benprof particulier.fr

1. Rappels de 3e : puissances d'un même nombre, exposants négatifs

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : valeur d'une puissance**

(a) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (et non $2 \times 3 = 6$).

(b) Par définition, $3^0 = 1$ (et non 0).

(c) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$: c'est un nombre positif, ni -8 ni -6.

(d) $10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$: le 1 est au troisième rang après la virgule.

(e) $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$: l'exposant 2 est pair, donc le résultat est positif.

(f) $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$: c'est l'inverse de 5.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : une seule puissance**

(a) Produit : on ajoute les exposants, $3 + 4 = 7$, donc $a^3 \times a^4 = a^7$
(et non a^{12}).

(b) Produit : $5 + (-8) = -3$, donc $10^5 \times 10^{-8} = 10^{-3}$.

(c) Quotient : $6 - 2 = 4$, donc $\frac{a^6}{a^2} = a^4$
(et non a^3 : on soustrait, on ne divise pas).

(d) Quotient : $-1 - (-5) = -1 + 5 = 4$, donc $\frac{2^{-1}}{2^{-5}} = 2^4$.

(e) Puissance de puissance : $2 \times 3 = 6$, donc $(a^2)^3 = a^6$.

(f) Quotient : $-3 - 4 = -7$, donc $\frac{13^{-3}}{13^4} = 13^{-7}$.

(g) Puissance de puissance : $(-2) \times (-4) = 8$, donc $(3^{-2})^{-4} = 3^8$.

Ex. 3 ★★☆ **Les calculs de Lina**

(a) Faux. Un exposant négatif donne un inverse, pas un nombre négatif : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$. Lina a calculé $5 \times (-2)$ par erreur.

(b) Faux. Pour un produit, on ajoute les exposants : $2 + 3 = 5$.
Donc $5^2 \times 5^3 = 5^5 = 3\,125$. Lina a multiplié les exposants.

(c) Faux. Pour un quotient : $4 - (-1) = 4 + 1 = 5$.
Donc $\frac{6^4}{6^{-1}} = 6^5$. Lina a oublié les parenthèses autour de -1.

(d) Faux. Une somme ne se regroupe pas :
$3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$, alors que $3^5 = 243$.

Ex. 3 (suite)

(e) Vrai. Même base -2, produit : $4 + (-1) = 3$, donc $(-2)^4 \times (-2)^{-1} = (-2)^3 = -8$. L'exposant 3 est impair, donc le résultat est négatif. Lina a raison.

Ex. 4 ★★☆ **Simplifier en plusieurs étapes**

(a) Au numérateur : $5 + (-9) = -4$, donc $A = \frac{2^{-4}}{2^{-6}}$. Puis $-4 - (-6) = -4 + 6 = 2$, donc $A = 2^2 = 4$. A est un entier.

(b) $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$, puis $-6 + 4 = -2$, donc $B = \frac{10^{-2}}{10^{-5}}$. Puis $-2 - (-5) = 3$, donc $B = 10^3 = 1\,000$.

(c) $25 = 5^2$, donc $25^2 = (5^2)^2 = 5^4$. Puis $4 + (-7) = -3$, donc $C = 5^{-3} = \frac{1}{125}$.

(d) Au numérateur : $5 + (-4) = 1$, donc $D = \frac{(-3)^1}{(-3)^{-2}}$. Puis $1 - (-2) = 3$, donc $D = (-3)^3 = -27$
(exposant impair : résultat négatif).

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux : les affirmations de Malo**

(a) Quotient de puissances d'un même nombre :
$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$. Puis $3^4 \times 3^{-4} = 3^{4+(-4)} = 3^0$. Le calcul des exposants est juste, mais $3^0 = 1$ et non 0.
L'affirmation est fausse : ce nombre vaut 1.

(b) $(x^{-2})^3 = x^{(-2)\times 3} = x^{-6}$. Au numérateur :
$5 + (-6) = -1$, donc on obtient x^{-1}. Puis $\frac{x^{-1}}{x^{-4}} = x^{-1-(-4)} = x^{-1+4} = x^3$. L'affirmation est vraie.

(c) On a quatre fois le même terme : $4^{-1} + 4^{-1} + 4^{-1} + 4^{-1} = 4 \times 4^{-1} = 4 \times \frac{1}{4} = 1$. On peut aussi écrire $4^1 \times 4^{-1} = 4^0 = 1$. L'affirmation est vraie.

(d) Les bases sont différentes et les exposants aussi : rien ne se regroupe. $2^3 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200$, alors que $10^5 = 100\,000$. L'affirmation est fausse.

(e) La puissance passe avant le signe moins :
$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$. Avec les parenthèses, $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ (exposant pair). Comme $-16 \neq 16$, l'affirmation est fausse.

Ex. 6 ★★★ **Montrer qu'un nombre est entier**

(a) $8 = 2^3$, donc $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$; $4 = 2^2$, donc $4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{-6}$. Au numérateur :
$2^6 \times 2^{-9} = 2^{6+(-9)} = 2^{-3}$. Puis $A = \frac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3-(-6)} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) $9 = 3^2$, donc $9^{-2} = 3^{-4}$; $27 = 3^3$, donc $27^3 = 3^9$. Au numérateur : $3^{-4} \times 3^9 = 3^5$. Puis $B = \frac{3^5}{3^4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3$.
Donc B est un entier : $B = 3$.

(c) $10^4 \times 10^{-9} = 10^{4+(-9)} = 10^{-5}$. $0{,}01 = 10^{-2}$, donc $(0{,}01)^{-3} = (10^{-2})^{-3} = 10^{(-2)\times(-3)} = 10^6$. Ainsi $C = 10^{-5} \times 10^6 = 10^1 = 10$.

(d) $6^3 = (2 \times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$ et $9^{-1} = (3^2)^{-1} = 3^{-2}$.
Donc $D = \frac{2^3 \times 3^3 \times 2^{-5}}{3^{-2}} = 2^{3+(-5)} \times 3^{3-(-2)} = 2^{-2} \times 3^5$. Or $2^{-2} \times 3^5 = \frac{243}{4} = 60{,}75$. D n'est pas un entier : il reste un 2 au dénominateur, et 243 est impair.

Ex. 7 ★★★ **Au microscope avec Noé**

(a) Non. En notation scientifique $a \times 10^n$, il faut $1 \leqslant a < 10$, et ici $0{,}2 < 1$. On écrit $0{,}2 = 2 \times 10^{-1}$, donc $0{,}2 \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-1} \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-6}$. La bactérie mesure 2×10^{-6} m.

(b) Non. On compare d'abord les exposants : $-4 > -5$, donc $2 \times 10^{-4} > 4 \times 10^{-5}$. En écriture décimale : 0,000 2 m contre 0,000 04 m. Le grain de sable est plus grand que le grain de pollen.

(c) Le plus grand est le grain de sable : $\frac{2\times10^{-4}}{4\times10^{-5}} = \frac{2}{4} \times 10^{-4-(-5)} = 0{,}5 \times 10^1 = 5$. Le grain de sable est 5 fois plus grand que le grain de pollen.

(d) On divise 1 mm par la taille d'une bactérie : $\frac{10^{-3}}{2\times10^{-6}} = \frac{1}{2} \times 10^{-3-(-6)} = 0{,}5 \times 10^3 = 500$. Il faut 500 bactéries alignées pour couvrir 1 mm.

(e) 1 h, c'est 3 périodes de 20 min : $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ bactéries (et non 6). 3 h, c'est 3 fois une heure, donc on multiplie 3 fois par 2^3 : $(2^3)^3 = 2^{3\times3} = 2^9 = 512$. Au bout de 3 heures, on obtient 2^9, soit 512 bactéries.

2. *Définition d'une puissance, exposants entiers relatifs*

Ex. 8 ★☆☆ **Signes, parenthèses et exposant nul**

(a) La base est -3 et l'exposant est pair, donc le résultat est positif : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$.

(b) L'exposant porte seulement sur 3 : $-3^4 = -(3^4) = -81$.

(c) Pour une base non nulle, $a^0 = 1$, donc $(-5)^0 = 1$.

(d) L'exposant porte seulement sur 5 : $-5^0 = -(5^0) = -1$.

(e) Le produit de 37 facteurs égaux à 1 vaut 1 : $1^{37} = 1$.

(f) La base est négative et l'exposant impair, donc le résultat est négatif : $(-4)^3 = -64$.

Ex. 9 ★☆☆ **Exposants négatifs**

(a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}062\,5$.

(b) L'exposant -1 renverse la fraction : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$.

(c) On renverse la fraction puis on élève au carré : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

(d) L'inverse de $10^{-4} = \frac{1}{10^4}$ est 10^4.

(e) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$
(exposant impair, donc résultat négatif).

(f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9$
(exposant pair, donc résultat positif).

Ex. 10 ★★☆ **La copie d'Inès**

(a) Un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif : il donne un inverse. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$. Le bon résultat est donc 0,04.

(b) La base -2 est négative et l'exposant 5 est impair, donc le résultat est négatif : $(-2)^5 = -32$. Le bon résultat est donc -32.

(c) La puissance passe avant le produit : on calcule d'abord $3^2 = 9$, puis $2 \times 9 = 18$. Inès a calculé 6^2 à tort. Le bon résultat est donc 18.

(d) 0^{-1} voudrait dire $\frac{1}{0}$. Or on ne divise pas par 0 : 0^{-1} n'existe donc pas. Un exposant négatif demande une base non nulle. De même, 0^0 n'est pas défini en 2nde. Seules les puissances de 0 d'exposant positif existent, par exemple $0^3 = 0$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux : signe et parité**

(a) Faux. Pour un exposant impair, on a par exemple $(-1)^3 = -1$. En fait, $(-1)^n$ vaut 1 si n est pair et -1 si n est impair.

(b) Faux. La base 7 est positive, donc toutes ses puissances sont positives : $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343} > 0$.

(c) Vrai. Comme 10 est pair, $(-2)^{10} = 2^{10} = 1\,024$. Et $-2^{10} = -(2^{10}) = -1\,024$. Ces deux nombres sont bien opposés.

(d) Vrai. 2 027 est impair, donc $(-1)^{2027} = -1$. 2 026 est pair, donc $(-1)^{2026} = 1$. La somme vaut $-1 + 1 = 0$.

Ex. 12 ★★★ **Signes et rangement sans calculatrice**

(a) $(-7)^{11}$: la base est négative et l'exposant 11 est impair, donc $(-7)^{11} < 0$. $(-7)^{-4} = \frac{1}{(-7)^4}$ et $(-7)^4 > 0$ car l'exposant 4 est pair, donc $(-7)^{-4} > 0$. $-7^6 = -(7^6)$: l'exposant ne porte que sur 7, et $7^6 > 0$, donc $-7^6 < 0$. $7^{-9} = \frac{1}{7^9} > 0$ car la base 7 est positive : un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif. Conclusion : $(-7)^{11}$ et -7^6 sont négatifs, $(-7)^{-4}$ et 7^{-9} sont positifs.

(b) $A = (-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$, car l'exposant 3 est impair. $B = -4^{-2} = -(4^{-2}) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$: l'exposant ne porte que sur 4.
Donc $A = -\frac{1}{125}$ et $B = -\frac{1}{16}$.

(c) $C = (-8)^0 = 1$ car la base -8 est non nulle. $D = -8^0 = -(8^0) = -1$ car l'exposant ne porte que sur 8. $E = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$: l'exposant négatif renverse la fraction.
Donc $C = 1$, $D = -1$ et $E = \frac{27}{8}$.

(d) Les nombres négatifs sont $D = -1$, $B = -\frac{1}{16}$ et $A = -\frac{1}{125}$. Comme $16 < 125$, on a $\frac{1}{16} > \frac{1}{125}$, donc $-\frac{1}{16} < -\frac{1}{125}$; de plus $-1 < -\frac{1}{16}$. Les nombres positifs sont $C = 1$ et $E = \frac{27}{8}$, et $\frac{27}{8} > 1$ car $27 > 8$.
Conclusion : $D < B < A < C < E$.

Ex. 13 ★★★ **Retrouver l'exposant**

(a) Un exposant négatif renverse la fraction : $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{3}$, donc $n = -1$. Ensuite, $\frac{49}{9} = \frac{7^2}{3^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$, donc $n = -2$.

(b) $0{,}000\,001 = \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$, donc $n = -6$.
L'inverse de 10^{-6} est $\frac{1}{10^{-6}} = 10^6 = 1\,000\,000$. L'inverse de 10^n est donc 10^6.

(c) $27 = 3^3$, donc $-\frac{1}{27} = \frac{1}{(-3)^3} = (-3)^{-3}$ car $(-3)^3 = -27$ (exposant impair).
Donc $n = -3$. Pour $-\frac{1}{9}$: comme $9 = 3^2$, il faudrait $n = -2$. Mais $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} > 0$ car l'exposant est pair. Aucun entier ne convient donc.

(d) Yanis a tort. On a bien $a^0 = 1$ pour tout a non nul, mais il existe d'autres cas. Par exemple, $1^5 = 1$, car un produit de facteurs égaux à 1 vaut 1, et pourtant $n = 5 \neq 0$. De même, $(-1)^4 = 1$ car l'exposant 4 est pair. Un seul contre-exemple suffit : l'affirmation de Yanis est fausse.

Ex. 14 ★★★ **Une expression qui dépend de la parité**

(a) $-2^2 = -(2^2) = -4$: l'exposant ne porte que sur 2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$: l'exposant négatif renverse la fraction.
Donc $-2^2 = -4$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

Ex. 14 **(suite)**

(b) D'après la question précédente, $M = -4 + (-1)^n \times 9$. Si n est pair, $(-1)^n = 1$ et $M = -4 + 9 = 5$. Si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $M = -4 - 9 = -13$.
Conclusion : M vaut 5 ou -13.

(c) $(-1)^{-5} = \frac{1}{(-1)^5} = \frac{1}{-1} = -1$, car l'exposant 5 est impair.
Pour $n = -5$: $M = -4 + (-1) \times 9 = -13$.

(d) Pour avoir $M = -4$, il faudrait $(-1)^n \times 9 = 0$. Or $(-1)^n$ vaut 1 ou -1, donc $(-1)^n \times 9$ vaut 9 ou -9, jamais 0. Conclusion : M ne peut pas valoir -4.

3. *Règles de calcul : produit, quotient, puissance de puissance, d'un produit, d'un quotient*

Ex. 15 ★☆☆ **Une seule puissance, sans calculatrice**

(a) Les bases sont égales, donc on additionne les exposants : $7^5 \times 7^{-8} = 7^{5+(-8)} = 7^{-3}$.

(b) Les bases sont égales, donc on soustrait les exposants. Attention au signe : $\frac{5^3}{5^{-4}} = 5^{3-(-4)} = 5^7$.

(c) Pour une puissance de puissance, on multiplie les exposants : $(6^{-3})^5 = 6^{-3\times5} = 6^{-15}$.

(d) On additionne les trois exposants : $-2 + 6 - 7 = -3$, donc le produit vaut 10^{-3}.

(e) D'abord $(a^4)^3 = a^{12}$, puis $a^{12} \times a^{-5} = a^{12-5} = a^7$.

(f) D'abord $(11^2)^{-3} = 11^{-6}$, puis $\frac{11^{-6}}{11^{-4}} = 11^{-6-(-4)} = 11^{-2}$.

(g) Les exposants sont égaux, donc on multiplie les bases : $2^{-6} \times 7^{-6} = (2 \times 7)^{-6} = 14^{-6}$.

Ex. 16 ★☆☆ **Puissance d'un produit ou d'un quotient**

(a) L'exposant porte aussi sur le 5 : $(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$, et non $5x^2$.

(b) $(-2a^3)^4 = (-2)^4 \times (a^3)^4 = 16a^{12}$. L'exposant 4 est pair, donc le résultat est positif.

(c) $\left(\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{x^4}{3^4} = \frac{x^4}{81}$.

(d) $(-x^2)^3 = (-1)^3 \times (x^2)^3 = -x^6$. L'exposant 3 est impair, donc le signe moins reste.

(e) $(4x^{-1})^{-2} = 4^{-2} \times x^{(-1)\times(-2)} = \frac{1}{16}x^2$, soit $\frac{x^2}{16}$.

(f) On multiplie les nombres entre eux et les puissances de x entre elles : $3 \times 5 \times x^{2+(-6)} = 15x^{-4}$.

Ex. 17 ★★☆ **Vrai ou faux : sommes, bases différentes, signe**

(a) Faux. Il n'existe pas de règle pour une somme : $5^3 + 5^4 = 125 + 625 = 750$, alors que $5^7 = 78\,125$. L'égalité est donc fausse.

(b) Vrai. On factorise : $2^9 + 2^9 = 2 \times 2^9 = 2^{1+9} = 2^{10}$. L'égalité est donc vraie.

(c) Faux. Les bases et les exposants sont différents, donc aucune règle ne s'applique : $2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288$, ce qui est bien plus petit que 6^7. L'égalité est donc fausse.

(d) Vrai. Les exposants sont égaux : $4^3 \times 25^3 = (4 \times 25)^3 = 100^3 = (10^2)^3 = 10^6$. L'égalité est donc vraie.

(e) Faux. Les bases sont égales, donc on additionne les exposants : $(-2)^6 \times (-2)^{-3} = (-2)^{6+(-3)} = (-2)^3 = -8$. L'exposant 3 est impair, donc le résultat est négatif. L'égalité est donc fausse.

Ex. 18 ★★☆ **Les calculs de Lina**

(a) Elle a tort : elle a soustrait les exposants alors que les bases 25 et 5 sont différentes. Il faut d'abord écrire $25 = 5^2$, donc $25^3 = 5^6$. On obtient $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$.

(b) Elle a tort : elle a multiplié les exposants. Pour un produit de puissances de même base, on additionne les exposants : $3^4 \times 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$.

(c) Elle a tort : elle a additionné les exposants. Pour une puissance de puissance, on multiplie les exposants : $(2^3)^{-4} = 2^{3\times(-4)} = 2^{-12}$.

(d) Elle a tort : elle a calculé $4 - 3$ au lieu de $4 - (-3)$. Le bon calcul est $\frac{10^4}{10^{-3}} = 10^{4-(-3)} = 10^7$.

(e) Elle a raison. On écrit $9 = 3^2$ et $27 = 3^3$. Le numérateur vaut $3^4 \times 3^{-3} = 3^1$, puis $\frac{3^1}{3^{-5}} = 3^{1-(-5)} = 3^6$. Son résultat est donc juste.

Ex. 19 ★★★ **Entier ou pas ? Puissances de 2, de 3 et de 10**

(a) On écrit $6^4 = (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$, $9^{-3} = (3^2)^{-3} = 3^{-6}$ et $4^{-2} = (2^2)^{-2} = 2^{-4}$. Le numérateur vaut $2^4 \times 3^{4-6} = 2^4 \times 3^{-2}$.
Donc $A = \frac{2^4\times 3^{-2}}{2^{-4}\times 3^{-5}} = 2^{4-(-4)} \times 3^{-2-(-5)} = 2^8 \times 3^3$. Les deux exposants sont positifs, donc A est un entier : $A = 256 \times 27 = 6\,912$.

Ex. 19 (suite)

(b) $12^3 = (2^2 \times 3)^3 = 2^6 \times 3^3$ et $18^{-2} = (2 \times 3^2)^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-4}$, d'où un numérateur égal à $2^4 \times 3^{-1}$. Comme $8^{-1} = 2^{-3}$, on obtient $B = 2^{4-(-3)} \times 3^{-1} = 2^7 \times 3^{-1} = \frac{128}{3}$. Les bases 2 et 3 sont différentes, donc on ne peut pas regrouper davantage. Comme 128 n'est pas divisible par 3, B n'est pas un entier.

(c) Il n'existe aucune règle pour une somme, alors on factorise : $2^{10} + 2^{10} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$. Ensuite $C = 2^{11} + 2^{11} = 2 \times 2^{11} = 2^{12}$.
Donc C est une puissance de 2, d'exposant 12 ($C = 4\,096$).

(d) $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$, donc $2^3 \times 4^3 = 2^{3+6} = 2^9$. Les bases 2 et 5 ont alors le même exposant : $D = 2^9 \times 5^9 = (2 \times 5)^9 = 10^9$.
Donc D est une puissance de 10.

(e) $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$ et $8^{-1} = 2^{-3}$, donc $4^n \times 8^{-1} = 2^{2n-3}$. Il faut $2n - 3 = 9$, c'est-à-dire $2n = 12$.
Donc $n = 6$.

Ex. 20 ★★★ **Expressions littérales et signe**

(a) Puissance d'un produit : $(-3x^4)^2 = (-3)^2 \times (x^4)^2 = 9x^8$, car l'exposant 2 est pair (le résultat est positif) et il porte aussi sur le -3. Puis $(x^{-2})^3 = x^{-6}$.
Donc $E = 9x^{8+(-6)} = 9x^2$.

(b) Numérateur : $(3x^2a^{-1})^3 = 3^3 \times x^6 \times a^{-3} = 27x^6a^{-3}$ (le 3 est lui aussi élevé au cube).
Donc $F = \frac{27}{9} \times x^{6-1} \times a^{-3-(-2)}$, c'est-à-dire $F = 3x^5a^{-1}$.

(c) Puissance d'un quotient : $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$ et $\left(\frac{4}{x}\right)^2 = \frac{16}{x^2}$.
Donc $G = \frac{16}{8} \times \frac{x^3}{x^2} = 2x^{3-2} = 2x$.

(d) L'exposant 5 est impair, donc $(-a)^5 = -a^5$. Dans $-a^2$, le signe moins n'est pas élevé au carré, et $(-a^2)^3 = (-1)^3 \times (a^2)^3 = -a^6$.
Donc $H = (-a^5) \times (-a^6) = a^{5+6} = a^{11}$. Si $a < 0$, une puissance impaire de a est négative : $H < 0$.

(e) Avec $x = 10^{-3}$: $E = 9 \times (10^{-3})^2 = 9 \times 10^{-6}$ et $G = 2 \times 10^{-3}$. Les deux résultats sont déjà en notation scientifique : $E = 9 \times 10^{-6}$ et $G = 2 \times 10^{-3}$.

Ex. 21 ★★★ **Le cube découpé**

(a) Volume d'un cube : arête au cube. Grand cube : $(2^5)^3 = 2^{5\times 3} = 2^{15}$ cm³ (on multiplie les exposants, et non 2^{5+3}). Petit cube : $(2^{-1})^3 = 2^{-3}$ cm³. Le grand cube a un volume de 2^{15} cm³, et chaque petit cube a un volume de 2^{-3} cm³.

Ex. 21 (suite)

(b) Nombre de petits cubes : $\frac{2^{15}}{2^{-3}} = 2^{15-(-3)} = 2^{18}$. Attention au signe : on soustrait -3, donc on ajoute 3. Comme $2^{18} = 2^{10} \times 2^8 = 1\,024 \times 256 = 262\,144$, Maëlys obtient 262 144 petits cubes.

(c) Longueur de la ligne : $2^{18} \times 2^{-1} = 2^{17}$ cm. Or $2^{17} = 2^{10} \times 2^7 = 1\,024 \times 128 = 131\,072$ cm. Comme 1 km $= 100\,000$ cm $= 10^5$ cm et que $131\,072 > 100\,000$, la ligne dépasse 1 km : elle mesure environ 1,31 km.

(d) Lucas a additionné les bases $(2 + 2 = 4)$ en gardant l'exposant. Or il n'existe aucune règle pour une somme : son résultat vaut $4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$, bien plus que le bon volume. On factorise : $2^{15} + 2^{15} = 2 \times 2^{15} = 2^{16}$. Les deux cubes collés ont un volume total de 2^{16} cm³, soit 65 536 cm³.

4. *Simplifier une expression avec des puissances*

Ex. 22 ★☆☆ Une seule puissance : même base d'abord

(a) Produit, même base : on additionne les exposants. $5^3 \times 5^{-7} = 5^{3+(-7)} = 5^{-4}$.

(b) Quotient, même base : on soustrait les exposants. $\frac{7^2}{7^{-5}} = 7^{2-(-5)} = 7^7$.

(c) Puissance d'une puissance : on multiplie les exposants. $(6^{-3})^{-2} = 6^{(-3)\times(-2)} = 6^6$.

(d) Les bases sont différentes : on écrit d'abord $9 = 3^2$, donc $9^5 = 3^{10}$. Alors $\frac{9^5}{3^4} = \frac{3^{10}}{3^4} = 3^6$ (et non 3^1 ni 3^4).

(e) $4 = 2^2$, donc $4^3 = 2^6$. Alors $4^3 \times 2^{-5} = 2^6 \times 2^{-5} = 2^1$.

(f) $25 = 5^2$, donc $25^{-2} = 5^{-4}$. Alors $25^{-2} \times 5^7 = 5^{-4} \times 5^7 = 5^3$.

(g) $0{,}001 = 10^{-3}$, donc $0{,}001^2 = 10^{-6}$. Alors $0{,}001^2 \times 10^9 = 10^{-6} \times 10^9 = 10^3$.

(h) $8 = 2^3$, donc $8^2 = 2^6$. Alors $\frac{8^2}{2^{-3}} = \frac{2^6}{2^{-3}} = 2^{6-(-3)} = 2^9$.

Ex. 23 ★☆☆ Décomposer en puissances de 2 et de 3

(a) $6 = 2 \times 3$, donc $6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$.

(b) $12 = 2^2 \times 3$, donc $12^3 = (2^2)^3 \times 3^3 = 2^6 \times 3^3$.

(c) $18 = 2 \times 3^2$, donc $18^2 = 2^2 \times 3^4$, et $4^3 = 2^6$. Alors $\frac{18^2}{4^3} = 2^{2-6} \times 3^4 = 2^{-4} \times 3^4$.

(d) $6^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-2}$ et $27 = 3^3$. Alors $\frac{6^{-2}}{27} = 2^{-2} \times 3^{-2-3} = 2^{-2} \times 3^{-5}$.

Ex. 23 (suite)

(e) $24 = 2^3 \times 3$ et $9^{-3} = (3^2)^{-3} = 3^{-6}$. Alors $24 \times 9^{-3} = 2^3 \times 3^{1+(-6)} = 2^3 \times 3^{-5}$.

(f) $12^2 = 2^4 \times 3^2$ et $6^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3}$. Alors $\frac{12^2}{6^{-3}} = 2^{4-(-3)} \times 3^{2-(-3)} = 2^7 \times 3^5$.

(g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}} = 2^{-4} \times 3^4$ et $16 = 2^4$. Alors le produit vaut $2^{-4+4} \times 3^4 = 2^0 \times 3^4$.

Ex. 24 ★★☆ Expressions littérales avec puissances

(a) Léa a additionné l'exposant 2 au lieu de multiplier : $(x^4y^{-3})^2 = x^{4\times2}y^{(-3)\times2} = x^8y^{-6}$. Puis $\frac{x}{y} = x^1y^{-1}$, donc $A = x^{8+1}y^{-6-1}$. Conclusion : $A = x^9y^{-7}$.

(b) $(2x^{-1}y)^3 = 2^3x^{-3}y^3 = 8x^{-3}y^3$. Donc $B = \frac{8}{4} \times x^{-3-2} \times y^{3-(-2)}$. Conclusion : $B = 2x^{-5}y^5$.

(c) Numérateur : $(3xy^2)^2 \times x^{-4} = 9x^2y^4 \times x^{-4} = 9x^{-2}y^4$. Dénominateur : $(x^{-1}y)^3 = x^{-3}y^3$. Donc $C = 9x^{-2-(-3)}y^{4-3}$. Conclusion : $C = 9xy$.

(d) On simplifie avant de calculer : $C = 9xy = 9 \times 2 \times (-1)$. Conclusion : pour $x = 2$ et $y = -1$, $C = -18$.

Ex. 25 ★★☆ Montrer qu'un nombre est entier

(a) $8 = 2^3$, donc $8^4 = 2^{12}$. Puis $6 = 2 \times 3$, donc $6^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3}$.

(b) Le dénominateur vaut $2^{-3} \times 3^{-3} \times 2^9 = 2^6 \times 3^{-3}$. Donc $A = \frac{2^{12}\times3^{-2}}{2^6\times3^{-3}} = 2^{12-6} \times 3^{-2-(-3)}$. Conclusion : $A = 2^6 \times 3^1$.

(c) Les deux exposants sont positifs, donc A est un produit d'entiers : $A = 64 \times 3$. Conclusion : A est un entier, $A = 192$.

(d) Non. Il a divisé les bases et soustrait les exposants alors que les bases 8 et 2 sont différentes. Il faut d'abord écrire $8^4 = 2^{12}$: $\frac{8^4}{2^9} = \frac{2^{12}}{2^9} = 2^3 = 8$.

Ex. 26 ★★★ Sommes de puissances : factoriser

(a) Faux. On additionne deux nombres égaux : $2^5 + 2^5 = 2 \times 2^5 = 2^6 = 64$, alors que $2^{10} = 1\,024$. Les exposants s'additionnent seulement dans un produit $2^5 \times 2^5$, pas dans une somme.

(b) On a $2^{x+1} = 2^1 \times 2^x = 2 \times 2^x$, donc $2^{x+1} + 2^x = 2 \times 2^x + 1 \times 2^x = (2 + 1) \times 2^x = 3 \times 2^x$.

(c) $3^{x+2} = 3^2 \times 3^x = 9 \times 3^x$, donc $3^{x+2} - 3^x = (9 - 1) \times 3^x = 8 \times 3^x$.
Donc $k = 8$.

Ex. 26 **(suite)**

(d) On factorise par 5^{10} : $5^{12}+5^{11}+5^{10}=5^{10}\times(5^2+5+1)=5^{10}\times 31$. C'est 31 multiplié par l'entier 5^{10}, donc c'est un multiple de 31.

(e) On factorise par 7^7 : $7^9-7^7=7^7\times(7^2-1)=48\times 7^7$. Donc $A=\frac{48\times 7^7}{12\times 7^8}=4\times 7^{7-8}=4\times 7^{-1}$. Conclusion : $A=\frac{4}{7}$.

Ex. 27 ★★★ **Comparer des puissances de bases différentes**

(a) Non. $2^{10}=1\,024$ et $3^7=2\,187$, donc $2^{10}<3^7$. Quand les bases sont différentes, comparer les exposants ne suffit pas.

(b) $(a^n)^p=a^{np}$: $2^{100}=(2^5)^{20}=32^{20}$ et $3^{60}=(3^3)^{20}=27^{20}$.

(c) On a $0<27<32$, donc $27^{20}<32^{20}$, d'où $3^{60}<2^{100}$. Conclusion : 2^{100} est le plus grand.

(d) $5^{40}=(5^2)^{20}=25^{20}$. Comme $0<25<27<32$, on a $25^{20}<27^{20}<32^{20}$, donc $5^{40}<3^{60}<2^{100}$.

(e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=\frac{1}{2^{100}}$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{60}=\frac{1}{3^{60}}$. Ces deux nombres positifs vérifient $3^{60}<2^{100}$, et leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire.
Donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}<\left(\frac{1}{3}\right)^{60}$.

Ex. 28 ★★★ **Simplifier avant de calculer**

(a) $4^n=(2^2)^n=2^{2n}$ et $6^2=2^2\times 3^2$, donc le numérateur vaut $2^{2n+2}\times 3^2$. Ainsi $E=2^{(2n+2)-(2n+1)}\times 3^{2-1}=2^1\times 3^1$. Conclusion : $E=6$ pour tout entier n, donc E ne dépend pas de n.

(b) $0{,}2=2\times 10^{-1}$, $50=5\times 10$ et $0{,}04=2^2\times 10^{-2}$.
Numérateur : $2^3\times 10^{-3}\times 5^2\times 10^2=2^3\times 5^2\times 10^{-1}$.
Donc $F=2^{3-2}\times 5^2\times 10^{-1-(-2)}=2\times 25\times 10$.
Conclusion : $F=500$.

(c) $8=2^3$, donc $8^{14}=2^{42}$; $16=2^4$, donc $16^5=2^{20}$.
Nombre de photos : $\frac{2^{42}}{2^{20}}=2^{42-20}=2^{22}$. Conclusion : le disque peut stocker 2^{22} photos, soit environ 4 millions de photos.

(d) $6^{150}=2^{150}\times 3^{150}$, $4^{74}=2^{148}$ et $9^{76}=3^{152}$.
Donc $D=2^{150-148}\times 3^{150-152}=2^2\times 3^{-2}$. Conclusion : $D=\frac{4}{9}$, sans calculatrice.

5. *Puissances de 10 et notation scientifique*

Ex. 29 ★☆☆ **Passer en notation scientifique**

(a) On déplace la virgule de 8 rangs vers la gauche : $468\,000\,000=4{,}68\times 10^8$.

(b) Le chiffre 3 est au 5e rang après la virgule. On déplace donc la virgule de 5 rangs vers la droite : $0{,}000\,037\,2=3{,}72\times 10^{-5}$.

(c) On garde le signe et on déplace la virgule de 4 rangs vers la gauche : $-52\,900=-5{,}29\times 10^4$.

(d) 37×10^5 n'est pas une notation scientifique, car $37\geqslant 10$. On a $37=3{,}7\times 10^1$, donc $37\times 10^5=3{,}7\times 10^{1+5}=3{,}7\times 10^6$.

(e) Ici $0{,}63<1$. On a $0{,}63=6{,}3\times 10^{-1}$, donc $0{,}63\times 10^{-4}=6{,}3\times 10^{-1-4}=6{,}3\times 10^{-5}$: quand la virgule va vers la droite, l'exposant baisse.

(f) On garde le signe. Le chiffre 4 est au 3e rang après la virgule : $-0{,}004\,15=-4{,}15\times 10^{-3}$.

(g) On déplace la virgule de 2 rangs vers la gauche, donc l'exposant augmente de 2 : $148\times 10^{-7}=1{,}48\times 10^2\times 10^{-7}=1{,}48\times 10^{-5}$.

Ex. 30 ★★☆ **Calculer en notation scientifique**

(a) $A=(3\times 4)\times 10^{4-7}=12\times 10^{-3}$. Comme $12=1{,}2\times 10^1$, on obtient $A=1{,}2\times 10^{-2}$.

(b) $B=(2{,}5\times 6)\times 10^{6+3}=15\times 10^9$. Comme $15=1{,}5\times 10^1$, on obtient $B=1{,}5\times 10^{10}$.

(c) $C=\frac{8}{2}\times\frac{10^5}{10^{-3}}=4\times 10^{5-(-3)}=4\times 10^8$. Attention : diviser par 10^{-3} ajoute 3 à l'exposant.

(d) $D=\frac{1{,}2}{4}\times 10^{-4-2}=0{,}3\times 10^{-6}$. Comme $0{,}3=3\times 10^{-1}$, on obtient $D=3\times 10^{-7}$.

(e) $E=2^3\times\left(10^{-3}\right)^3=8\times 10^{-9}$.

(f) $F=\frac{9\times 5}{1{,}5}\times\frac{10^7\times 10^{-2}}{10^{-3}}=\frac{45}{1{,}5}\times 10^{5+3}=30\times 10^8$. Comme $30=3\times 10^1$, on obtient $F=3\times 10^9$.

Ex. 31 ★★☆ **Préfixes, aires et volumes**

(a) $1\,\mu\text{m}=10^{-6}$ m, donc $80\,\mu\text{m}=80\times 10^{-6}$ m. Or $80=8\times 10^1$, donc $80\times 10^{-6}=8\times 10^{-5}$. Le cheveu a un diamètre de 8×10^{-5} m.

(b) 1 Go $=10^9$ octets, donc 64 Go $=64\times 10^9$ octets. Or $64=6{,}4\times 10^1$. La clé contient donc $6{,}4\times 10^{10}$ octets.

(c) Non. 1 km $=10^3$ m, donc 1 km$^2=\left(10^3\right)^2$ m$^2=10^6$ m^2. Pour une aire, on élève le facteur de conversion au carré. Léa a tort.

Ex. 31 (suite)

(d) $50\ \text{mm}^3 = 50 \times 10^{-9}\ \text{m}^3$. Or $50 = 5 \times 10^1$, donc $50 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{-8}$. La goutte a un volume de $5 \times 10^{-8}\ \text{m}^3$.

(e) $1\ \text{cm}^2 = \left(10^{-2}\right)^2\ \text{m}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$, donc $96\ \text{cm}^2 = 96 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 = 9{,}6 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$. L'écran a une aire de $9{,}6 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$.

Ex. 32 ★★☆ **La lumière dans le système solaire**

(a) Durée $= \frac{1{,}5\times10^8}{3\times10^5} = 0{,}5 \times 10^{8-5} = 0{,}5 \times 10^3$. Or $0{,}5 = 5 \times 10^{-1}$, donc la durée vaut 5×10^2 s. La lumière met environ 5×10^2 s pour aller du Soleil à la Terre.

(b) Non, car $12{,}8 \geqslant 10$. On a $12{,}8 = 1{,}28 \times 10^1$, donc $12{,}8 \times 10^{-1} = 1{,}28 \times 10^0$. On vérifie : $\frac{3{,}84\times10^5}{3\times10^5} = 1{,}28$. La lumière met $1{,}28 \times 10^0$ s pour aller de la Lune à la Terre.

(c) Distance $= 3 \times 10^5 \times 3{,}15 \times 10^7 = (3 \times 3{,}15) \times 10^{5+7} = 9{,}45 \times 10^{12}$. En une année, la lumière parcourt environ $9{,}45 \times 10^{12}$ km.

(d) On calcule le quotient $\frac{1{,}5\times10^8}{3{,}84\times10^5} = \frac{1{,}5}{3{,}84} \times 10^3 \approx 0{,}390\,6 \times 10^3 \approx 390{,}6$. La distance Terre-Soleil est environ 391 fois plus grande que la distance Terre-Lune.

Ex. 33 ★★★ **La copie de Malik**

(a) La première partie est vraie : $0{,}72 < 1$, donc ce n'est pas une notation scientifique. La seconde est fausse : on décale la virgule de 0,72 d'un rang vers la droite, donc on retire 1 à l'exposant : $0{,}72 \times 10^{-5} = 7{,}2 \times 10^{-6}$.

(b) Faux. $5\,600 = 5{,}6 \times 10^3$: la virgule part de 3 rangs vers la gauche, donc l'exposant augmente de 3 au lieu de diminuer. $5\,600 \times 10^7 = 5{,}6 \times 10^3 \times 10^7 = 5{,}6 \times 10^{10}$.

(c) Faux. Le nombre est compris entre -1 et 0, donc l'exposant doit être négatif. Le chiffre 7 est au 5e rang après la virgule : $-0{,}000\,074\,5 = -7{,}45 \times 10^{-5}$.

(d) Faux. $\frac{2{,}4}{8} = 0{,}3$ et $\frac{10^3}{10^{-6}} = 10^{3-(-6)} = 10^9$. Malik a calculé $3 - 6$ au lieu de $3 + 6$.
Donc le quotient vaut $0{,}3 \times 10^9 = 3 \times 10^{-1} \times 10^9 = 3 \times 10^8$.

(e) Faux. On ne peut pas additionner 3,5 et 5, car les puissances de 10 sont différentes : il n'existe aucune règle pour une somme. On écrit $5 \times 10^3 = 0{,}5 \times 10^4$, donc la somme vaut $(3{,}5 + 0{,}5) \times 10^4 = 4 \times 10^4$.

Ex. 34 ★★★ **Photos et vidéos sur un téléphone**

(a) $128\ \text{Go} = 128 \times 10^9$ octets. Or $128 = 1{,}28 \times 10^2$, donc la mémoire vaut $1{,}28 \times 10^{11}$ octets. Une photo occupe $3{,}2 \times 10^6$ octets.

(b) $\frac{1{,}28\times10^{11}}{3{,}2\times10^6} = \frac{1{,}28}{3{,}2} \times 10^{11-6} = 0{,}4 \times 10^5 = 4 \times 10^4$. Le téléphone peut stocker au maximum 4×10^4 photos, soit 40 000 photos.

(c) $1{,}5 \times 10^4 \times 3{,}2 \times 10^6 = (1{,}5 \times 3{,}2) \times 10^{4+6} = 4{,}8 \times 10^{10}$. Les photos occupent $4{,}8 \times 10^{10}$ octets.

(d) Pour soustraire, on écrit les deux nombres avec la même puissance de 10 : $1{,}28 \times 10^{11} = 12{,}8 \times 10^{10}$.
Donc $12{,}8 \times 10^{10} - 4{,}8 \times 10^{10} = 8 \times 10^{10}$. Il reste 8×10^{10} octets de libres.

(e) Une minute de vidéo occupe $0{,}4 \times 10^9 = 4 \times 10^8$ octets. $\frac{8\times10^{10}}{4\times10^8} = 2 \times 10^2$. Inès peut encore filmer 2×10^2 minutes, soit 200 minutes de vidéo 4K.

Ex. 35 ★★★ **Les globules rouges d'un adulte**

(a) $1\ \text{dm}^3 = (10^{-1})^3\ \text{m}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$, donc $5\ \text{L} = 5\ \text{dm}^3 = 5 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$. Comme $1\ \text{mm}^3 = 10^{-9}\ \text{m}^3$ (et non $10^{-3}\ \text{m}^3$), on a $\frac{5\times10^{-3}}{10^{-9}} = 5 \times 10^{-3-(-9)} = 5 \times 10^6$. Le sang occupe $5 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$, soit $5 \times 10^6\ \text{mm}^3$.

(b) 5 millions $= 5 \times 10^6$ globules rouges par mm^3, et il y a $5 \times 10^6\ \text{mm}^3$ de sang.
Donc $5 \times 10^6 \times 5 \times 10^6 = 25 \times 10^{12} = 2{,}5 \times 10^{13}$. Cet adulte a environ $2{,}5 \times 10^{13}$ globules rouges.

(c) $1\ \mu\text{m}^3 = (10^{-6})^3\ \text{m}^3 = 10^{-18}\ \text{m}^3$.
Donc $90\ \mu\text{m}^3 = 90 \times 10^{-18}\ \text{m}^3 = 9 \times 10^1 \times 10^{-18}\ \text{m}^3 = 9 \times 10^{-17}\ \text{m}^3$.

(d) $2{,}5 \times 10^{13} \times 9 \times 10^{-17} = 22{,}5 \times 10^{-4} = 2{,}25 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$. Ensuite, $\frac{5\times10^{-3}}{2{,}25\times10^{-3}} = \frac{5}{2{,}25} \approx 2{,}2$. Le volume de sang est environ 2,2 fois plus grand que le volume des globules rouges.

(e) Tous les globules rouges sont remplacés en 120 jours. Par jour : $\frac{2{,}5\times10^{13}}{120} = \frac{2{,}5\times10^{13}}{1{,}2\times10^2} \approx 2{,}08 \times 10^{11}$. Comme $2{,}08 < 5$, l'ordre de grandeur est 10^{11}. Environ $2{,}08 \times 10^{11}$ globules rouges sont renouvelés chaque jour.

6. *Chiffres significatifs et arrondis*

Ex. 36 ★☆☆ **Compter les chiffres significatifs**

(a) Les zéros de tête ne comptent pas : on commence au 5. Les chiffres significatifs sont 5, 0 et 3, donc il y en a 3.

Ex. 36 (suite)

(b) 0,70 a 2 chiffres significatifs (7 et 0 : le zéro final compte) et 0,7 n'en a qu'un. Les deux nombres sont égaux, mais 0,70 est plus précis : les deux écritures ne donnent pas la même précision.

(c) Les chiffres significatifs de $a \times 10^n$ sont ceux de a. Ici $a = 3{,}080$, ce qui fait 3, 0, 8 et 0 : il y a donc 4 chiffres significatifs. La puissance 10^{-5} ne donne que la place de la virgule.

(d) On compte à partir du 1 : 1, 0, 5, 0 et 0. Les zéros placés après comptent, donc il y a 5 chiffres significatifs.

(e) Non : on ne sait pas si les zéros de 6 300 sont significatifs. Le nombre peut avoir 2, 3 ou 4 chiffres significatifs. Avec 3 chiffres significatifs, on écrit $6{,}30 \times 10^3$, ce qui lève le doute.

(f) $2{,}4 \times 10^6$ a 2 chiffres significatifs (ceux de 2,4). Pour 0,002 40, les zéros de tête ne comptent pas et le zéro final compte : il en a 3 (2, 4 et 0). C'est donc 0,002 40 qui en a le plus.

Ex. 37 ★☆☆ **Arrondir sans se tromper**

(a) On garde 3 et 8. Le chiffre suivant est 6 (entre 5 et 9), donc on ajoute 1 au 8 : 0,039.

(b) Non. On regarde seulement le chiffre qui suit le 3e chiffre significatif (le 1) : c'est 4, entre 0 et 4, donc on ne change rien. L'arrondi est 5,21. Arrondir en plusieurs fois fausse le résultat.

(c) On garde 7 et 3. Le chiffre suivant est 6, donc 3 devient 4. Les chiffres non gardés de la partie entière deviennent des zéros : $740\,000 = 7{,}4 \times 10^5$.

(d) On garde 9 et 9. Le chiffre suivant est 6, donc on ajoute 1 : la retenue donne 0,100. Avec 2 chiffres significatifs, on écrit $0{,}10 = 1{,}0 \times 10^{-1}$.

(e) On garde 1, 4 et 9. Le chiffre suivant est 6, donc 9 devient 10, avec une retenue : 1,50. Le zéro final est indispensable pour montrer les 3 chiffres significatifs.

(f) On garde 4 et 0 (les chiffres de 4,06). Le chiffre suivant est 6, donc 0 devient 1 : $4{,}1 \times 10^7$.

(g) Non. Elle a tronqué, c'est-à-dire coupé le nombre sans regarder la suite. Le chiffre suivant est 7 (entre 5 et 9), donc on ajoute 1 : l'arrondi est 8,4.

Ex. 38 ★★☆ **Masse volumique d'une bille d'acier**

(a) $\rho = \frac{32{,}6}{4{,}2} \approx 7{,}761\,9$. Le résultat d'un quotient a autant de chiffres significatifs que la donnée la moins précise : m en a 3 et V en a 2. Le chiffre après 7,7 est 6, donc on arrondit à 7,8. La masse volumique vaut $\rho \approx 7{,}8$ g/cm³.

(b) $m = 32{,}6$ g $= 0{,}032\,6$ kg $= 3{,}26 \times 10^{-2}$ kg et $V = 4{,}2 \times 10^{-6}$ m³. Les conversions ne changent pas le nombre de chiffres significatifs.

(c) $\rho = \frac{3{,}26 \times 10^{-2}}{4{,}2 \times 10^{-6}} \approx 0{,}776\,19 \times 10^4 \approx 7\,761{,}9$. Avec 2 chiffres significatifs, la masse volumique vaut $\rho \approx 7{,}8 \times 10^3$ kg/m³.

(d) Non. 4,20 a 3 chiffres significatifs, car le zéro final compte. Les deux données en ont alors 3, donc le résultat aussi : $\rho = \frac{32{,}6}{4{,}20} \approx 7{,}761\,9$, arrondi à 7,76 g/cm³. Le résultat est plus précis qu'avant.

Ex. 39 ★★☆ **L'année-lumière**

(a) $365{,}25 \times 24 \times 3\,600 = 8\,766 \times 3\,600 = 31\,557\,600$. Une année dure 31 557 600 s, soit $3{,}155\,76 \times 10^7$ s.

(b) $2{,}998 \times 10^8 \times 3{,}155\,76 \times 10^7 = 9{,}460\,968\,48 \times 10^{15}$. Le chiffre après 9,460 est 9, donc on arrondit à 9,461. Une année-lumière vaut environ $9{,}461 \times 10^{15}$ m.

(c) Malik trouve $2{,}998 \times 10^8 \times 3 \times 10^7 = 8{,}994 \times 10^{15}$ m. Ce résultat est faux dès le premier chiffre (le bon résultat est $9{,}461 \times 10^{15}$ m). Il a arrondi une étape intermédiaire : il faut garder les valeurs exactes et n'arrondir qu'à la fin.

(d) On garde la valeur non arrondie : $4{,}24 \times 9{,}460\,968\,48 \times 10^{15} \approx 40{,}114\,5 \times 10^{15}$. La donnée la moins précise est 4,24, avec 3 chiffres significatifs. Proxima du Centaure est donc à environ $4{,}01 \times 10^{16}$ m.

Ex. 40 ★★★ **Densités de population : la bonne précision**

(a) $d = \frac{1{,}24 \times 10^8}{3{,}78 \times 10^5} = \frac{1{,}24}{3{,}78} \times 10^3 \approx 328{,}04$. Les deux données ont 3 chiffres significatifs, donc le résultat aussi. La densité du Japon vaut environ $3{,}28 \times 10^2$ hab/km².

(b) Hugo recopie tous les chiffres de la calculatrice : son résultat paraît bien plus précis que les données. Les données ont 3 chiffres significatifs, donc on en garde 3 : 1, 2 et 0. Le chiffre suivant est 2, on ne change rien. Écrire 120 serait ambigu (le zéro compte-t-il ?). La densité de la France métropolitaine vaut environ $1{,}20 \times 10^2$ hab/km².

Ex. 40 (suite)

(c) $\frac{1{,}2\times10^{8}}{3{,}78\times10^{5}} = \frac{1{,}2}{3{,}78}\times10^{3} \approx 317{,}46$. La donnée la moins précise, $1{,}2\times10^{8}$, n'a que 2 chiffres significatifs : on en garde 2. On garde 3 et 1 ; le chiffre suivant est 7, donc 1 devient 2. La densité vaut environ $3{,}2\times10^{2}$ hab/km² : le résultat est moins précis, car une donnée l'est.

(d) Superficie $= \frac{\text{population}}{\text{densité}} = \frac{1{,}24\times10^{8}}{\frac{6{,}64\times10^{7}}{5{,}52\times10^{5}}} = \frac{1{,}24\times5{,}52}{6{,}64}\times10^{6} \approx 1{,}030\,8\times10^{6}$. Les données ont 3 chiffres significatifs ; le chiffre suivant est 0, on ne change rien. Le Japon devrait avoir une superficie d'environ $1{,}03\times10^{6}$ km².

Ex. 41 ★★★ Stocker les vidéos d'une plateforme

(a) $5{,}0\times10^{2}\times1{,}87\times10^{9} = 9{,}35\times10^{11}$. $5{,}0\times10^{2}$ a 2 chiffres significatifs (le zéro final compte) et $1{,}87\times10^{9}$ en a 3 : on en garde 2. Le chiffre suivant est 5, donc 3 devient 4. La plateforme reçoit environ $9{,}4\times10^{11}$ octets par minute.

(b) On repart de la valeur non arrondie : $9{,}35\times10^{11}\times1\,440 = 1{,}346\,4\times10^{15}$ octets, soit $1{,}346\,4\times10^{6}$ Go (on divise par 10^{9}). Le nombre 1 440 est exact : il ne limite pas la précision, on garde 2 chiffres significatifs. Le chiffre suivant est 4, on ne change rien. La plateforme reçoit environ $1{,}3\times10^{6}$ Go par jour. Avec la valeur arrondie $9{,}4\times10^{11}$, on trouverait $1{,}353\,6\times10^{6}$, soit $1{,}4\times10^{6}$ Go : c'est faux, on n'arrondit qu'à la fin.

(c) $\frac{8{,}0\times10^{12}}{9{,}35\times10^{11}} = \frac{8{,}0}{9{,}35}\times10^{1} \approx 8{,}556$. La donnée la moins précise a 2 chiffres significatifs : on en garde 2. Le chiffre suivant est 5, donc 8,5 devient 8,6. La plateforme reçoit de quoi remplir le disque en environ 8,6 min.

Ex. 42 ★★★ Bactéries et virus

(a) Les zéros placés avant le 2 ne comptent pas, car ils servent seulement à placer la virgule. Le zéro placé après le 2 compte. La longueur a donc 2 chiffres significatifs : $0{,}002\,0$ mm $= 2{,}0\times10^{-3}$ mm. Il faut garder le zéro final.

(b) 1 mm $= 10^{-3}$ m.
Donc $2{,}0\times10^{-3}$ mm $= 2{,}0\times10^{-3}\times10^{-3}$ m $= 2{,}0\times10^{-6}$ m. Comme 1 μm $= 10^{-6}$ m, la bactérie mesure 2,0 μm, avec toujours 2 chiffres significatifs.

(c) $N = \frac{4.75\times10^{-4}}{9{,}5\times10^{-13}} = \frac{4.75}{9{,}5}\times10^{9} = 0{,}5\times10^{9} = 5\times10^{8}$. La masse d'une bactérie n'a que 2 chiffres significatifs. Le résultat doit donc en avoir 2 : la colonie contient environ $5{,}0\times10^{8}$ bactéries, et non 5×10^{8}.

Ex. 42 (suite)

(d) $\frac{0{,}002\,0}{0{,}000\,12} = \frac{2{,}0\times10^{-3}}{1{,}2\times10^{-4}} = \frac{2{,}0}{1{,}2}\times10^{1} \approx 16{,}67$. Les deux longueurs ont 2 chiffres significatifs, donc on en garde 2. Le chiffre suivant est 6 : 16 devient 17. La bactérie est environ 17 fois plus longue que le virus.

7. *Ordres de grandeur et comparaisons*

Ex. 43 ★☆☆ Ordre de grandeur d'un nombre

(a) On a $a = 6{,}1 \geqslant 5$, donc on ajoute 1 à l'exposant : $9+1=10$. L'ordre de grandeur est 10^{10}.

(b) On a $a = 3{,}6 < 5$, donc on garde l'exposant. L'ordre de grandeur est 10^{-8}.

(c) On écrit d'abord $48\,000 = 4{,}8\times10^{4}$. Comme $4{,}8 < 5$, l'ordre de grandeur est 10^{4}.

(d) On écrit d'abord $0{,}000\,68 = 6{,}8\times10^{-4}$. Comme $6{,}8 \geqslant 5$, l'ordre de grandeur est $10^{-4+1} = 10^{-3}$.

(e) 52×10^{6} n'est pas en notation scientifique : $52\times10^{6} = 5{,}2\times10^{7}$. Comme $5{,}2 \geqslant 5$, l'ordre de grandeur est 10^{8}.

(f) On a $a = 5$ et $5 \geqslant 5$, donc on ajoute 1 à l'exposant. L'ordre de grandeur est 10^{-1}.

(g) 3×10^{5} est une valeur approchée, pas un ordre de grandeur : un ordre de grandeur est une puissance de 10. Comme $2{,}9 < 5$, l'ordre de grandeur de $2{,}9\times10^{5}$ est 10^{5}.

Ex. 44 ★☆☆ Comparer sans calculer

(a) Les exposants sont -3 et -5, et $-3 > -5$.
Donc $4{,}1\times10^{-3} > 9{,}6\times10^{-5}$.

(b) Les exposants sont 11 et 12, et $11 < 12$.
Donc $8{,}2\times10^{11} < 3{,}7\times10^{12}$, même si $8{,}2 > 3{,}7$.

(c) Les exposants sont égaux, donc on compare les nombres a : $6{,}05 < 6{,}5$.
Donc $6{,}05\times10^{-7} < 6{,}5\times10^{-7}$.

(d) On passe en notation scientifique : $45\times10^{6} = 4{,}5\times10^{7}$. Les exposants sont égaux et $4{,}5 < 5{,}1$, donc $45\times10^{6} < 5{,}1\times10^{7}$.

(e) $0{,}000\,9 = 9\times10^{-4}$ et $-4 < -3$.
Donc $0{,}000\,9 < 2\times10^{-3}$.

(f) La base vérifie $1{,}3 > 1$, donc $1{,}3^{n}$ augmente avec n. Comme $9 > 5$, on a $1{,}3^{9} > 1{,}3^{5}$.

(g) La base vérifie $0 < 0{,}8 < 1$, donc $0{,}8^{n}$ diminue quand n augmente. Comme $11 > 6$, on a $0{,}8^{11} < 0{,}8^{6}$.

Ex. 45 ★★☆ **Estimer de tête et contrôler**

(a) $3\,180 \approx 3\,000$, $0{,}004\,9 \approx 0{,}005$ et $0{,}52 \approx 0{,}5$. D'où $\frac{3\,000 \times 0{,}005}{0{,}5} = \frac{15}{0{,}5} = 30$. Le résultat vaut environ 30 (la calculatrice donne environ 29,97).

(b) $412 \approx 400$ et $19{,}8 \approx 20$, donc $412 \times 19{,}8 \approx 400 \times 20 = 8\,000$. L'affichage 815,76 est environ 10 fois trop petit : il n'est pas vraisemblable. Maëlle a sans doute tapé 1,98 au lieu de 19,8. Le bon résultat est 8 157,6.

(c) $6{,}2 \approx 6$ et $3{,}9 \approx 4$. Chiffres d'un côté, puissances de 10 de l'autre : $6 \times 4 \times 10^5 \times 10^{-8} = 24 \times 10^{-3} = 2{,}4 \times 10^{-2}$. Comme $2{,}4 < 5$, l'ordre de grandeur est 10^{-2} (valeur exacte : 0,024 18).

(d) Il y a 60 minutes dans une heure, donc on calcule $38 \times 60 \times 7 \times 220 \approx 40 \times 60 \times 7 \times 200$. Or $40 \times 60 = 2\,400$ et $7 \times 200 = 1\,400$, donc environ $3\,360\,000 \approx 3{,}4 \times 10^6$ pages. Comme $3{,}4 < 5$, l'ordre de grandeur est 10^6 pages par an
(valeur exacte : 3 511 200 pages).

Ex. 46 ★★☆ **Du virus au grain de sable**

(a) Virus : $100 \times 10^{-9} = 10^2 \times 10^{-9} = 1 \times 10^{-7}$ m. Bactérie : 2×10^{-6} m. Globule rouge : $7{,}5 \times 10^{-6}$ m. Grain de sable : $0{,}4 \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-4}$ m. Le plus grand exposant l'emporte, et à exposant égal (-6) on compare $2 < 7{,}5$. Dans l'ordre : virus, bactérie, globule rouge, grain de sable.

(b) On calcule un quotient : $\frac{4 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{-4-(-6)} = 2 \times 10^2 = 200$. Le grain de sable est 200 fois plus grand que la bactérie.

(c) $7{,}5 \times 10^{-6}$ m avec $7{,}5 \geqslant 5$, donc on ajoute 1 à l'exposant. L'ordre de grandeur de la taille d'un globule rouge est 10^{-5} m.

(d) Le virus mesure 1×10^{-7} m : son ordre de grandeur est 10^{-7} m. Le grain de sable mesure 4×10^{-4} m et $4 < 5$: son ordre de grandeur est 10^{-4} m. Ils sont séparés de 3 ordres de grandeur, soit un facteur $\frac{10^{-4}}{10^{-7}} = 10^3 = 1\,000$, et non 3. On peut aligner de l'ordre de 10^3 virus sur un grain de sable
(le quotient exact vaut $\frac{4 \times 10^{-4}}{10^{-7}} = 4\,000$, qui a bien pour ordre de grandeur 10^3).

Ex. 47 ★★★ **Du Soleil à la Lune**

(a) Soleil : $1{,}99 < 5$, donc l'ordre de grandeur est 10^{30} kg. Jupiter : $1{,}90 < 5$, donc 10^{27} kg. Lune : $7{,}35 \geqslant 5$, donc on ajoute 1 à l'exposant : 10^{23} kg, et non 10^{22} kg.

Ex. 47 (suite)

(b) Non. « Combien de fois plus » se calcule par un quotient : $\frac{10^{30}}{10^{27}} = 10^3$. Trois ordres de grandeur d'écart correspondent à un facteur 1 000, pas à un facteur 3. Le Soleil est environ 1 000 fois plus lourd que Jupiter.

(c) $\frac{1{,}99 \times 10^{30}}{7{,}35 \times 10^{22}} = \frac{1{,}99}{7{,}35} \times 10^{30-22} \approx 0{,}2707 \times 10^8 = 2{,}707 \times 10^7$. Arrondi à 2 chiffres significatifs : le Soleil est environ $2{,}7 \times 10^7$ fois plus lourd que la Lune.

(d) La différence donne de combien de kilogrammes Jupiter dépasse la Lune, pas combien de fois elle est plus lourde. Il faut un quotient : $\frac{1{,}90 \times 10^{27}}{7{,}35 \times 10^{22}} = \frac{1{,}90}{7{,}35} \times 10^5 \approx 0{,}2585 \times 10^5 = 2{,}585 \times 10^4$. Jupiter est environ $2{,}6 \times 10^4$ fois plus lourde que la Lune.

(e) Soleil et Lune : $\frac{10^{30}}{10^{23}} = 10^7$, et $2{,}7 \times 10^7$ a bien pour ordre de grandeur 10^7 car $2{,}7 < 5$. Jupiter et Lune : $\frac{10^{27}}{10^{23}} = 10^4$, et $2{,}6 \times 10^4$ a pour ordre de grandeur 10^4 car $2{,}6 < 5$. Les deux rapports sont vraisemblables.

Ex. 48 ★★★ **Comparer des puissances sans les calculer**

(a) Faux. La base vérifie $1{,}5 > 1$, donc $1{,}5^n$ augmente avec n, y compris pour des exposants négatifs. Comme $-6 < -3$, on a $1{,}5^{-6} < 1{,}5^{-3}$. Vérification : $1{,}5^{-6} = \frac{64}{729}$ et $1{,}5^{-3} = \frac{8}{27} = \frac{216}{729}$.

(b) La base vérifie $0 < 0{,}6 < 1$, donc la puissance diminue quand l'exposant augmente. Les exposants rangés dans l'ordre décroissant sont $5 > 3 > 0 > -2$, d'où $0{,}6^5 < 0{,}6^3 < 0{,}6^0 < 0{,}6^{-2}$. Vérification : $0{,}6^0 = 1$ et $0{,}6^{-2} = \frac{25}{9} > 1$.

(c) $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ et $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$. Comme $0 < 8 < 9$ et $10 > 0$, on a $8^{10} < 9^{10}$, donc $2^{30} < 3^{20}$.

(d) $2^{30} = 1\,073\,741\,824 \approx 1{,}07 \times 10^9$ et $3^{20} = 3\,486\,784\,401 \approx 3{,}49 \times 10^9$. Comme $1{,}07 < 5$ et $3{,}49 < 5$, les deux nombres ont pour ordre de grandeur 10^9 : l'affirmation de Lucas est juste.

(e) $\frac{3^{20}}{2^{30}} = \frac{9^{10}}{8^{10}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{10} \approx 3{,}247$, soit environ 3,2. Lucas a raison sur l'ordre de grandeur, mais 3^{20} est environ 3 fois plus grand que 2^{30} : avoir le même ordre de grandeur ne veut pas dire être presque égaux.

Ex. 49 ★★★ **Une année de vidéos**

(a) Le nombre d'heures vaut $500 \times 60 \times 24 \times 365$. On arrondit : $500 = 5 \times 10^2$, $60 = 6 \times 10$, $24 \approx 2 \times 10$, $365 \approx 4 \times 10^2$. On calcule les chiffres d'un côté, les puissances de 10 de l'autre : $5 \times 6 \times 2 \times 4 = 240$ et $10^{2+1+1+2} = 10^6$. On obtient environ $240 \times 10^6 = 2{,}4 \times 10^8$ heures par an.

Ex. 49 **(suite)**

(b) Non. L'estimation donne environ 10^8 heures, alors que Jade trouve un ordre de grandeur de 10^6 : son résultat est 100 fois trop petit, donc invraisemblable. En fait, $500 \times 60 \times 24 \times 365 = 262\,800\,000 = 2{,}628 \times 10^8$ heures.

(c) En Go : $2{,}628 \times 10^8 \times 2{,}5 = 6{,}57 \times 10^8$ Go. En octets : $6{,}57 \times 10^8 \times 10^9 = 6{,}57 \times 10^{17}$ octets. Comme $6{,}57 \geqslant 5$, l'ordre de grandeur est 10^{18} octets, et non 10^{17}.

(d) On calcule le quotient : $\frac{6{,}57 \times 10^8}{8 \times 10^3} = \frac{6{,}57}{8} \times 10^5 = 0{,}821\,25 \times 10^5 = 82\,125$. Il faut au minimum 82 125 disques. Ce nombre s'écrit $8{,}2125 \times 10^4$ et $8{,}2125 \geqslant 5$, donc son ordre de grandeur est 10^5 disques.