Terminale spécialité / Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

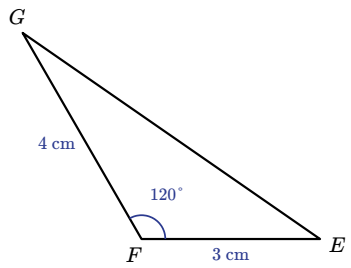
benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 1re : produit scalaire dans le plan*

À retenir : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$ est un nombre. Les deux vecteurs partent du même point : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. La projection donne $\pm AB \times AH$. La polarisation utilise les carrés. $xx' + yy'$ ne vaut qu'en repère orthonormé.

Ex. 1 ★☆☆ **Produit scalaire avec le cosinus** — θ désigne l'angle géométrique des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calcule chaque produit scalaire en valeur exacte et contrôle son signe avec l'angle.



(a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = 45°$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(b) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = 150°$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

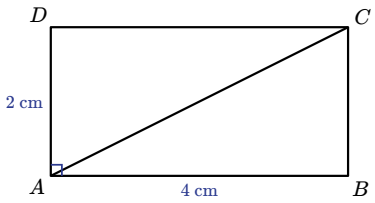
(c) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = 90°$. Lina écrit $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{0}$. Corrige-la.

(d) $\vec{u} = \vec{0}$ et $\|\vec{v}\| = 9$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

(e) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\vec{v} = -\frac{5}{8}\vec{u}$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(f) Dans le triangle EFG de la figure, calcule $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}$.

Ex. 2 ★☆☆ **En coordonnées dans le plan** — Sauf au dernier item, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.



(a) Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour $\vec{u}(3\,;\,-2)$ et $\vec{v}(4\,;\,5)$.

(b) Les vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{1}{2}\,;\,3\right)$ et $\vec{v}(6\,;\,1)$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

Ex. 2 (suite)

(c) Calcule la distance EF pour $E(1\,;\,-2)$ et $F(4\,;\,2)$.

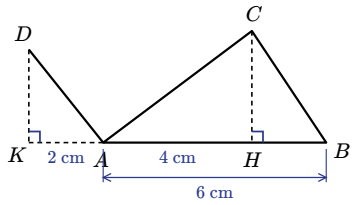
(d) Avec en plus $G(-7\,;\,4)$, calcule $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}$. Déduis-en la nature du triangle EFG.

(e) Pour $\vec{u}(-2\,;\,1)$ et $\vec{v}(3\,;\,4)$, dis sans calculer l'angle s'il est aigu, droit ou obtus.

(f) Trouve le réel m tel que $\vec{u}(m\,;\,4)$ et $\vec{v}(3\,;\,-6)$ soient orthogonaux.

(g) $ABCD$ est le rectangle de la figure. Jade lit $C(1\,;\,1)$ dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD})$ et écrit $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Justifie qu'elle a tort.

Ex. 3 ★★☆ **Plan d'architecte : projection et polarisation** — Sur la figure, H et K sont les projetés orthogonaux de C et de D sur la droite (AB). Le point K n'est pas du même côté de A que B. On donne $AB = 6$, $AH = 4$, $AK = 2$ et $AC = 5$ (en cm). Les angles s'arrondissent au dixième de degré.



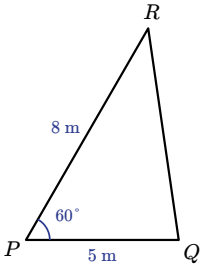
(a) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ à l'aide du projeté H.

(b) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. Déduis-en la nature de l'angle $\widehat{BAD}$.

(c) Déduis-en la longueur BC à l'aide d'une formule de polarisation.

(d) Calcule $\cos\widehat{BAC}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Ex. 4 ★★☆ **Ferme de charpente : Al-Kashi** — Une ferme de charpente forme un triangle PQR avec $PQ = 5$ m, $PR = 8$ m et $\widehat{QPR} = 60°$. Les angles s'arrondissent au dixième de degré.



(a) Calcule $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$.

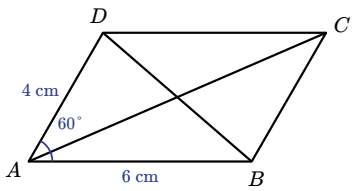
Ex. 4 **(suite)**

(b) Déduis-en la longueur QR avec le théorème d'Al-Kashi.

(c) Calcule $\cos \widehat{PQR}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{PQR}$.

(d) Noé affirme : « $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = PQ \times QR \times \cos \widehat{PQR}$ ». Corrige son erreur et calcule $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}$.

Ex. 5 ★★★ **Carreau de mosaïque en parallélogramme** — Ben dessine un carreau de mosaïque en forme de parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm et $\widehat{BAD} = 60°$. Les angles s'arrondissent au dixième de degré.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

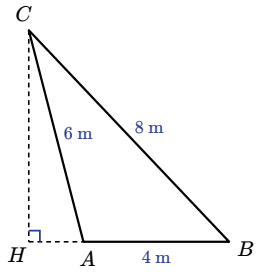
(b) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en utilisant l'angle $\widehat{ABC}$.

(c) Exprime $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis calcule les longueurs exactes AC et BD.

(d) Calcule $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, puis la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$. Le signe est-il cohérent ? Justifie.

(e) Ben veut des diagonales perpendiculaires sans changer AB ni l'angle $\widehat{BAD}$. Quelle longueur AD doit-il choisir ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Voile de bateau : polarisation, projeté et Al-Kashi** — Une voile triangulaire ABC mesure $AB = 4$ m, $AC = 6$ m et $BC = 8$ m. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Les angles s'arrondissent au dixième de degré.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ par une formule de polarisation. Déduis-en la nature de l'angle $\widehat{BAC}$.

(b) Tom écrit : « $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = 1$ ». Explique son erreur.

(c) Justifie que H n'est pas du même côté de A que B, puis calcule AH à l'aide de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(d) Calcule la valeur exacte de CH, puis l'aire de la voile.

Ex. 6 **(suite)**

(e) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le théorème d'Al-Kashi.

Ex. 7 ★★★ **Vrai ou faux justifié : les pièges du produit scalaire** — Inès révise son contrôle. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

(a) Avec $A(-2\,;\,1)$, $B(2\,;\,-1)$ et $C(4\,;\,3)$, le triangle ABC est rectangle isocèle.

(b) Les vecteurs $\vec{u}(m\,;\,m)$ et $\vec{v}(m-1\,;\,3)$ sont orthogonaux pour une seule valeur du réel m.

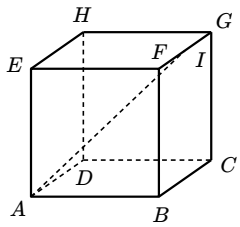
(c) Il existe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$.

(d) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$: $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w} = \vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{w})$.

2. *Produit scalaire dans l'espace : règles de calcul*

À retenir : Dans l'espace, on calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans un plan qui contient A, B et C. Angle droit → projeté (sens contraire : signe $-$), sinon Chasles puis bilinéarité. Double produit : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Ex. 8 ★★★ **Projections dans un cube** — $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 5 ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). I est le milieu de $[FG]$. Calcule chaque produit scalaire sans coordonnées.



(a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG}$

(b) $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EC}$

(c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$

(d) $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{AD}$

(e) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$

(f) $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AI}$

(g) Calcule $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB}$, puis dis si les droites (AE) et (CB) sont sécantes. Justifie.

Ex. 9 ★☆☆ **Bilinéarité avec des normes** — $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace avec $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. Calcule :

(a) $(2\vec{u}) \cdot (-3\vec{v})$

(b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

(c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

(d) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

(e) $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|^2$

(f) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

(g) $(3\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$

Ex. 10 ★★☆ **Une sculpture de verre en tétraèdre régulier** — Une sculpture de verre a la forme d'un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 4 : ses quatre faces sont des triangles équilatéraux. I est le milieu de $[CD]$. Les angles s'arrondissent au dixième de degré.

(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec le cosinus, puis vérifie ton résultat avec la formule de polarisation.

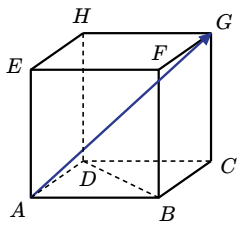
(b) Démontre que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$.

(c) Lina écrit : « $\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\|^2 = AC^2 + AD^2 = 32$ ». A-t-elle raison ? Justifie et donne la bonne valeur.

(d) Déduis-en la longueur AI.

(e) Calcule $\cos \widehat{BAI}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAI}$.

Ex. 11 ★★☆ **Les diagonales d'un cube dans un logiciel 3D** — Dans un logiciel 3D, Malik modélise un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Il travaille sans coordonnées.



(a) Justifie que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -36$.

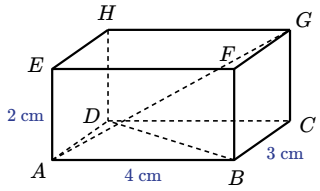
(b) En écrivant $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, calcule $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$.

(c) Les droites (AG) et (BD) sont-elles perpendiculaires ? Justifie.

(d) Calcule $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG}$ par bilinéarité, puis déduis-en la longueur AG.

(e) En écrivant $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$, calcule $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HB}$. Déduis-en le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs.

Ex. 12 ★★★ **Le renfort et la poutre d'une charpente** — Pour une charpente, Hugo modélise un module en pavé droit $ABCDEFGH$ avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AE = 2$ (en mètres ; $ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Un renfort suit $[AG]$, une poutre suit $[BD]$. On travaille sans coordonnées. Angle au dixième de degré.



(a) Justifie que le projeté orthogonal de G sur (AB) est B, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(b) De la même façon, calcule $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(c) Écris $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis déduis-en $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$. Le renfort et la poutre sont-ils orthogonaux ? Justifie.

(d) En écrivant $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, calcule $AG^2 = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG}$, puis déduis-en AG.

(e) Calcule BD, puis la mesure de l'angle géométrique θ entre les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Ex. 13 ★★★ **Le câble d'une tente en tétraèdre** — Inès monte une tente pour enfant en forme de tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 6 (en décimètres) : ses quatre faces sont des triangles équilatéraux. I est le milieu de $[BC]$, J celui de $[AD]$; elle tend un câble de I à J.

(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en te plaçant dans la face ABC, puis donne $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

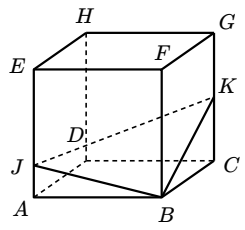
(b) Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis calcule la longueur IJ du câble.

(c) Démontre que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (BC) et à la droite (AD).

(d) Les droites (BC) et (AD) sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ? Et (IJ) avec chacune d'elles ? Justifie.

(e) Calcule $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis la mesure de l'angle géométrique entre les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Ex. 14 ★★★ **Deux rayons laser dans un escape game** — Pour un escape game, Yasmine installe deux rayons laser dans une salle cubique $ABCDEFGH$ d'arête 4 m ($ABCD$ au sol, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). J est sur $[AE]$ avec $AJ = 1$, K est le milieu de $[CG]$. Les rayons vont de J vers B et de J vers K. On travaille sans coordonnées. Angle au dixième de degré.



(a) Calcule JB^2 et BK^2 en justifiant.

(b) En écrivant $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$, calcule JK^2 sans oublier les doubles produits.

(c) Déduis-en $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JK}$ par polarisation, puis la mesure de l'angle $\widehat{BJK}$ entre les deux rayons.

(d) Théo affirme : « (BK) est dans la face $BCGF$, orthogonale à (AB), donc $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$. » A-t-il raison ? Justifie en calculant $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BK}$.

(e) Le triangle JBK a-t-il un angle obtus ? Justifie avec le signe de produits scalaires.

3. *Produit scalaire en coordonnées, norme, distance et angle*

À retenir : En repère orthonormé seulement : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (n'oublie pas la racine). $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$, avec deux vecteurs partant de A ; si $\cos < 0$, l'angle est obtus. Exemple : $(1\,;\,-2\,;\,3) \cdot (4\,;\,1\,;\,0) = 2$.

Ex. 15 ★☆☆ **Produits scalaires et normes en coordonnées** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, on donne $\vec{u}(3\,;\,-2\,;\,2)$, $\vec{v}(-1\,;\,4\,;\,5)$, $\vec{w}\left(\frac{1}{2}\,;\,-3\,;\,2\right)$ et $\vec{t}(2\,;\,5\,;\,2)$.

(a) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(b) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

(c) Calcule $\|\vec{u}\|^2$, puis $\|\vec{u}\|$.

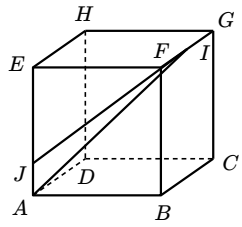
(d) Calcule $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

(e) Calcule $\|\vec{w}\|$.

(f) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

(g) Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

Ex. 16 ★☆☆ **Distances dans un cube** — $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[FG]$ et J est le point de $[AE]$ tel que $AJ = \frac{1}{4}AE$. Donne les distances en valeur exacte.



(a) Donne les coordonnées des points I et J.

(b) Calcule AI^2, puis la distance AI.

(c) Calcule la distance CJ.

(d) Calcule la distance IJ.

(e) Le triangle CGJ est-il isocèle en J ? Justifie.

Ex. 17 ★★☆ **Charpente : nature d'un triangle et angle obtus** — Une charpente est modélisée dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre) par les points $P(2\,;\,-1\,;\,0)$, $Q(3\,;\,3\,;\,-1)$, $R(5\,;\,-1\,;\,3)$ et $S(0\,;\,-2\,;\,2)$. Arrondis les angles au dixième de degré, ou au centième en radians.

(a) Calcule les longueurs PQ, PR et QR en valeur exacte.

(b) Calcule $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$. Déduis-en la nature précise du triangle PQR.

(c) Léo calcule $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PS} = 8$ et conclut que l'angle $\widehat{QPS}$ est aigu. Vérifie son calcul puis corrige son raisonnement.

(d) Donne $\cos \widehat{QPS}$ en valeur exacte, puis une mesure de $\widehat{QPS}$ en degrés et en radians.

Ex. 18 ★★☆ **Logiciel 3D : paramètre m, orthogonalité et normes** — Dans un logiciel de modélisation 3D, on travaille dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. Pour un réel m, on définit $\vec{u}(m\,;\,3\,;\,-2)$ et $\vec{v}(2\,;\,m\,;\,5)$.

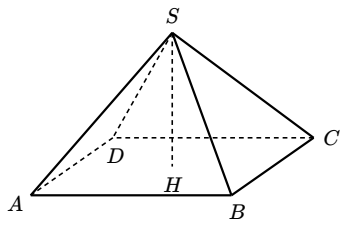
(a) Pour $m = 1$, Hugo écrit $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Détermine la valeur de m pour laquelle $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(c) Détermine les valeurs de m pour lesquelles $\|\vec{u}\| = 7$.

(d) Vrai ou faux ? Il existe un réel m pour lequel $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Pyramide de verre : arêtes, angle au sommet et angle droit introuvable** — Une pyramide de verre $SABCD$ à base carrée est modélisée dans un repère orthonormé $(H\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre). H est le centre de la base. On a $A(3\,;\,-3\,;\,0)$, $B(3\,;\,3\,;\,0)$, $C(-3\,;\,3\,;\,0)$, $D(-3\,;\,-3\,;\,0)$ et $S(0\,;\,0\,;\,4)$. Donne les angles au dixième de degré.



(a) Calcule SA, SB et AB en valeur exacte. Les faces latérales sont-elles des triangles équilatéraux ? Justifie.

(b) Tom écrit $\cos\widehat{ASC} = \dfrac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{SC}}{AS\times SC}$ et trouve un angle aigu. Explique son erreur, puis calcule $\widehat{ASC}$.

(c) Calcule l'angle $\widehat{ASB}$ au sommet d'une face latérale.

(d) Pour un réel m, on note $M(0\,;\,0\,;\,m)$. Détermine les valeurs de m pour lesquelles l'angle $\widehat{AMC}$ est droit. Un point du segment $[HS]$ convient-il ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Drone au-dessus d'une rampe : distance imposée et angle aigu** — Une rampe de skate triangulaire ABC est modélisée dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre) par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(0\,;\,2\,;\,1)$ et $C(3\,;\,4\,;\,0)$. Un drone se place au point $D(m\,;\,m\,;\,4)$, où m est un réel. Donne l'angle au dixième de degré.

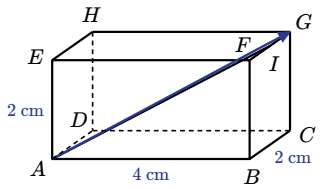
(a) Calcule AB, AC, BC en valeur exacte, puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Déduis-en la nature du triangle ABC.

(b) Exprime AD^2 en fonction de m, puis détermine les valeurs de m pour lesquelles $AD = \sqrt{30}$.

(c) Pour chacune de ces valeurs, calcule $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$. Laquelle donne un angle $\widehat{DAC}$ aigu ? Justifie.

(d) Pour la valeur de m retenue, calcule l'angle $\widehat{DAC}$.

Ex. 21 ★★★ **Aquarium : repère orthonormé obligatoire et angle droit à rebours** — Un aquarium est modélisé par le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous (unité : le décimètre), avec $AB = 4$, $AD = 2$ et $AE = 2$. I est le milieu de $[FG]$. On pose $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Le repère $(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ est orthonormé. Donne l'angle au dixième de degré.



(a) Zoé se place dans $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$, où $G(1\,;\,1\,;\,1)$, et écrit $AG = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule AG.

(b) Donne les coordonnées de I dans $(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. Lucas écrit $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI} = 4\times 2\times 2 + 4\times 1\times 2 = 24$. Corrige son calcul.

(c) Calcule AI en valeur exacte, puis l'angle $\widehat{GAI}$.

(d) M est le point de $[AB]$ tel que $AM = m$, avec $0 \leqslant m \leqslant 4$. Détermine les valeurs de m pour lesquelles le triangle DMI est rectangle en M.

4. *Orthogonalité de droites et de plans, vecteur normal*

À retenir : $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$ (ou $(d)\perp\mathcal{P}$) : orthogonal à DEUX vecteurs NON colinéaires de $\mathcal{P}$. Plans : $\vec{n}$, $\vec{n}'$ colinéaires $\Leftrightarrow$ parallèles ; $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 0 \Leftrightarrow$ perpendiculaires. Droites perpendiculaires = orthogonales ET sécantes.

Ex. 22 ★★★ **Tests d'orthogonalité et points d'un plan** — L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

(a) Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\,;\,-3\,;\,2\right)$ et $\vec{v}\left(4\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

(b) Les vecteurs $\vec{u}(-2\,;\,5\,;\,1)$ et $\vec{w}(1\,;\,2\,;\,-3)$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

(c) Donne un vecteur normal au plan $\mathcal{P} : 4x - 3z + 7 = 0$.

(d) Le point $A(2\,;\,-1\,;\,5)$ appartient-il au plan $3x + 2y - z + 1 = 0$? Justifie.

(e) Trouve le réel d tel que $B(-1\,;\,3\,;\,2)$ appartienne au plan $x - 4y + 2z + d = 0$.

(f) Trouve le réel m tel que $\vec{u}(m\,;\,2\,;\,-3)$ et $\vec{v}(5\,;\,m\,;\,2)$ soient orthogonaux.

Ex. 22 **(suite)**

(g) Les droites $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + 2s \\ y = 4 + s \\ z = 2 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$ sont-elles perpendiculaires ? Justifie.

Ex. 23 ★☆☆ **Comparer des vecteurs normaux** — L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

(a) Les plans $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 4 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + 5y + z + 2 = 0$ sont-ils perpendiculaires ? Justifie.

(b) Les plans $\mathcal{Q}_1 : 3x - 6y + 9z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q}_2 : -x + 2y - 3z + 4 = 0$ sont-ils parallèles ? Justifie.

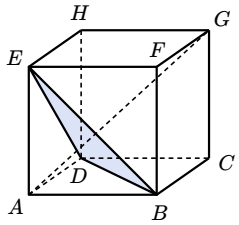
(c) La droite $d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 4 = 0$? Justifie.

(d) Trouve le réel m tel que les plans $mx + 2y - z + 1 = 0$ et $3x - y + mz = 0$ soient perpendiculaires.

(e) La droite $d' : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est-elle orthogonale au plan $\mathcal{R} : x + 2y + 3z - 5 = 0$? Justifie.

(f) Donne une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 4 = 0$ passant par l'origine O.

Ex. 24 ★★☆ **La grande diagonale d'un cube, sans coordonnées** — Inès modélise dans un logiciel 3D un cube $ABCDEFGH$ d'arête a ($a > 0$). Tu travailles sans coordonnées : les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$ sont deux à deux orthogonales et de longueur a.



(a) Écris $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, puis démontre que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ avec $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

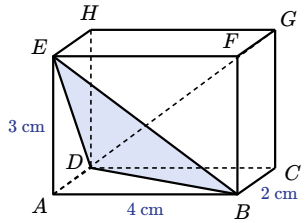
(b) Lina affirme : « $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE). » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Démontre que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

(d) Déduis-en que les droites (AG) et (DE) sont orthogonales.

(e) Les droites (AG) et (DE) sont-elles perpendiculaires ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Renfort de charpente dans une caisse** — Malik, charpentier, renforce une caisse en forme de pavé droit $ABCDEFGH$ avec une planche triangulaire BDE. Dans un repère orthonormé d'origine A : $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,3)$ et $G(4\,;\,2\,;\,3)$.



(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, puis justifie que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

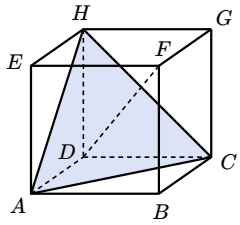
(b) Trouve un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (BDE) de première coordonnée 3.

(c) Théo affirme que $\vec{m}(1\,;\,2\,;\,0)$ est normal au plan (BDE) car $\vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Une cloison est modélisée par le plan $\mathcal{Q} : 2x - y - 8 = 0$. Le plan (BDE) est-il perpendiculaire à $\mathcal{Q}$? Justifie.

(e) La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (BDE) ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **La tige et la vitre d'une lanterne cubique** — Nora fabrique une lanterne en forme de cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 dm. Elle y place une vitre triangulaire ACH et une tige $[DF]$. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$, où $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$.



(a) Calcule $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC}$. Hugo en conclut que les droites (DF) et (AC) sont perpendiculaires. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Démontre que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH). Déduis-en, sans calcul, que (DF) et (CH) sont orthogonales.

(c) Déduis-en une équation cartésienne du plan (ACH).

(d) La droite (DF) coupe le plan (ACH) en K. Détermine les coordonnées de K, puis la distance du point D au plan (ACH).

(e) Calcule le volume du tétraèdre $ACDH$ en prenant ACD pour base. Déduis-en l'aire du triangle ACH.

Ex. 27 ★★★ **Le panneau solaire et ses supports** — Yanis fixe un panneau solaire incliné en trois points $A(1\,;\,2\,;\,3)$, $B(0\,;\,-2\,;\,0)$ et $C(3\,;\,0\,;\,4)$. Ces points sont donnés dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ d'unité 1 m.

(a) Justifie que A, B et C définissent un plan. Détermine ensuite un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC) dont l'ordonnée vaut 1.

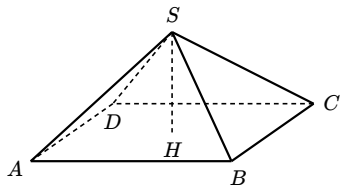
(b) Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Pour m réel, une barre de support est posée sur le plan $\mathcal{Q}_m : x + my + 2z - 1 = 0$. Trouve m pour que $\mathcal{Q}_m \perp (ABC)$. $\mathcal{Q}_m$ peut-il être parallèle à (ABC) ? Justifie.

(d) Un second panneau est posé sur le plan $\mathcal{R} : x + \frac{1}{2}y - z + 3 = 0$. Détermine la position relative de $\mathcal{R}$ et de (ABC). Justifie.

(e) Δ est la droite qui passe par A et qui est orthogonale à (ABC). Détermine les points M de Δ situés à 6 m du plan (ABC).

Ex. 28 ★★★ **La tente pyramidale et sa lampe** — Camille monte une tente en forme de pyramide $SABCD$ à base carrée. On se place dans un repère orthonormé d'origine H, le centre de la base (unité : 1 m), avec $A(-2\,;\,-2\,;\,0)$, $B(2\,;\,-2\,;\,0)$, $C(2\,;\,2\,;\,0)$, $D(-2\,;\,2\,;\,0)$ et $S(0\,;\,0\,;\,2)$. Une lampe est posée en H.



(a) Montre que $\vec{n}(1\,;\,0\,;\,1)$ est normal au plan (SBC), puis déduis-en une équation cartésienne de ce plan.

(b) Vrai ou faux : « Les pans (SBC) et (SAD) de la tente sont perpendiculaires. » Justifie.

(c) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal K de H sur le plan (SBC), puis la distance de la lampe à ce plan.

(d) Démontre que, pour tout point M du plan (SBC), $HM \geqslant HK$, et que l'égalité n'a lieu que si $M = K$.

(e) Détermine le projeté orthogonal P de H sur la droite (SC) et la distance HP. Ce résultat est-il cohérent avec la question précédente ? Justifie.

5. *Équation cartésienne d'un plan*

À retenir : Dans $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est normal (ni un point, ni un vecteur directeur) ; d se calcule avec un point du plan. Plan (ABC) : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, puis d, contrôle avec B et C. Plan médiateur : $\overrightarrow{AB}$ et le milieu. $z = 2$: normal $\vec{k}$.

Ex. 29 ★☆☆ **Lire une équation de plan** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, on donne le plan $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + z - 7 = 0$.

(a) Donne un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$.

(b) Nora prend les coefficients pour former le point $N(3\,;\,-2\,;\,1)$. N appartient-il à $\mathcal{P}_1$? Justifie.

(c) Le point $A(2\,;\,-1\,;\,-1)$ appartient-il à $\mathcal{P}_1$? Justifie.

(d) Détermine la cote z du point $B(1\,;\,4\,;\,z)$ pour que B appartienne à $\mathcal{P}_1$.

(e) Vrai ou faux ? $-6x + 4y - 2z + 14 = 0$ est aussi une équation de $\mathcal{P}_1$. Justifie.

(f) Donne un vecteur normal au plan $\mathcal{Q} : 2y + 6 = 0$ et décris ce plan.

(g) Détermine d pour que $C(-1\,;\,2\,;\,5)$ appartienne au plan $x - 4y + 2z + d = 0$.

Ex. 30 ★★☆ **Écrire l'équation d'un plan** — Le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ est orthonormé. Dans chaque cas, détermine une équation cartésienne du plan.

(a) Le plan passant par $A(-2\,;\,1\,;\,4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;\,-1\,;\,2)$.

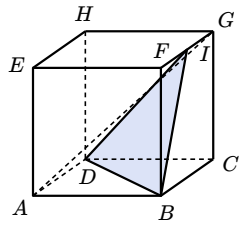
(b) Le plan passant par $B(1\,;\,-3\,;\,-4)$ et orthogonal à l'axe (Oz).

(c) Le plan passant par $C\left(\frac{1}{2}\,;\,2\,;\,-1\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4\,;\,-2\,;\,-6)$.

(d) Le plan passant par O et parallèle au plan $x - 5y + 2z + 9 = 0$.

(e) Le plan passant par $D(2\,;\,0\,;\,-3)$ et orthogonal à une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,4\,;\,-1)$.

Ex. 31 ★★☆ **Un plan qui coupe un cube dans un logiciel 3D** — Dans un logiciel 3D, Malo modélise le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. I est le milieu de $[FG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$.



(a) Donne les coordonnées des points B, D et I.

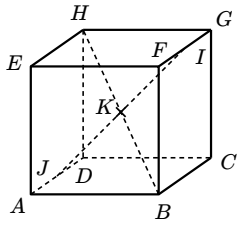
(b) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas colinéaires.

(c) Détermine un vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ au plan (BDI) en prenant $b = 2$. Vérifie-le sur $\overrightarrow{BD}$ et sur $\overrightarrow{BI}$.

(d) Déduis-en une équation cartésienne du plan (BDI). Contrôle-la avec D et I.

(e) Détermine les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDI).

Ex. 32 ★★☆ **Le plan médiateur d'une diagonale de charpente** — Une charpente a la forme d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. K est le milieu de $[BH]$, J celui de $[AD]$ et I celui de $[FG]$. On note $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[BH]$.



(a) Donne les coordonnées de B, de H et de K.

(b) Inès écrit : « $\overrightarrow{BH}(-1\,;\,1\,;\,1)$ est normal et $B \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P} : -x + y + z + 1 = 0$. » A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

(c) Justifie que $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q} : 2x - 2y - 2z + 5 = 0$. Ces deux plans sont-ils confondus ? Justifie.

(d) Étudie l'intersection de la droite (AC) et du plan $\mathcal{P}$.

(e) La droite (JI) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Étudie son intersection avec $\mathcal{P}$.

Ex. 33 ★★★ **Un panneau solaire incliné** — Ambre installe un panneau solaire triangulaire. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre), ses sommets sont $A(1\,;\,-2\,;\,0)$, $B(3\,;\,0\,;\,1)$ et $C(0\,;\,1\,;\,2)$.

(a) Démontre que les points A, B et C définissent un plan.

(b) Lou propose le vecteur normal $\vec{v}(3\,;\,-2\,;\,-2)$ parce que $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Détermine un vecteur normal $\vec{n}$ à (ABC) dont la première coordonnée vaut 1. Déduis-en une équation cartésienne de (ABC), puis contrôle-la avec B et C.

(d) Noé trouve une équation de (ABC) dont le coefficient de x vaut 3. Écris-la sans refaire de calcul et justifie.

(e) La plaque de fixation du panneau est le plan $\mathcal{S} : 2x + 2y + z - 3 = 0$. Les plans (ABC) et $\mathcal{S}$ sont-ils perpendiculaires ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Trois trajectoires de drone au-dessus d'une rampe** — Une rampe de skate est modélisée par le plan $\mathcal{P} : x + 2y - 2z - 4 = 0$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre). Timéo programme trois trajectoires de drone : $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$, $d_3 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Léo affirme : « $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-2)$, lu dans l'équation, dirige la rampe. La droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}$ ne coupe donc pas $\mathcal{P}$. » Corrige son erreur en calculant le point d'intersection.

(b) Étudie la position de d_1, puis celle de d_2, par rapport à $\mathcal{P}$.

(c) Démontre que d_3 coupe $\mathcal{P}$ et donne les coordonnées du point d'intersection.

(d) Pour un réel m, on pose $d_m : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Détermine m pour que d_m ne coupe pas la rampe.

Ex. 35 ★★★ **Le plan médiateur des haubans d'une tente** — Yanis monte une tente. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre), le sol est le plan d'équation $z = 0$. Deux haubans sont attachés en $A(1\,;\,-3\,;\,2)$ et en $B(5\,;\,-1\,;\,0)$. La toile centrale suit le plan médiateur $\mathcal{P}$ de $[AB]$.

(a) Détermine une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(b) Le piquet central est planté au sol en $C(c\,;\,0\,;\,0)$. Détermine c pour que C soit à égale distance de A et de B.

(c) Donne un vecteur normal au sol. Justifie que $\mathcal{P}$ et le sol sont sécants. Sont-ils perpendiculaires ? Justifie.

(d) Pour un réel k, on pose $\mathcal{T}_k : 6x + 3y - 3z + k = 0$. Justifie que $\mathcal{T}_k$ est parallèle à $\mathcal{P}$, puis trouve k pour qu'ils soient confondus.

(e) Le mât suit la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Détermine le point M où il traverse $\mathcal{P}$, puis vérifie que $MA = MB$.

6. *Projeté orthogonal et distance à un plan*

À retenir : Projeté de M sur $\mathcal{P}$: on remplace $M + t\vec{n}$ dans l'équation, d'où t, puis H et $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$ (ex. $t = -\frac{1}{2}$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{6}$: $MH = \frac{\sqrt{6}}{2}$). Un point H du plan n'est le projeté que si $\overrightarrow{MH}$ est normal.

Ex. 36 ★☆☆ **Capteur et panneau solaire incliné** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, un panneau solaire incliné est modélisé par le plan $\mathcal{P} : 2x - 3y + 6z - 1 = 0$ et un capteur par le point $M(1\,;\,-2\,;\,7)$.

(a) Lis un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ et calcule $\|\vec{n}\|$.

(b) Donne une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.

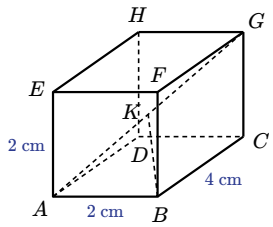
(c) Détermine le paramètre t du point d'intersection H de Δ et de $\mathcal{P}$.

(d) Donne les coordonnées de H et vérifie que $H \in \mathcal{P}$.

(e) Calcule la distance MH du point M au plan $\mathcal{P}$.

(f) Calcule la distance du point $A(-1\,;\,3\,;\,2)$ au plan $\mathcal{P}$.

Ex. 37 ★☆☆ **Rayon laser dans une vitrine** — Un rayon laser suit la diagonale (AG) d'une vitrine en forme de pavé $ABCDEFGH$ avec $AB = 2$, $AD = 4$, $AE = 2$. On se place dans le repère orthonormé d'origine A où $B(2\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,2)$. K est le centre du pavé.



(a) Donne les coordonnées de G et de K.

(b) Justifie que (AG) admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) K est sur (AG). K est-il le projeté orthogonal de B sur (AG) ? Justifie.

(d) Pour le point $M(t\,;\,2t\,;\,t)$ de (AG), exprime $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AG}$ en fonction de t.

(e) Déduis-en les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur (AG).

(f) Calcule la distance du point B à la droite (AG).

Ex. 38 ★★☆ **Drone au-dessus d'une rampe** — Dans un repère orthonormé, une rampe est modélisée par le plan $\mathcal{R} : 2x + 2y - z - 3 = 0$ et un drone par le point $D(3\,;\,4\,;\,2)$. On note $\vec{n}(2\,;\,2\,;\,-1)$.

(a) Malo écrit : « distance $= \dfrac{|2\times3+2\times4-2|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = 4$ ». Explique pourquoi sa méthode n'est pas acceptée et repère son erreur de calcul.

(b) Donne une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale à $\mathcal{R}$, puis le paramètre t du projeté orthogonal H de D sur $\mathcal{R}$.

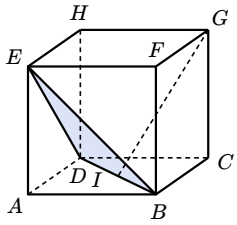
(c) Donne les coordonnées de H et vérifie que $H \in \mathcal{R}$.

Ex. 38 (suite)

(d) Inès écrit : « $DH = t \times \|\vec{n}\|$ ». Corrige son erreur et calcule la distance du drone à la rampe.

(e) Détermine le point D' de Δ, différent de D, dont la distance à $\mathcal{R}$ est égale à DH.

Ex. 39 ★★☆ **Tétraèdre dans un cube en 3D** — Dans un logiciel 3D, Clara modélise un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, avec le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[BD]$.



(a) Donne les coordonnées de B, D, E, G et vérifie que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (BDE).

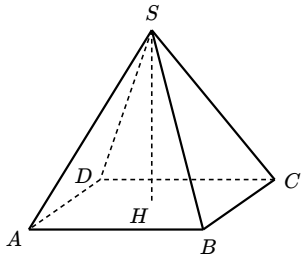
(b) I appartient à (BDE). Noé affirme que I est le projeté orthogonal de G sur (BDE). A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine le projeté orthogonal J de G sur (BDE), puis la distance de G au plan (BDE).

(d) On admet que le triangle BDE a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déduis-en le volume du tétraèdre $BDEG$.

(e) Calcule le volume du tétraèdre $ABDE$ en prenant ABD pour base, puis déduis-en la distance de A au plan (BDE).

Ex. 40 ★★★ **Pyramide de verre** — Une pyramide de verre $SABCD$ a pour base le carré $ABCD$ de côté 4 m. Sa hauteur $[SH]$ mesure 4 m. On se place dans un repère orthonormé (unité : le mètre) où $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(4\,;\,4\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $S(2\,;\,2\,;\,4)$. On note $\vec{n}(2\,;\,0\,;\,1)$. Distances en valeur exacte.



(a) Démontre que $\vec{n}$ est normal au plan (SBC), puis déduis-en une équation cartésienne de (SBC).

(b) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal K de A sur (SBC), puis la distance de A au plan (SBC).

(c) Yanis affirme : « Le milieu I de $[BC]$ est dans (SBC), donc AI est la distance de A au plan (SBC). » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 40 (suite)

(d) Calcule le volume du tétraèdre $SABC$ en prenant ABC pour base, puis déduis-en l'aire du triangle SBC.

Ex. 41 ★★★ **Lanterne et toile de tente** — Dans un repère orthonormé (unité : le mètre), un pan de toile de tente est modélisé par le plan $\mathcal{P} : 2x - 2y + z - 3 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(2\,;\,-2\,;\,1)$. Une lanterne est au point $M(6\,;\,-2\,;\,5)$. Un arceau posé sur la toile suit la droite (d) :

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 3 + 2s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R},$$ de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,2)$.

(a) Cas général : H est le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ et N un point de $\mathcal{P}$. Démontre que $MN^2 = MH^2 + HN^2$, puis déduis-en que H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.

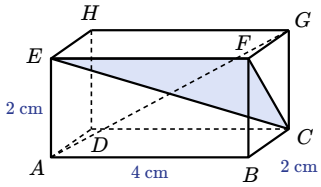
(b) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de la lanterne M sur $\mathcal{P}$.

(c) Vrai ou faux ? Justifie : « La lanterne M est à moins de 5 m du plan $\mathcal{P}$. »

(d) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal K de M sur la droite (d), puis calcule MK.

(e) Calcule HK, vérifie que $MK^2 = MH^2 + HK^2$ et explique ce résultat avec la première question.

Ex. 42 ★★★ **Planche de charpente dans un hangar** — Un hangar est modélisé par le pavé $ABCDEFGH$ avec $AB = 4$, $AD = 2$ et $AE = 2$ (en mètres). Une planche de charpente occupe le plan (EFC). Dans le repère orthonormé d'origine A (unité : le mètre) : $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(4\,;\,2\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,2)$, $F(4\,;\,0\,;\,2)$, $G(4\,;\,2\,;\,2)$, $H(0\,;\,2\,;\,2)$. Distances en valeur exacte.



(a) Démontre que la droite (AH) est orthogonale au plan (EFC), puis déduis-en une équation cartésienne de (EFC).

(b) Léa cherche le projeté orthogonal de B sur (EFC) avec la droite passant par B dirigée par $\overrightarrow{EC}$. Montre qu'elle échoue, explique son erreur, puis détermine ce projeté et la distance de B à (EFC).

(c) Pour $s \in [0\,;\,1]$, le point $M(4s\,;\,2s\,;\,2s)$ décrit $[AG]$. Exprime la distance de M à (EFC) en fonction de s. Pour quel point est-elle nulle ? Justifie.

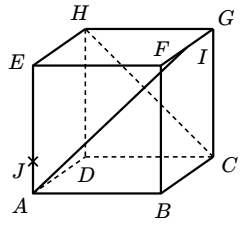
(d) Détermine les coordonnées des points M de $[AG]$ situés à la distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ du plan (EFC).

(e) Calcule l'aire du triangle EFC, puis le volume du tétraèdre $GEFC$ en prenant EFC pour base.

7. Sujets type bac

À retenir : Repère lié au cube : lis chaque coordonnée sur les arêtes. Projeté : $M + t\vec{n}$ dans l'équation $\to t \to H$, puis $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$ (ex. $t = -4$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$: $MH = 4\sqrt{2}$). Un point du plan n'est le projeté que si $\overrightarrow{MH}$ est normal.

Ex. 43 ★★★ **Charpente cubique : coordonnées et orthogonalité** — Malik étudie une charpente cubique $ABCDEFGH$ d'arête 1 dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[FG]$ et J le point de $[AE]$ tel que $AJ = \frac{1}{4}AE$. Donne les résultats en valeur exacte.



(a) Donne les coordonnées des points G, I et J.

(b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{JI}$.

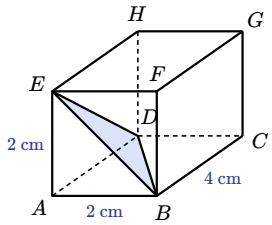
(c) Calcule la longueur JI.

(d) Les droites (AI) et (CH) sont-elles orthogonales ? Justifie.

(e) Les vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

(f) Calcule la distance DI.

Ex. 44 ★★★ **Panneau solaire dans un cadre en pavé** — Yasmine fixe un panneau solaire incliné selon le triangle BDE d'un cadre en forme de pavé $ABCDEFGH$. Dans un repère orthonormé d'origine A (unité : le mètre), $B(2\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,2)$. On note $\mathcal{P} : 2x + y + 2z - 4 = 0$.



(a) Vérifie que les points B, D et E appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

(b) Lis un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.

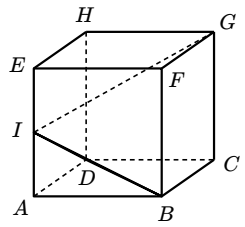
(c) Le sommet G appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Justifie.

(d) La droite (AG) est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$? Justifie.

(e) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} : x + 2y - 2z = 0$ sont-ils perpendiculaires ? Justifie.

(f) Détermine le réel d tel que le plan $\mathcal{P}' : 2x + y + 2z + d = 0$ passe par G.

Ex. 45 ★★☆ **Logiciel 3D : du vecteur normal au volume** — Inès modélise dans un logiciel 3D un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[AE]$. Donne les résultats en valeur exacte. Au bac, un résultat « démontre que » peut servir pour la suite même si tu n'as pas réussi à le démontrer.



(a) Donne les coordonnées des points B, D, G et I.

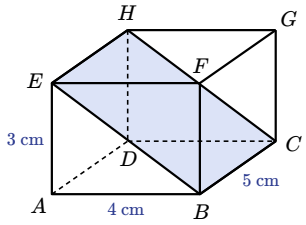
(b) Démontre que $\vec{n}(1\,;\,1\,;\,2)$ est normal au plan (BDI), puis déduis-en une équation cartésienne de ce plan.

(c) Détermine une représentation paramétrique de la droite Δ passant par G et orthogonale à (BDI), puis son point d'intersection K avec (BDI) et la distance de G au plan (BDI).

(d) Justifie que K est le milieu de $[BD]$ et que $(IK)\perp(BD)$, puis calcule l'aire du triangle BDI.

(e) Déduis-en le volume du tétraèdre $GBDI$.

Ex. 46 ★★☆ **Drone au-dessus d'une rampe : les erreurs de Noé** — Une rampe est le rectangle $BCHE$ tracé dans un pavé $ABCDEFGH$, dans un repère orthonormé d'origine A (unité : le mètre) où $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,5\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,3)$. On admet que le plan $\mathcal{R}=(BCH)$ a pour équation $3x+4z-12=0$; on note $\vec{n}(3\,;\,0\,;\,4)$. Un drone se trouve en $M\left(5\,;\,2\,;\,\frac{11}{2}\right)$.



(a) Noé affirme : « $N(0\,;\,2\,;\,3)$ est sur la rampe, donc c'est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{R}$. » A-t-il raison ? Justifie.

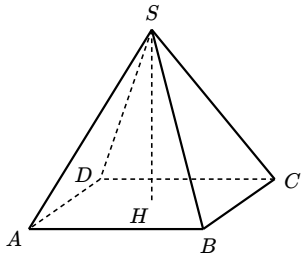
(b) Détermine une représentation paramétrique de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{R}$, puis le projeté orthogonal K de M sur $\mathcal{R}$.

(c) Noé écrit « $MK=t\times\|\vec{n}\|=-5$ », puis vérifie avec une formule de distance toute faite. Corrige-le et donne la distance de M à $\mathcal{R}$.

(d) Justifie que $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KN}=0$, puis déduis-en MN à l'aide de MK et KN.

(e) Le drone descend sur la droite (MK) jusqu'à être à 2,5 m de la rampe, du côté de M. Détermine sa position L.

Ex. 47 ★★★ **Pyramide de verre : distance, volume et aire** — Lina étudie la maquette d'une pyramide de verre $SABCD$ à base carrée de centre H. Dans un repère orthonormé d'origine H (unité : le mètre), on a $A(2\,;\,-2\,;\,0)$, $B(2\,;\,2\,;\,0)$, $C(-2\,;\,2\,;\,0)$, $D(-2\,;\,-2\,;\,0)$ et $S(0\,;\,0\,;\,4)$. Les résultats se donnent en valeur exacte.



(a) Détermine un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (SBC), puis déduis-en une équation cartésienne de ce plan.

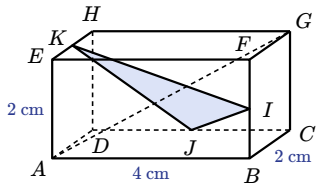
(b) Montre que le point $K\left(2\,;\,\frac{6}{5}\,;\,\frac{8}{5}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan (SBC).

(c) Déduis-en la distance du point A au plan (SBC).

(d) Calcule le volume du tétraèdre $SABC$ en prenant pour base le triangle ABC.

(e) Déduis-en l'aire du triangle SBC, puis vérifie-la par un calcul direct.

Ex. 48 ★★★ **Rayon laser et miroir plan dans un pavé** — Sacha place un miroir plan dans une boîte en forme de pavé $ABCDEFGH$ avec $AB=4$ dm, $AD=2$ dm et $AE=2$ dm. On utilise le repère orthonormé $(A\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ (unité : le décimètre) où $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,2)$. Le miroir est le plan (IJK), où I, J et K sont les milieux de $[BF]$, $[DC]$ et $[EH]$. Les angles s'arrondissent au dixième de degré.



(a) Explique pourquoi le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$ n'est pas orthonormé, puis donne les coordonnées de I, J et K.

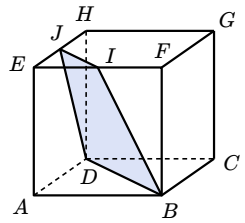
(b) Démontre que $\vec{n}(1\,;\,2\,;\,2)$ est normal au miroir (IJK), puis déduis-en une équation cartésienne de ce plan.

(c) Le laser part de A et vise G. Détermine les coordonnées du point L où le rayon (AG) frappe le miroir.

(d) Calcule l'angle géométrique entre les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\vec{n}$ (angle d'incidence du rayon).

(e) Sacha affirme que la distance de G au miroir est GL. Détermine le projeté orthogonal R de G sur le miroir, puis corrige Sacha.

Ex. 49 ★★★ **Antenne et toit incliné : du plan au volume** — Hugo modélise un local technique cubique $ABCDEFGH$ d'arête 6 m dans le repère orthonormé $(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (unité : le mètre), avec $B(6\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,6\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,6)$. Les points I et J sont les milieux de $[EF]$ et $[EH]$. Le toit incliné suit le plan (BDI). Un câble d'antenne relie G au toit par le chemin le plus court. Les résultats se donnent en valeur exacte.



(a) Donne les coordonnées de I et J. Montre que le plan (BDI) a pour équation $2x + 2y + z - 12 = 0$, puis que J appartient à ce plan.

(b) Donne une représentation paramétrique de la droite Δ passant par G et orthogonale au toit, puis les coordonnées du point P d'intersection de Δ et du toit.

(c) Démontre que P est le point du plan (BDI) le plus proche de G, puis déduis-en la distance de G au toit.

(d) Détermine le projeté orthogonal Q de J sur la droite (BD), puis calcule l'aire du triangle BDJ.

(e) Déduis-en le volume du tétraèdre $GBDJ$.