut donc au minimum 5 dilutions.

Ex. 14 (suite)

(d) Après 1 étape : $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ g/L (l'inverse de 4, pas -4). Après 3 étapes : $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0{,}015\,625$ g/L.

(e) 3 étapes par 4 donnent $4^{-3} = 0{,}015\,625$ g/L et 2 dilutions par 10 donnent $10^{-2} = 0{,}01$ g/L. Comme $0{,}015\,625 > 0{,}01$, c'est la méthode « divisé par 4 » en 3 étapes qui est la plus concentrée.

Ex. 15 ★★★ **Comparer des puissances d'exposant négatif**

(a) Faux. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ et $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. Les numérateurs sont égaux, donc la fraction au plus grand dénominateur est la plus petite : $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$.
Donc $3^{-2} < 2^{-3}$.

(b) On retourne la fraction : $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$. Comme $0{,}2 = \frac{1}{5}$: $0{,}2^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$. Ce résultat est plus grand que 1, car la base est comprise entre 0 et 1.

(c) $(-6)^{-1} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$ et $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$. Non : les deux sont négatifs parce que la base est négative et que l'exposant est impair. Par exemple, $(-2)^{-4} = \frac{1}{16}$ est positif.

(d) $(-6)^{-1} = -\frac{1}{6}$, $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$, $(-9)^0 = 1$ (car $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$), $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{16}$ et $0{,}2^{-3} = 125$. Comme $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$, on a $-\frac{1}{6} < -\frac{1}{8}$; et $\frac{25}{16} > 1$ car $25 > 16$. Ordre : $(-6)^{-1} < (-2)^{-3} < (-9)^0 < \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} < 0{,}2^{-3}$.

(e) $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, et $\frac{2}{3}$ est l'inverse de $\frac{3}{2}$.
Donc $\frac{8}{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ et $n = -3$.

Ex. 16 ★★★ **Problème : la feuille pliée**

(a) Chaque pliage divise l'aire par 2 : $1 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$. Écriture décimale : $2^{-5} = \frac{1}{32} = 0{,}031\,25$.
L'aire du dessus vaut donc 0,031 25 m².

(b) Chaque pliage double le nombre d'épaisseurs : $2^5 = 32$ épaisseurs. Épaisseur du paquet : $32 \times 0{,}1 = 3{,}2$ mm.

(c) $2^5 \times 2^{-5} = 2^0 = 1$ (car $5 + (-5) = 0$). Aire du dessus × nombre d'épaisseurs = 1 m² : en dépliant, on retrouve toujours l'aire de la feuille de départ.

(d) $10^4 \times 2^{-5} = \frac{10\,000}{32} = 312{,}5$. L'aire du dessus vaut 312,5 cm².

(e) Après 8 pliages, l'aire vaut $2^{-8} = \frac{1}{256}$ m², soit $\frac{10\,000}{256} = 39{,}062\,5$ cm². Comme $39{,}062\,5 < 50$, l'affirmation de Lou est vraie.

3. Produit de puissances d'un même nombre

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : une seule puissance**

(a) $7^4 \times 7^3 = 7^{4+3} = 7^7$

(b) $9^{-2} \times 9^6 = 9^{(-2)+6} = 9^4$

(c) $4^{-3} \times 4^{-5} = 4^{(-3)+(-5)} = 4^{-8}$: les deux exposants sont négatifs, la somme est donc négative.

(d) $11 = 11^1$, donc $11 \times 11^5 = 11^{1+5} = 11^6$ (on n'oublie pas l'exposant 1).

(e) $(-3)^5 \times (-3)^{-2} = (-3)^{5+(-2)} = (-3)^3$

(f) $0{,}3^{-4} \times 0{,}3^7 = 0{,}3^{(-4)+7} = 0{,}3^3$

(g) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+(-3)} = \left(\frac{2}{5}\right)^0$, c'est-à-dire 1.

(h) $8^0 \times 8^{-6} = 8^{0+(-6)} = 8^{-6}$ (car $8^0 = 1$).

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : l'exposant manquant**

(a) $3 + 7 = 10$, donc l'exposant manquant est 7 : $5^3 \times 5^7 = 5^{10}$.

(b) $(-5) + 4 = -1$, donc l'exposant manquant est -5 : $2^{-5} \times 2^4 = 2^{-1}$.

(c) $(-6) + 4 = -2$, donc l'exposant manquant est 4 : $10^{-6} \times 10^4 = 10^{-2}$.

(d) $(-3) + (-6) = -9$, donc l'exposant manquant est -6 : $(-7)^{-3} \times (-7)^{-6} = (-7)^{-9}$.

(e) $12 = 12^1$ et $3 + 1 = 4$, donc l'exposant manquant est 3 : $12^3 \times 12 = 12^4$.

(f) $1 = 0{,}6^0$ et $8 + (-8) = 0$, donc l'exposant manquant est -8 : $0{,}6^8 \times 0{,}6^{-8} = 1$.

Ex. 19 ★☆☆ **Regrouper ou calculer ?**

(a) Même exposant : $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$.

(b) Même exposant : $5^{-2} \times 2^{-2} = (5 \times 2)^{-2} = 10^{-2}$, soit 0,01.

(c) Bases différentes et exposants différents : rien ne se regroupe. $2^2 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$.

(d) C'est une somme, elle ne se regroupe pas : $4^2 + 4^3 = 16 + 64 = 80$.

(e) Même exposant : $(-2)^3 \times 4^3 = ((-2) \times 4)^3 = (-8)^3$.

(f) C'est une différence, elle ne se regroupe pas : $7^2 - 7 = 49 - 7 = 42$.

Ex. 20 ★★☆ **Se ramener à une même base**

(a) $16 = 2^4$, donc $16 \times 2^{-7} = 2^4 \times 2^{-7} = 2^{4+(-7)} = 2^{-3}$. Ainsi $16 \times 2^{-7} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

(b) $49 = 7^2$, donc $49^3 = (7^2)^3 = 7^6$, et $\frac{1}{7} = 7^{-1}$. On cherche n tel que $6 + n = -1$, donc $n = -7$. Ainsi $49^3 \times 7^{-7} = \frac{1}{7}$: l'exposant manquant est -7.

(c) $25^{-2} = (5^2)^{-2} = 5^{-4}$ et $125 = 5^3$, donc $25^{-2} \times 125 = 5^{(-4)+3} = 5^{-1}$. Ainsi $25^{-2} \times 125 = 5^{-1} = 0{,}2$.

(d) $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$ et $4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{-6}$, donc $8^2 \times 4^{-3} = 2^{6+(-6)} = 2^0 = 1$. Noé a raison.

Ex. 21 ★★☆ **Les calculs de Lina**

(a) Non : elle a multiplié les exposants. Dans un produit, on les ajoute : $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$.

(b) Non : on ne multiplie pas les bases. $7 = 7^1$, donc $7^5 \times 7 = 7^{5+1} = 7^6$.

(c) Non : c'est une erreur de signe, car $(-6) + 2 = -4$. Donc $3^{-6} \times 3^2 = 3^{-4}$.

(d) Non : une somme ne se regroupe pas. $5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$, alors que $5^4 = 625$.

(e) Oui : $(-2) + 5 = 3$, donc $4^{-2} \times 4^5 = 4^3$. Lina a raison.

Ex. 22 ★★★ **Calculs rédigés en plusieurs étapes**

(a) $A = \frac{3^5 \times 3^{-8}}{3^{-1}}$; $A = \frac{3^{-3}}{3^{-1}}$ (car $5 + (-8) = -3$) ; $A = 3^{-2}$ (car $-3 - (-1) = -3 + 1 = -2$) ; $A = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
Donc $A = \frac{1}{9}$.

(b) (-5) s'écrit $(-5)^1$: il ne faut pas oublier l'exposant 1.
$B = (-5)^1 \times (-5)^{-4} \times (-5)^2$; $B = (-5)^{-1}$ (car $1 + (-4) + 2 = -1$) ; $B = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$.
Donc $B = -\frac{1}{5}$.

(c) $C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$; $C = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ (car $4 + (-6) = -2$) ; $C = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (on prend l'inverse) ; $C = \frac{9}{4}$.
Donc $C = \frac{9}{4}$.

(d) $D = \frac{10^{-3} \times 10^7}{(10^2)^{-1}}$; $D = \frac{10^4}{10^{-2}}$ (car $-3 + 7 = 4$ et $2 \times (-1) = -2$) ; $D = 10^6$ (car $4 - (-2) = 4 + 2 = 6$) ; $D = 1\,000\,000$.
Donc $D = 1\,000\,000$.

(e) $9 = 3^2$, donc $9^2 = (3^2)^2 = 3^4$, et $27 = 3^3$, donc $27^{-1} = 3^{-3}$. $E = \frac{3^4 \times 3^{-6}}{3^{-3}}$; $E = \frac{3^{-2}}{3^{-3}}$ (car $4 + (-6) = -2$) ; $E = 3^1$ (car $-2 - (-3) = -2 + 3 = 1$) ; $E = 3$.
Donc $E = 3$.

Ex. 23 ★★★ **Comparer sans calculatrice**

(a) $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$ (car $2 \times 5 = 10$) et $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$ (car $3 \times 3 = 9$). $2^{10} = 1\,024$ et $2^9 = 512$.
Donc 4^5 est le plus grand.

(b) $16^{-2} = (2^4)^{-2} = 2^{-8}$, $4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{-6}$ et $8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$. Or $2^{-8} = \frac{1}{256}$, $2^{-6} = \frac{1}{64}$ et $2^{-3} = \frac{1}{8}$: plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite.
Donc $16^{-2} < 4^{-3} < 8^{-1}$.

(c) $100^3 = (10^2)^3 = 10^6$, donc $100^3 \times 10^{-8} = 10^{6+(-8)} = 10^{-2}$ (car $6 + (-8) = -2$). $1\,000^{-1} = (10^3)^{-1} = 10^{-3}$.
Or $10^{-2} = 0{,}01$ et $10^{-3} = 0{,}001$.
Donc $100^3 \times 10^{-8} > 1\,000^{-1}$.

(d) Même exposant : $2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5 = 100\,000$.
Exposants différents : rien ne se regroupe, on calcule $2^5 \times 5^4 = 32 \times 625 = 20\,000$.
Donc $2^5 \times 5^5$ est le plus grand.

(e) $(-4)^3 \times (-4)^4 = (-4)^{3+4} = (-4)^7$ et $(-4)^2 \times (-4)^4 = (-4)^{2+4} = (-4)^6$. L'exposant 7 est impair, donc $(-4)^7$ est négatif. L'exposant 6 est pair, donc $(-4)^6$ est positif.
Donc $(-4)^2 \times (-4)^4$ est le plus grand, même si son exposant est plus petit.

Ex. 24 ★★★ **La feuille pliée en deux**

(a) Chaque pli multiplie le nombre de couches par 2 : après 5 plis, on a $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ couches.

(b) Les 5 premiers plis donnent 2^5 couches, et les 3 suivants multiplient encore par 2^3 : $2^5 \times 2^3 = 2^8$ (car $5 + 3 = 8$, on ajoute les exposants). Mia obtient 256 couches.

(c) L'aire est divisée par 2 à chaque pli : après 8 plis, l'aire d'une couche vaut $1 \times 2^{-8} = 2^{-8} = \frac{1}{256}$ m², soit 0,003 906 25 m².

(d) Nombre de couches × aire d'une couche $= 2^8 \times 2^{-8} = 2^0$ (car $8 + (-8) = 0$) $= 1$. On retrouve bien l'aire de la feuille : 1 m².

(e) Le paquet compte $2^8 = 256$ couches de 0,1 mm chacune : $256 \times 0{,}1 = 25{,}6$. Le paquet a une épaisseur de 25,6 mm.

4. *Quotient de puissances d'un même nombre*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : une seule puissance**

(a) $\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$

(b) $\frac{4^3}{4^8} = 4^{3-8} = 4^{-5}$
(le haut moins le bas, pas l'inverse)

(c) $\frac{2^6}{2^{-3}} = 2^{6-(-3)} = 2^{6+3} = 2^9$

(d) $\frac{11^{-4}}{11^{-7}} = 11^{-4-(-7)} = 11^{-4+7} = 11^3$

(e) $\frac{(-2)^3}{(-2)^7} = (-2)^{3-7} = (-2)^{-4}$

(f) $\frac{0{,}3^{-1}}{0{,}3^4} = 0{,}3^{-1-4} = 0{,}3^{-5}$

(g) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-(-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Ex. 26 ★★☆ **Automatismes : l'exposant manquant**

(a) $? - 3 = 4$, donc $? = 7 : \frac{5^7}{5^3} = 5^4$

(b) $6 - ? = -2$, donc $? = 8 : \frac{8^6}{8^8} = 8^{-2}$

(c) $-2 - ? = 5$, donc $? = -7 : -2 - (-7) = -2 + 7 = 5$

(d) $? - (-4) = 1$, soit $? + 4 = 1$, donc $? = -3$

(e) $1 = 6^0$, donc $9 - ? = 0$ et $? = 9 : \frac{6^9}{6^9} = 6^0 = 1$

(f) $? - 2 = -2$, donc $? = 0 : \frac{1{,}5^0}{1{,}5^2} = 1{,}5^{-2}$

Ex. 27 ★★☆ **Puissance, puis valeur**

(a) $\frac{2^3}{2^8} = 2^{3-8} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

(b) $\frac{10^{-2}}{10^3} = 10^{-2-3} = 10^{-5} = 0{,}000\,01$

(c) $\frac{(-7)^5}{(-7)^3} = (-7)^{5-3} = (-7)^2 = 49$
(exposant pair : positif)

(d) $\frac{3^{-3}}{3^{-1}} = 3^{-3-(-1)} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(e) $\frac{(-5)^{-1}}{(-5)^2} = (-5)^{-1-2} = (-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$
(exposant impair : négatif)

(f) $\frac{12^{-2}}{12^{-2}} = 12^{-2-(-2)} = 12^0 = 1$

Ex. 28 ★★☆ **Un produit au dénominateur**

(a) $A = \frac{3^7}{3^6}$ (car $2 + 4 = 6$) ; $A = 3^1$ (car $7 - 6 = 1$) ; $A = 3$.
Donc $A = 3$.

(b) $B = \frac{2^{-1}}{2^{-4}}$ (car $5 + (-9) = -4$) ; $B = 2^3$ (car $-1 - (-4) = -1 + 4 = 3$) ; $B = 8$.
Donc $B = 8$.

(c) $C = \frac{10^{-2}}{10^{-5}}$ (car $4 + (-6) = -2$ et $3 + (-8) = -5$) ; $C = 10^3$ (car $-2 - (-5) = 3$) ; $C = 1\,000$.
Donc $C = 1\,000$.

(d) $D = \frac{24^3}{6^3}$ (car $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$) ; $D = \left(\frac{24}{6}\right)^3 = 4^3$; $D = 64$.
Donc $D = 64$.

Ex. 29 ★★☆ **Erreurs d'élèves sur les quotients**

(a) Non : on ne divise pas les exposants, on les soustrait. $\frac{9^{12}}{9^3} = 9^{12-3} = 9^9$. Lina a tort.

(b) Tom a fait le bas moins le haut. On fait le haut moins le bas : $\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$.

(c) Faux : $-3-(-5) = -3+5 = 2$.
Donc $\frac{4^{-3}}{4^{-5}} = 4^2 = 16$.

(d) Les bases sont différentes : on ne soustrait pas les exposants. Même exposant : $\frac{20^3}{5^3} = \left(\frac{20}{5}\right)^3 = 4^3 = 64$.

(e) Non : un quotient de deux nombres égaux non nuls vaut 1. $\frac{(-8)^5}{(-8)^5} = (-8)^0 = 1$. Maya a tort.

Ex. 30 ★★★ **Calculs rédigés avec des exposants négatifs**

(a) $A = \frac{2^7 \times 2^{-10}}{2^{-5}}$; $A = \frac{2^{-3}}{2^{-5}}$ (car $7+(-10) = -3$) ; $A = 2^2$ (car $-3-(-5) = -3+5 = 2$) ; $A = 4$.
Donc $A = 2^2 = 4$.

(b) $B = \frac{(3^{-2})^3 \times 3^4}{3^{-1}}$; $B = \frac{3^{-6} \times 3^4}{3^{-1}}$ (car $-2 \times 3 = -6$) ; $B = \frac{3^{-2}}{3^{-1}}$ (car $-6+4 = -2$) ; $B = 3^{-1}$ (car $-2-(-1) = -2+1 = -1$) ; $B = \frac{1}{3}$.
Donc $B = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

(c) On calcule d'abord le dénominateur : $C = \frac{0{,}2^{-1}}{0{,}2^{-3}}$ (car $3+(-6) = -3$) ; $C = 0{,}2^2$ (car $-1-(-3) = -1+3 = 2$) ; $C = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$.
Donc $C = 0{,}2^2 = 0{,}04$.

(d) $D = \frac{(-4)^6}{(-4)^9}$ (car $2+7 = 9$) ; $D = (-4)^{-3}$ (car $6-9 = -3$, exposant du haut moins exposant du bas). Signe : la base est négative et l'exposant -3 est impair, donc D est négatif. $D = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$.
Donc $D = (-4)^{-3} = -\frac{1}{64}$.

Ex. 31 ★★★ **Vrai ou faux sur les quotients**

(a) Faux : on se ramène à la base 5. $25^{-2} = (5^2)^{-2} = 5^{-4}$ (car $2 \times (-2) = -4$), donc $\frac{25^{-2}}{5^{-3}} = \frac{5^{-4}}{5^{-3}} = 5^{-1}$ (car $-4-(-3) = -4+3 = -1$). L'égalité est fausse : le quotient vaut $5^{-1} = 0{,}2$.

(b) Faux : $(-3)^4 \times (-3)^{-7} = (-3)^{-3}$ (car $4+(-7) = -3$), puis $\frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-5}} = (-3)^2$ (car $-3-(-5) = -3+5 = 2$). L'exposant 2 est pair : $(-3)^2 = 9$, à ne pas confondre avec $-3^2 = -9$. L'égalité est fausse : le quotient vaut $(-3)^2 = 9$.

(c) Faux : $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ (car $-1-2 = -3$). Un exposant négatif donne l'inverse : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$. L'égalité est fausse : le quotient vaut $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{8}$.

Ex. 31 (suite)

(d) Vrai : $(2^{-3})^4 = 2^{-12}$ (car $-3 \times 4 = -12$), puis $\frac{2^{-12}}{2^{-10}} = 2^{-2}$ (car $-12-(-10) = -12+10 = -2$), et $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. L'égalité est vraie.

(e) Faux : les deux puissances ont le même exposant, donc $\frac{21^{-2}}{7^{-2}} = \left(\frac{21}{7}\right)^{-2} = 3^{-2}$. On ne divise pas les exposants : -2 divisé par -2 ne donne pas l'exposant du résultat. Un exposant négatif donne l'inverse : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. L'égalité est fausse : le quotient vaut $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Ex. 32 ★★★ **Problème : la clé USB de Maëlys**

(a) $\frac{2^{36}}{2^{22}} = 2^{36-22} = 2^{14} = 16\,384$. Maëlys peut stocker 16 384 photos.

(b) $\frac{2^{30}}{2^{22}} = 2^{30-22} = 2^8 = 256$. Une vidéo est 256 fois plus lourde qu'une photo.

(c) $\frac{2^{30}}{2^{36}} = 2^{30-36} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$ (exposant du haut moins exposant du bas : le résultat est inférieur à 1). Une vidéo occupe $\frac{1}{64}$ de la clé, soit 0,015 625.

(d) $4^{16} = (2^2)^{16} = 2^{32}$ (car $2 \times 16 = 32$). $\frac{2^{36}}{2^{32}} = 2^{36-32} = 2^4 = 16$. La clé de Maëlys est 16 fois plus grande que la carte de Noé.

5. *Puissance d'une puissance et calculs combinés*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : puissance d'une puissance**

(a) On multiplie les exposants : $(3^3)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6$, et non 3^9 ni 3^5.

(b) $(5^{-2})^3 = 5^{(-2)\times 3} = 5^{-6}$.

(c) $(2^{-3})^{-4} = 2^{(-3)\times(-4)} = 2^{12}$ (moins par moins donne plus), donc $\frac{1}{2^{12}} = 2^{-12}$.

(d) $(7^2)^3 = 7^6$, donc $\frac{7^6}{7^6} = 7^{6-6} = 7^0$ (et $7^0 = 1$).

(e) $((-2)^2)^3 = (-2)^{2\times 3} = (-2)^6$; l'exposant est pair, donc ce nombre est positif (il vaut 64).

(f) $(0{,}5^{-1})^3 = 0{,}5^{(-1)\times 3} = 0{,}5^{-3}$.

(g) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{(-2)\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

(h) $(10^{-4})^{-2} = 10^8$, puis $10^8 \times 10^{-3} = 10^{8+(-3)} = 10^5$.

Ex. 34 ★☆☆ Automatismes : l'exposant manquant

(a) Il faut $5 + \cdots = -2$, donc l'exposant est -7 : $2^5 \times 2^{-7} = 2^{-2}$.

(b) Il faut $\cdots - 4 = -6$, donc l'exposant est -2 : $\frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-6}$.

(c) Il faut $2 - \cdots = 7$, donc l'exposant est -5, car $2 - (-5) = 7$: $\frac{7^2}{7^{-5}} = 7^7$.

(d) Il faut $\cdots \times 3 = -12$, donc l'exposant est -4 : $(5^{-4})^3 = 5^{-12}$.

(e) Il faut $(-2) \times \cdots = 6$, donc l'exposant est -3 : $(10^{-2})^{-3} = 10^6$.

(f) Il faut $\cdots + (-3) = 0$, donc l'exposant est 3 : $0{,}1^3 \times 0{,}1^{-3} = 0{,}1^0 = 1$.

Ex. 35 ★★☆ Se ramener à une même base

(a) $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$ (car $3 \times 3 = 9$) et $4^{-5} = (2^2)^{-5} = 2^{-10}$ (car $2 \times (-5) = -10$). $A = 2^{9+(-10)} = 2^{-1}$.
Donc $A = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

(b) $9^{-2} = (3^2)^{-2} = 3^{-4}$ et $27 = 3^3$. $B = \frac{3^{-4} \times 3^5}{3^3} = \frac{3^1}{3^3} = 3^{-2}$.
Donc $B = \frac{1}{9}$.

(c) $125 = 5^3$ et $25^{-2} = (5^2)^{-2} = 5^{-4}$. $C = 5^{3+(-4)} = 5^{-1}$.
Donc $C = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

(d) $0{,}01 = 10^{-2}$, donc $0{,}01^3 = 10^{-6}$, et $1\,000 = 10^3$.
$D = 10^{-6+3} = 10^{-3}$.
Donc $D = 0{,}001$.

Ex. 36 ★★☆ Les erreurs de la classe

(a) Pour une puissance de puissance, on multiplie les exposants, on ne les ajoute pas : $(6^{-2})^3 = 6^{(-2)\times 3} = 6^{-6}$.
Donc le résultat est $6^{-6} = \frac{1}{46\,656}$.

(b) Tom a oublié les parenthèses autour de l'exposant négatif : $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$.
Donc $\frac{2^3}{2^{-4}} = 2^7 = 128$.

(c) L'exposant 6 est bon (car $3 \times 2 = 6$), mais le signe est faux : une puissance d'exposant pair d'un nombre négatif est positive.
Donc $((-0{,}1)^3)^2 = (-0{,}1)^6 = 0{,}000\,001$.

(d) Même exposant : on multiplie les bases et on garde l'exposant. $4^3 \times 25^3 = (4 \times 25)^3 = 100^3 = (10^2)^3 = 10^6$ (car $2 \times 3 = 6$).
Donc le résultat est $1\,000\,000$, et non 100^6.

Ex. 37 ★★☆ Calculs rédigés en étapes

(a) $A = \frac{3^4}{3^{-1}}$ (car $-2 + 6 = 4$) ; $A = 3^5$ (car $4 - (-1) = 5$) ; $A = 243$.
Donc $A = 243$.

(b) $B = \frac{10^{-6} \times 10^4}{10^{-5}}$ (car $(-2) \times 3 = -6$) ; $B = \frac{10^{-2}}{10^{-5}}$ (car $-6 + 4 = -2$) ; $B = 10^3$ (car $-2 - (-5) = 3$).
Donc $B = 1\,000$.

(c) $C = (2 \times 5)^{-4} \times 10^6$ (même exposant) ; $C = 10^{-4} \times 10^6$; $C = 10^2$ (car $-4 + 6 = 2$).
Donc $C = 100$.

(d) Les puissances d'abord : $8 \times 2^{-5} = 2^3 \times 2^{-5} = 2^{-2} = 0{,}25$ et $7^0 = 1$. $D = 0{,}25 - 1$.
Donc $D = -0{,}75$.

Ex. 38 ★★★ Vrai ou faux ? Justifie.

(a) $-10^2 = -100$ (le signe moins ne porte pas sur la base 10). $(-100)^3$ a un exposant impair, donc il est négatif : $(-10^2)^3 = (-100)^3 = -1\,000\,000 = -10^6$. Faux.

(b) $(4^{-3})^2 = 4^{-6}$ (car $(-3) \times 2 = -6$, et non -1 ni -5) ; $4^{-6} \times 4^4 = 4^{-2}$ (car $-6 + 4 = -2$) ; $4^{-2} = \frac{1}{16}$. Vrai.

(c) $(0{,}2^{-1})^2 = 0{,}2^{-2}$ (car $(-1) \times 2 = -2$) ; $0{,}2^{-2} \times 0{,}2^{-1} = 0{,}2^{-3}$ (car $-2 + (-1) = -3$) ; $0{,}2 = \frac{1}{5}$, donc $0{,}2^{-3} = 5^3 = 125$. Faux : $0{,}008 = 0{,}2^3$, or l'exposant est -3, pas 3.

(d) On multiplie les exposants : $(10^3)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6 = 1\,000\,000$. Faux : 10^9 vaudrait $10^3 \times 10^3 \times 10^3$, soit trois facteurs 10^3, et non deux.

(e) $0{,}001 = 10^{-3}$, donc $0{,}001^2 = (10^{-3})^2 = 10^{-6}$ (car $(-3) \times 2 = -6$) ; $\frac{10^{-6}}{10^{-4}} = 10^{-2}$ (car $-6 - (-4) = -6 + 4 = -2$) ; $10^{-2} = 0{,}01$. Vrai.

Ex. 39 ★★★ Problème : la feuille pliée

(a) Après 5 pliages, l'épaisseur est $0{,}1 \times 2^5 = 0{,}1 \times 32 = 3{,}2$ mm. La feuille mesure 3,2 mm d'épaisseur.

(b) Diviser 5 fois par 2, c'est multiplier par 2^{-5} : $600 \times 2^{-5} = \frac{600}{32} = 18{,}75$. La surface du dessus est de 18,75 cm².

(c) $(2^5)^2 = 2^{10}$ (car $5 \times 2 = 10$), donc $2^{10} = 32^2 = 1\,024$.
Épaisseur : $0{,}1 \times 1\,024 = 102{,}4$ mm, soit 10,24 cm.
Après 10 pliages, la feuille mesure 10,24 cm d'épaisseur.

(d) On compare : $\frac{0{,}1 \times 2^{20}}{0{,}1 \times 2^{10}} = \frac{2^{20}}{2^{10}} = 2^{10}$ (car $20 - 10 = 10$), soit 1 024. Ben a tort : après 20 pliages, la feuille est 1 024 fois plus épaisse qu'après 10 pliages, pas 2 fois.

Ex. 40 ★★★ **Comme au brevet : calculer puis comparer**

(a) $9^2 = (3^2)^2 = 3^4$ et $(3^{-2})^2 = 3^{-4}$ (car $(-2) \times 2 = -4$). $A = \frac{3^4 \times 3^{-5}}{3^{-4}}$; $A = \frac{3^{-1}}{3^{-4}}$ (car $4 + (-5) = -1$) ; $A = 3^3$ (car $-1 - (-4) = -1 + 4 = 3$) ; $A = 27$.

(b) $B = 2^2 \times 2^3 \times 5^3 \times 10^{-2}$; $B = 2^2 \times (2 \times 5)^3 \times 10^{-2}$ (même exposant) ; $B = 4 \times 10^3 \times 10^{-2}$; $B = 4 \times 10$ (car $3 + (-2) = 1$) ; $B = 40$. B est donc un entier.

(c) $4^{-1} = \frac{1}{4}$ et $(-3)^2 = 9$. Attention : -3^2 veut dire qu'on soustrait $3^2 = 9$ (la base est 3). $C = 5 \times \frac{1}{4} + 9 - 9$; $C = 1{,}25 + 0$; $C = 1{,}25$.

(d) $D = ((-2) \times (-5))^3$; $D = 10^3$: le produit de deux négatifs est positif, donc D est positif. $D = 1\,000$.

(e) $C = 1{,}25$, $A = 27$, $B = 40$ et $D = 1\,000$. Dans l'ordre croissant : $C < A < B < D$.

6. *Problèmes avec des puissances*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : multiplier ou diviser à chaque étape**

(a) Elle est multipliée par $2^6 = 64$ (et pas par $2 \times 6 = 12$).

(b) $3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$.

(c) Non. 4 doublements, c'est multiplier par $2^4 = 16$. Tom a calculé $2 \times 4 = 8$ au lieu de 2^4.

(d) Elle est multipliée par $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

(e) $\frac{80}{5} = 16 = 2^4$, donc $80 \times 2^{-4} = 5$: on a fait 4 étapes.

(f) Lundi est le départ, pas une étape : de lundi à jeudi, il y a 3 doublements. $50 \times 2^3 = 50 \times 8 = 400$: jeudi, la vidéo a 400 vues.

(g) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$: elle est multipliée par 81 après 4 étapes.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : préfixes et puissances de 10**

(a) giga : 10^9 ; méga : 10^6 ; kilo : 10^3 ; milli : 10^{-3} ; micro : 10^{-6} ; nano : 10^{-9}.

(b) $4 \text{ nm} = 4 \times 10^{-9} \text{ m} = 0{,}000\,000\,004 \text{ m}$.

(c) $\frac{10^9}{10^6} = 10^{9-6} = 10^3$: il y a 10^3 Mo dans 1 Go.

(d) $\frac{10^9}{10^3} = 10^{9-3} = 10^6$: elle peut contenir 10^6 fichiers.

(e) On divise le plus grand par le plus petit : $\frac{10^{-6}}{10^{-9}} = 10^{-6-(-9)} = 10^3 = 1\,000$. 1 μm est 1 000 fois plus grand que 1 nm.

(f) $0{,}005 \text{ m} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} = 5 \text{ mm}$.

Ex. 43 ★★☆ **La feuille pliée**

(a) Chaque pliage double le nombre d'épaisseurs. Après 3 pliages : $2^3 = 8$ épaisseurs. Après 7 pliages : $2^7 = 128$ épaisseurs.

(b) $128 \times 0{,}1 = 12{,}8$ mm, soit 1,28 cm. Après 7 pliages, la liasse fait 12,8 mm, c'est-à-dire 1,28 cm.

(c) Vrai. Après 10 pliages, il y a $2^{10} = 1\,024$ épaisseurs, donc $1\,024 \times 0{,}1 = 102{,}4$ mm $= 10{,}24$ cm. La liasse fait plus de 10 cm.

(d) 5 cm = 50 mm, et $50 \div 0{,}1 = 500$ épaisseurs. $2^8 = 256 < 500$ et $2^9 = 512 > 500$. Il faut au minimum 9 pliages.

Ex. 44 ★★☆ **Le tournoi par élimination**

(a) Les 64 joueurs jouent deux par deux : $64 \div 2 = 32$. Il y a 32 matchs au premier tour.

(b) À chaque tour, on divise par 2 le nombre de joueurs : $64 \times 2^{-3} = \frac{64}{8} = 8$. Après 3 tours, il reste 8 joueurs.

(c) $64 = 2^6$, donc on peut diviser 6 fois par 2 avant d'arriver à 1 joueur. Il faut 6 tours pour désigner le vainqueur.

(d) Non. Deux fois plus de joueurs, c'est $128 = 2^7$ joueurs : il faut 7 tours, donc un seul tour de plus, pas $2 \times 6 = 12$ tours. Hugo a tort.

Ex. 45 ★★☆ **La balle qui rebondit**

(a) La hauteur est multipliée par $0{,}5^4 = 0{,}062\,5$. Comme $0{,}5 = \frac{1}{2}$, on a $0{,}5^4 = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$.

(b) $3{,}2 \times 0{,}062\,5 = 0{,}2$ m. Après le 4e rebond, la balle remonte à 0,2 m, soit 20 cm.

(c) Léo a multiplié par 3 au lieu d'utiliser l'exposant 3. Après 3 rebonds, on multiplie par $0{,}5^3$: $3{,}2 \times 0{,}5^3 = 3{,}2 \times 0{,}125 = 0{,}4$ m. La balle remonte à 40 cm. D'ailleurs, 4,8 m est plus haut que le point de départ : c'était impossible.

(d) 3,2 m = 320 cm. Après 6 rebonds : $320 \times 2^{-6} = \frac{320}{64} = 5$ cm, c'est plus que 4 cm. Après 7 rebonds : $320 \times 2^{-7} = \frac{320}{128} = 2{,}5$ cm, c'est moins que 4 cm. La hauteur passe sous 4 cm pour la première fois au 7e rebond.

Ex. 46 ★★★ **La culture de bactéries**

(a) De 8 h à 10 h, il y a 120 minutes, et $120 \div 20 = 6$: il y a 6 doublements. Le nombre de bactéries est multiplié par $2^6 = 64$ (et non par $2 \times 6 = 12$) : $500 \times 2^6 = 500 \times 64 = 32\,000$. À 10 h, la culture compte 32 000 bactéries.

Ex. 46 **(suite)**

(b) Entre 9 h et 10 h, il y a 60 minutes, et $60 \div 20 = 3$: il y a 3 doublements. Le nombre de bactéries est multiplié par $2^3 = 8$, et non par 2. Maël a tort.

(c) $8\,000 \div 500 = 16 = 2^4$, donc $8\,000 = 500 \times 2^4$: il faut 4 doublements après 8 h (à 8 h, on n'a encore fait aucun doublement). $4 \times 20 = 80$ minutes, soit 1 h 20 min. La culture compte 8 000 bactéries à 9 h 20.

(d) Diviser par 10 à chaque dilution revient à multiplier par 10^{-n} après n dilutions. $32\,000 \times 10^{-3} = 32\,000 \times 0{,}001 = 32$. Il reste 32 bactéries après 3 dilutions.

Ex. 47 ★★★ **La clé USB d'Ambre**

(a) 32 Go $= 32 \times 10^9$ octets et 4 Mo $= 4 \times 10^6$ octets.

(b) $\frac{32 \times 10^9}{4 \times 10^6} = \frac{32}{4} \times 10^{9-6} = 8 \times 10^3 = 8\,000$ (car $9 - 6 = 3$). Ambre peut stocker au maximum 8 000 photos sur sa clé.

(c) On met tout en octets : 4 Mo $= 4 \times 10^6$ octets et 20 ko $= 20 \times 10^3$ octets. On divise le plus grand par le plus petit : $\frac{4 \times 10^6}{20 \times 10^3} = 0{,}2 \times 10^3 = 200$. Une photo est 200 fois plus lourde que le fichier texte.

(d) $2^{10} = 1\,024$ et $10^3 = 1\,000$, donc $2^{10} > 10^3$. Un Kio vaut un peu plus qu'un ko : 24 octets de plus.

(e) Faux. $2^{30} = (2^{10})^3$ (car $10 \times 3 = 30$), donc $2^{30} = 1\,024^3$. Et $10^9 = (10^3)^3 = 1\,000^3$. Comme $1\,024 > 1\,000$, on a $1\,024^3 > 1\,000^3$: 2^{30} est plus grand que 10^9.

Ex. 48 ★★★ **D'après une question de brevet : au microscope**

(a) Cheveu : 60×10^{-6} m. Globule rouge : 8×10^{-6} m. Virus : $100 \times 10^{-9} = 10^2 \times 10^{-9} = 10^{-7}$ m (car $2 + (-9) = -7$).

(b) On divise le plus grand par le plus petit, dans la même unité : $\frac{8 \times 10^{-6}}{10^{-7}} = 8 \times 10^{-6-(-7)} = 8 \times 10^1 = 80$ (car $-6 - (-7) = 1$). Le globule rouge est 80 fois plus grand que le virus.

(c) Première erreur : Sacha divise 100 nm par 8 μm sans convertir, alors que les deux tailles ne sont pas dans la même unité. Seconde erreur : il annonce le virus plus grand alors qu'il est plus petit ; il faut diviser la plus grande taille par la plus petite. Le bon résultat : le globule rouge est 80 fois plus grand que le virus.

(d) $10^{-7} \times 10^3 = 10^{-7+3} = 10^{-4}$ m (car $-7 + 3 = -4$). 10^{-4} m $= 0{,}000\,1$ m $= 0{,}1$ mm. Sur l'image, le virus mesure 10^{-4} m, soit 0,1 mm.