Terminale spécialité / Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 1re : produit scalaire dans le plan*

Ex. 1 ★☆☆ **Produit scalaire avec le cosinus**

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7\times 2\times\cos 45° = 14\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$. Le résultat est positif, ce qui est cohérent avec un angle aigu.

(b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\sqrt{3}\times 5\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{10\times 3}{2} = -15$. Le résultat est négatif, ce qui est cohérent avec un angle obtus.

(c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6\times 3\times\cos 90° = 18\times 0 = 0$. Un produit scalaire est un nombre et non un vecteur : il faut écrire $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, pas $\vec{0}$.

(d) Par définition, si l'un des vecteurs est nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Le produit scalaire est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
(le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).

(e) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, avec $\|\vec{v}\| = \frac{5}{8}\times 4 = \frac{5}{2}$.
Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = -4\times\frac{5}{2} = -10$.

(f) Les vecteurs ne partent pas du même point. Comme $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FE}$, on a $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG} = -FE\times FG\times\cos\widehat{EFG} = -3\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$. L'angle des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ vaut 60° : il est aigu, donc le résultat positif est cohérent.

Ex. 2 ★☆☆ **En coordonnées dans le plan**

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' = 3\times 4 + (-2)\times 5 = 12 - 10 = 2$.

(b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}\right)\times 6 + 3\times 1 = -3 + 3 = 0$. Le produit scalaire est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(c) $\overrightarrow{EF}(3\,;\,4)$, donc $EF = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

(d) $\overrightarrow{EF}(3\,;\,4)$ et $\overrightarrow{EG}(-8\,;\,6)$, donc $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = xx' + yy' = 3\times(-8) + 4\times 6 = 0$. Le produit scalaire est nul, donc $(EF)\perp(EG)$: le triangle EFG est rectangle en E. Il n'est pas isocèle, car $EG = \sqrt{(-8)^2+6^2} = 10 \neq EF = 5$.

(e) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\times 3 + 1\times 4 = -2$. Comme $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$, où θ est l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire a le signe de $\cos\theta$. Il est négatif, donc l'angle est obtus.

(f) Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3m + 4\times(-6) = 0$, soit $3m = 24$, donc $m = 8$.

Ex. 2 (suite)

(g) La formule x^2+y^2 n'est valable qu'en repère orthonormé. Ici $AB = 4$ et $AD = 2$: le repère n'est pas orthonormé. Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 4 = 20$, et non 2.

Ex. 3 ★★☆ **Plan d'architecte : projection et polarisation**

(a) H est le projeté orthogonal de C sur (AB), et il est du même côté de A que B.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 6\times 4 = 24$.

(b) K est du côté opposé à B par rapport à A.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK} = -AB\times AK = -6\times 2 = -12$. Le produit scalaire est négatif, donc l'angle $\widehat{BAD}$ est obtus.

(c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 36 + 25 - 48 = 13$. On utilise bien les carrés des longueurs.
Donc $BC = \sqrt{13}$ cm.

(d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, donc $\cos\widehat{BAC} = \frac{24}{6\times 5} = \frac{4}{5}$. On en déduit $\widehat{BAC}\approx 36{,}9°$.

Ex. 4 ★★☆ **Ferme de charpente : Al-Kashi**

(a) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = PQ\times PR\times\cos\widehat{QPR} = 5\times 8\times\frac{1}{2} = 20$.

(b) D'après le théorème d'Al-Kashi : $QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2\times PQ\times PR\times\cos\widehat{QPR} = 25 + 64 - 40 = 49$.
Donc $QR = 7$ m.

(c) D'après le théorème d'Al-Kashi, $\cos\widehat{PQR} = \frac{QP^2+QR^2-PR^2}{2\times QP\times QR} = \frac{25+49-64}{70} = \frac{1}{7}$. On en déduit $\widehat{PQR}\approx 81{,}8°$.

(d) Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne partent pas du même point : leur angle est le supplémentaire de $\widehat{PQR}$. Comme $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, on a $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR} = -QP\times QR\times\cos\widehat{PQR} = -5\times 7\times\frac{1}{7} = -5$. Le produit scalaire vaut donc -5, et non 5.

Ex. 5 ★★★ **Carreau de mosaïque en parallélogramme**

(a) Les deux vecteurs partent de A : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AD\times\cos\widehat{BAD} = 6\times 4\times\frac{1}{2} = 12$.

Ex. 5 **(suite)**

(b) Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires, donc $\widehat{ABC} = 180° - 60° = 120°$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne partent pas du même point : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \times BC \times \cos 120° = -6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$. C'est cohérent : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc on retrouve $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

(c) Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Par Chasles : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Par bilinéarité : $AC^2 = AB^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2 = 36 + 24 + 16 = 76$, donc $AC = 2\sqrt{19}$ cm. De même, $BD^2 = AD^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2 = 16 - 24 + 36 = 28$, donc $BD = 2\sqrt{7}$ cm.

(d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2 = 16 - 36 = -20$. On note θ l'angle cherché : $\cos\theta = \frac{-20}{2\sqrt{19} \times 2\sqrt{7}} = -\frac{5}{\sqrt{133}}$, donc $\theta \approx 115{,}7°$. Le produit scalaire est négatif et l'angle est obtus : c'est cohérent.

(e) D'après la question précédente, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2$, quel que soit l'angle. Les diagonales sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, c'est-à-dire $AD^2 = 36$. Comme une longueur est positive, $AD = 6$ cm. Le carreau est alors un losange.

Ex. 6 ★★★ **Voile de bateau : polarisation, projeté et Al-Kashi**

(a) Polarisation : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(16 + 36 - 64) = -6$. Ce produit scalaire est négatif, donc $\cos\widehat{BAC} < 0$: l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

(b) La formule de polarisation utilise les CARRÉS des longueurs, pas les longueurs. Tom trouve $1 > 0$ et conclurait à tort que l'angle est aigu. Le bon calcul donne $\frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - 8^2) = -6$.

(c) Par projection : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Si H était du même côté de A que B, ce produit vaudrait $AB \times AH \geqslant 0$. Or il vaut $-6 < 0$, donc H n'est pas du même côté que B et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$. On obtient $-4 \times AH = -6$, d'où $AH = \frac{3}{2}$ m.

(d) Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 36 - \frac{9}{4} = \frac{135}{4}$, donc $CH = \frac{\sqrt{135}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$ m. $[CH]$ est la hauteur issue de C, donc l'aire vaut $\frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$ m².

Ex. 6 **(suite)**

(e) Al-Kashi : $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$, donc $\cos\widehat{ABC} = \frac{16+64-36}{2\times4\times8} = \frac{44}{64} = \frac{11}{16}$. On en déduit $\widehat{ABC} \approx 46{,}6°$.

Ex. 7 ★★★ **Vrai ou faux justifié : les pièges du produit scalaire**

(a) $\overrightarrow{BA}(-4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{BC}(2\,;\,4)$. En repère orthonormé, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = xx' + yy' = (-4) \times 2 + 2 \times 4 = 0$, donc $(BA) \perp (BC)$: le triangle est rectangle en B. De plus, $BA = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ et $BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, donc $BA = BC$. L'affirmation est VRAIE.

(b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = m(m-1) + 3m = m^2 + 2m = m(m+2)$. Ce produit est nul si et seulement si $m = 0$ ou $m = -2$. Pour $m = 0$, $\vec{u} = \vec{0}$: le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. Pour $m = -2$: $\vec{u}(-2\,;\,-2)$, $\vec{v}(-3\,;\,3)$ et $6 - 6 = 0$. Il y a donc deux valeurs, et l'affirmation est FAUSSE.

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$ et $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant 2 \times 3 = 6 < 7$. L'affirmation est FAUSSE.

(d) Un produit scalaire est un nombre : le membre de gauche est colinéaire à $\vec{w}$, celui de droite à $\vec{u}$. Contre-exemple : $\vec{u} = \vec{v} = \vec{\imath}(1\,;\,0)$ et $\vec{w} = \vec{\jmath}(0\,;\,1)$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, donc le membre de gauche vaut $\vec{\jmath}$. Et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, donc le membre de droite vaut $\vec{0} \neq \vec{\jmath}$. L'affirmation est FAUSSE.

2. *Produit scalaire dans l'espace : règles de calcul*

Ex. 8 ★☆☆ **Projections dans un cube**

(a) La droite (BG) est dans la face $BCGF$, qui est orthogonale à (AB). Le projeté orthogonal de G sur (AB) est donc B. On obtient $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB} = 0$.

(b) La droite (HC) est dans la face $CDHG$, qui est orthogonale à (EH). Le projeté de C sur (EH) est donc H, et $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EH} = EH^2 = 25$.

(c) La droite (AH) est dans la face $ADHE$, qui est orthogonale à (AB). Le projeté de H sur (AB) est donc A, et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = BA^2 = 25$.

(d) $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$.
Donc $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -AD^2 = -25$. Les vecteurs sont de sens contraires, donc le produit scalaire est négatif.

Ex. 8 **(suite)**

(e) Le plan qui passe par I et qui est parallèle à la face $ABFE$ coupe (AD) au milieu M de $[AD]$. M est donc le projeté de I sur (AD), et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM}=5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$
(même sens).

(f) $\overrightarrow{HE}=-\overrightarrow{AD}$.
Donc $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}=-\frac{25}{2}$. Le projeté $\overrightarrow{AM}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{HE}$, d'où le signe négatif.

(g) (AE) est orthogonale à la face $ABCD$, donc à la droite (CB) qui est dans cette face : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. Pourtant, (AE) ne coupe le plan $(ABCD)$ qu'en A, et $A\notin(CB)$: ces deux droites orthogonales ne se coupent pas.

Ex. 9 ★☆☆ **Bilinéarité avec des normes**

(a) $(2\vec{u})\cdot(-3\vec{v})=2\times(-3)\times\vec{u}\cdot\vec{v}=-6\times(-4)=24$.

(b) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=9+(-4)=5$
.

(c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=9+2\times(-4)+25=26$.

(d) $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{26}$.

(e) $\|\vec{u}-2\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-4\,\vec{u}\cdot\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2=9-4\times(-4)+4\times25=125$.

(f) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=9-25=-16$.

(g) $(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+2\vec{v})=3\|\vec{u}\|^2+6\,\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-2\|\vec{v}\|^2=27-24+4-50=-43$.

Ex. 10 ★★☆ **Une sculpture de verre en tétraèdre régulier**

(a) A, B, C sont dans le plan de la face équilatérale ABC, donc $\widehat{BAC}=60°$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos60°=16\times\frac{1}{2}=8$. Par polarisation, avec $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)=\frac{1}{2}(16+16-16)=8$.
Les deux méthodes donnent bien 8.

(b) Par Chasles, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{AI}$, car I est le milieu de $[CD]$. Dans la face ABD, on a de même $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8$. Par bilinéarité, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(8+8)=8$.

(c) Elle a tort : elle oublie le double produit. $\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|^2=AC^2+2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+AD^2=16+2\times8+16=48$
(la face ACD est équilatérale, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=8$).

Ex. 10 **(suite)**

(d) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, donc $AI=\frac{1}{2}\sqrt{48}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.
Conclusion : $AI=2\sqrt{3}$
(c'est bien la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 4).

(e) $\cos\widehat{BAI}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}}{AB\times AI}=\frac{8}{4\times2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Donc $\widehat{BAI}\approx54{,}7°$. L'angle est aigu, ce qui est cohérent avec un produit scalaire positif.

Ex. 11 ★★☆ **Les diagonales d'un cube dans un logiciel 3D**

(a) La droite (AD) est orthogonale à (AB), donc le projeté de D sur (AB) est A. On obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-AB^2=-36$: $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires.

(b) Par bilinéarité, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BD}$. Le projeté de D sur (BC) est C, donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BC^2=36$. (CG) est orthogonale à la face $ABCD$, qui contient (BD), donc $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. Au total, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=-36+36+0=0$.

(c) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, donc les droites (AG) et (BD) sont orthogonales. Mais (AG) ne coupe le plan $(ABCD)$ qu'en A (car G n'est pas dans ce plan), et $A\notin(BD)$. Les deux droites n'ont donc aucun point commun. Des droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes : (AG) et (BD) ne sont pas perpendiculaires.

(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ sont orthogonaux deux à deux, donc tous les doubles produits sont nuls : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}=AB^2+BC^2+CG^2=36+36+36=108$. Comme $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}=AG^2$, on obtient $AG=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

(e) Avec $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$, seuls les vecteurs colinéaires donnent un produit non nul : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{HD}=-36$, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}=-36$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=36$.
Donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HB}=-36-36+36=-36$. $[HB]$ est une diagonale du cube, comme $[AG]$, donc $HB=6\sqrt{3}$ et $\cos\theta=\frac{-36}{6\sqrt{3}\times6\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$. Le cosinus est négatif : l'angle entre $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HB}$ est obtus.

Ex. 12 ★★★ **Le renfort et la poutre d'une charpente**

(a) La droite (AB) est orthogonale à (BC) et à (BF), deux droites sécantes du plan (BCG). Elle est donc orthogonale à ce plan, donc à la droite (BG) qui y est contenue. Le projeté orthogonal de G sur (AB) est donc B. Dans le plan (ABG) : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=4^2=16$.

Ex. 12 (suite)

(b) De même, (AD) est orthogonale au plan (DCG), donc le projeté de G sur (AD) est D : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}=AD^2=3^2=9$. Et (AE) est orthogonale au plan (EFG), donc le projeté de G sur (AE) est E : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=AE^2=2^2=4$.

(c) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$. Par bilinéarité : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=9-16=-7$. Comme $-7\neq 0$, les vecteurs ne sont pas orthogonaux : le renfort et la poutre ne sont pas orthogonaux. Dans un cube, on aurait $AD=AB$ et un produit nul ; ici, ce n'est pas le cas.

(d) On a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$. Par bilinéarité : $AG^2=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AE}=16+9+4=29$. Donc $AG=\sqrt{29}$ m.

(e) Le triangle ABD est rectangle en A, donc $BD^2=4^2+3^2=25$ et $BD=5$. Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BD}$. Alors $\theta=\widehat{GAP}$, angle mesuré dans le plan (AGP). On a $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}}{AG\times BD}=\frac{-7}{5\sqrt{29}}$, donc $\theta\approx 105{,}1°$. Le produit scalaire est négatif : l'angle est obtus.

Ex. 13 ★★★ Le câble d'une tente en tétraèdre

(a) Les points A, B, C sont dans le plan de la face ABC, qui est un triangle équilatéral, donc $\widehat{BAC}=60°$. On obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos 60°=6\times 6\times\frac{1}{2}=18$. De même, dans les faces ABD et ACD : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=18$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=18$.

(b) I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. J est le milieu de $[AD]$, donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Avec Chasles, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$. On développe sans oublier les doubles produits : $IJ^2=\frac{1}{4}(AD^2+AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(108-36-36+36)=18$.
Donc $IJ=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ dm.

(c) On a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Par bilinéarité : $2\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AB^2-AC^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=18-18-18+36-36+18=0$. Ensuite, $2\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=36-18-18=0$. Les deux produits scalaires sont nuls : (IJ) est orthogonale à (BC) et à (AD).

Ex. 13 (suite)

(d) On a $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=18-18=0$, donc (BC) et (AD) sont orthogonales. Comme $ABCD$ est un tétraèdre, ces droites ne sont pas coplanaires : elles ne se coupent pas, donc elles ne sont pas perpendiculaires. En revanche, (IJ) coupe (BC) en I et (AD) en J, et elle leur est orthogonale : (IJ) est perpendiculaire à chacune des deux droites.

(e) D'après la question 2, $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$. Par bilinéarité : $2\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-AB^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=18-36-18=-36$, donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=-18$. Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{IJ}$: l'angle cherché est $\theta=\widehat{BAP}$, mesuré dans le plan (ABP). On a $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}}{IJ\times AB}=\frac{-18}{3\sqrt{2}\times 6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta=135°$. Le produit scalaire est négatif : l'angle est obtus.

Ex. 14 ★★★ Deux rayons laser dans un escape game

(a) Le triangle JAB est rectangle en A (face $ABFE$). D'après le théorème de Pythagore, $JB^2=JA^2+AB^2=1+16=17$. Le triangle BCK est rectangle en C (face $BCGF$), avec $CK=2$: $BK^2=BC^2+CK^2=16+4=20$.

(b) On a $AC^2=AB^2+BC^2=32$. La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC), donc $\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. De même, (CG) est orthogonale à ce plan, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CK}=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{JA}$ (vers le bas) et $\overrightarrow{CK}$ (vers le haut) sont colinéaires de sens contraires, donc $\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{CK}=-1\times 2=-2$. On obtient $JK^2=JA^2+AC^2+CK^2+2\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{CK}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CK}=1+32+4+0-4+0=33$.

(c) On a $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{BK}$. Par polarisation : $\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}(JB^2+JK^2-BK^2)=\frac{1}{2}(17+33-20)=15$. Dans le plan (JBK) : $\cos\widehat{BJK}=\frac{15}{\sqrt{17}\times\sqrt{33}}$, donc $\widehat{BJK}\approx 50{,}7°$.

(d) Théo a tort. (BK) est bien orthogonale à (AB), mais J n'est pas sur (AB) : le projeté de K sur (BJ) n'est pas B. Avec Chasles, $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}$. On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CK}=0$ et $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (arêtes orthogonales, même quand elles ne se coupent pas). Enfin, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{CK}=1\times 2=2$. Ainsi $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BK}=2\neq 0$: l'angle en B n'est pas droit.

Ex. 14 **(suite)**

(e) Par polarisation, $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}(KJ^2+KB^2-JB^2)=\frac{1}{2}(33+20-17)=18$. Les trois produits scalaires $\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{JK}=15$, $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BK}=2$ et $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{KB}=18$ sont strictement positifs. Les cosinus des trois angles sont donc positifs : les trois angles sont aigus. Le triangle JBK n'a pas d'angle obtus.

3. *Produit scalaire en coordonnées, norme, distance et angle*

Ex. 15 ★☆☆ **Produits scalaires et normes en coordonnées**

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'=3\times(-1)+(-2)\times4+2\times5=-3-8+10=-1$.

(b) $\vec{u}\cdot\vec{w}=3\times\frac{1}{2}+(-2)\times(-3)+2\times2=\frac{3}{2}+6+4=\frac{23}{2}$.

(c) $\|\vec{u}\|^2=3^2+(-2)^2+2^2=9+4+4=17$, donc $\|\vec{u}\|=\sqrt{17}$.

(d) $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $(3-(-1)\,;\,-2-4\,;\,2-5)$, soit $(4\,;\,-6\,;\,-3)$.
Donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{4^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+36+9}=\sqrt{61}$.

(e) $\|\vec{w}\|=\sqrt{\frac{1}{4}+9+4}=\sqrt{\frac{53}{4}}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.

(f) $\vec{u}\cdot\vec{t}=3\times2+(-2)\times5+2\times2=6-10+4=0$: le produit scalaire est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux.

(g) $\vec{v}\cdot\vec{w}=(-1)\times\frac{1}{2}+4\times(-3)+5\times2=-\frac{1}{2}-12+10=-\frac{5}{2}\neq0$, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

Ex. 16 ★☆☆ **Distances dans un cube**

(a) $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$; $J\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

(b) $\overrightarrow{AI}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, donc $AI^2=1+\frac{1}{4}+1=\frac{9}{4}$ et $AI=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

(c) $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $\overrightarrow{CJ}\left(-1\,;\,-1\,;\,\frac{1}{4}\right)$, donc $CJ=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{33}{16}}=\frac{\sqrt{33}}{4}$.

(d) $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{3}{4}\right)$, donc $IJ=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{29}{16}}=\frac{\sqrt{29}}{4}$.

(e) $\overrightarrow{GJ}\left(-1\,;\,-1\,;\,-\frac{3}{4}\right)$, donc $GJ=\sqrt{1+1+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{41}{16}}=\frac{\sqrt{41}}{4}$. Or $CJ=\frac{\sqrt{33}}{4}$. Comme $GJ\neq CJ$, le triangle CGJ n'est pas isocèle en J.

Ex. 17 ★★☆ **Charpente : nature d'un triangle et angle obtus**

(a) $\overrightarrow{PQ}(1\,;\,4\,;\,-1)$, $\overrightarrow{PR}(3\,;\,0\,;\,3)$, $\overrightarrow{QR}(2\,;\,-4\,;\,4)$. $PQ=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $PR=\sqrt{9+0+9}=3\sqrt{2}$, $QR=\sqrt{4+16+16}=6$.

(b) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=1\times3+4\times0+(-1)\times3=0$, donc $(PQ)\perp(PR)$: le triangle est rectangle en P. Comme $PQ=PR=3\sqrt{2}$, il est aussi isocèle en P. Conclusion : PQR est rectangle isocèle en P.

(c) $\overrightarrow{QP}(-1\,;\,-4\,;\,1)$ et $\overrightarrow{PS}(-2\,;\,-1\,;\,2)$, donc $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PS}=2+4+2=8$: le calcul est juste. Mais pour l'angle $\widehat{QPS}$, les deux vecteurs doivent partir de P. On calcule $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=1\times(-2)+4\times(-1)+(-1)\times2=-8<0$. Le cosinus est négatif, donc l'angle $\widehat{QPS}$ est obtus.

(d) $PS=\sqrt{4+1+4}=3$.
Donc $\cos\widehat{QPS}=\frac{\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PS}}{PQ\times PS}=\frac{-8}{3\sqrt{2}\times3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$. À la calculatrice, $\widehat{QPS}\approx128{,}9°$, soit environ 2,25 rad.

Ex. 18 ★★☆ **Logiciel 3D : paramètre m, orthogonalité et normes**

(a) Non. Hugo a calculé $xy+x'y'$ et oublié les cotes. La bonne formule est $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'=1\times2+3\times1+(-2)\times5=2+3-10=-5$. Hugo a donc tort : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$.

(b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2m+3m-10=5m-10$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, donc $5m-10=0$, c'est-à-dire $m=2$. Vérification : $2\times2+3\times2+(-2)\times5=0$. Conclusion : $m=2$.

(c) $\|\vec{u}\|=7\iff\|\vec{u}\|^2=49\iff m^2+9+4=49\iff m^2=36$, donc $m=6$ ou $m=-6$. Attention, il ne faut pas écrire $m^2+13=7$: on a mis la norme au carré, il faut donc aussi mettre 7 au carré. Conclusion : $m=-6$ ou $m=6$.

(d) Faux. Des normes sont positives, donc $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|\iff\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2\iff m^2+9+4=4+m^2+25\iff13=29$, ce qui est impossible. Pour tout réel m, $\|\vec{u}\|^2=m^2+13<m^2+29=\|\vec{v}\|^2$. Conclusion : aucun réel m ne convient, l'affirmation est fausse.

Ex. 19 ★★★ **Pyramide de verre : arêtes, angle au sommet et angle droit introuvable**

(a) $\overrightarrow{SA}(3\,;\,-3\,;\,-4)$ donc $SA=\sqrt{3^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+9+16}=\sqrt{34}$. $\overrightarrow{SB}(3\,;\,3\,;\,-4)$ donc $SB=\sqrt{9+9+16}=\sqrt{34}$. $\overrightarrow{AB}(0\,;\,6\,;\,0)$ donc $AB=\sqrt{0+36+0}=6=\sqrt{36}$. Comme $SA=SB=\sqrt{34}\neq\sqrt{36}=AB$, la face SAB est isocèle en S mais pas équilatérale. Par symétrie, il en va de même pour les autres faces latérales : elles ne sont pas équilatérales.

(b) Pour l'angle $\widehat{ASC}$, les deux vecteurs doivent partir du sommet S. Tom prend $\overrightarrow{AS}$, qui arrive en S : il obtient le supplémentaire de l'angle cherché. On prend donc $\overrightarrow{SA}(3\,;\,-3\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{SC}(-3\,;\,3\,;\,-4)$. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=xx'+yy'+zz'=3\times(-3)+(-3)\times3+(-4)\times(-4)=-9-9+16=-2$. On a $SC=\sqrt{9+9+16}=\sqrt{34}$. Donc $\cos\widehat{ASC}=\frac{-2}{\sqrt{34}\times\sqrt{34}}=-\frac{1}{17}$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus : $\widehat{ASC}\approx93{,}4°$. Tom avait trouvé $\cos=\frac{2}{34}$, soit environ $86{,}6°=180°-93{,}4°$.

(c) $\overrightarrow{SA}(3\,;\,-3\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{SB}(3\,;\,3\,;\,-4)$: $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=9-9+16=16$.
Donc $\cos\widehat{ASB}=\frac{16}{\sqrt{34}\times\sqrt{34}}=\frac{8}{17}$ et, à la calculatrice en degrés, $\widehat{ASB}\approx61{,}9°$.

(d) On a $\overrightarrow{MA}(3\,;\,-3\,;\,-m)$ et $\overrightarrow{MC}(-3\,;\,3\,;\,-m)$. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=-9-9+m^2=m^2-18$. L'angle $\widehat{AMC}$ est droit si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=0$, c'est-à-dire $m^2=18$, soit $m=3\sqrt{2}$ ou $m=-3\sqrt{2}$. Un point de $[HS]$ vérifie $0\leqslant m\leqslant4$. Or $3\sqrt{2}\approx4{,}24>4$ et $-3\sqrt{2}<0$: aucun point de $[HS]$ ne convient. Sur $[HS]$, $m^2\leqslant16$, donc $m^2-18<0$: l'angle $\widehat{AMC}$ y est obtus (et même plat en H, où $\cos\widehat{AMC}=-1$).

Ex. 20 ★★★ **Drone au-dessus d'une rampe : distance imposée et angle aigu**

(a) $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,0\,;\,2)$, $\overrightarrow{AC}(2\,;\,2\,;\,1)$, $\overrightarrow{BC}(3\,;\,2\,;\,-1)$. $AB=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{4+4+1}=3$, $BC=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'=(-1)\times2+0\times2+2\times1=0$, donc $(AB)\perp(AC)$: le triangle ABC est rectangle en A. Ses côtés $\sqrt{5}$, 3 et $\sqrt{14}$ sont deux à deux distincts, donc il n'est pas isocèle. On vérifie : $AB^2+AC^2=5+9=14=BC^2$.
Conclusion : ABC est rectangle en A, et pas isocèle.

Ex. 20 (suite)

(b) $\overrightarrow{AD}(m-1\,;\,m-2\,;\,4-(-1))$, soit $\overrightarrow{AD}(m-1\,;\,m-2\,;\,5)$. $AD^2=(m-1)^2+(m-2)^2+5^2=m^2-2m+1+m^2-4m+4+25=2m^2-6m+30$. Une distance est positive, donc $AD=\sqrt{30}$ équivaut à $AD^2=30$, c'est-à-dire $2m^2-6m=0$, soit $2m(m-3)=0$.
Donc $m=0$ ou $m=3$.

(c) Pour $m=0$: $D(0\,;\,0\,;\,4)$, $\overrightarrow{AD}(-1\,;\,-2\,;\,5)$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times2+(-2)\times2+5\times1=-1$. Pour $m=3$: $D(3\,;\,3\,;\,4)$, $\overrightarrow{AD}(2\,;\,1\,;\,5)$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=4+2+5=11$. Le cosinus de $\widehat{DAC}$ a le signe de $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ (les normes sont positives). Pour $m=0$, il est négatif : l'angle est obtus. Pour $m=3$, il est positif : l'angle est aigu. On retient $m=3$.

(d) Pour $m=3$: $\cos\widehat{DAC}=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{AD\times AC}=\frac{11}{\sqrt{30}\times3}$. À la calculatrice en degrés : $\widehat{DAC}\approx48{,}0°$.

Ex. 21 ★★★ **Aquarium : repère orthonormé obligatoire et angle droit à rebours**

(a) Non. La formule $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ n'est valable que dans un repère orthonormé. Or $\|\overrightarrow{AB}\|=4\neq1$: le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$ n'est pas orthonormé. Dans $(A\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, donc $G(4\,;\,2\,;\,2)$. Ainsi $AG=\sqrt{4^2+2^2+2^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

(b) $G(4\,;\,2\,;\,2)$ (question précédente) et $F(4\,;\,0\,;\,2)$, donc I, milieu de $[FG]$, a pour coordonnées $I(4\,;\,1\,;\,2)$. Lucas multiplie entre elles les coordonnées d'un même vecteur. Il faut multiplier les coordonnées de même rang : $\overrightarrow{AG}(4\,;\,2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AI}(4\,;\,1\,;\,2)$, donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}=xx'+yy'+zz'=4\times4+2\times1+2\times2=22$.

(c) $AI=\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}$. $\cos\widehat{GAI}=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}}{AG\times AI}=\frac{22}{2\sqrt{6}\times\sqrt{21}}$. À la calculatrice en degrés : $\widehat{GAI}\approx11{,}5°$.

(d) $M(m\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $I(4\,;\,1\,;\,2)$.
Donc $\overrightarrow{MD}(-m\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{MI}(4-m\,;\,1\,;\,2)$. $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MI}=-m(4-m)+2\times1+0\times2=m^2-4m+2$. Le triangle est rectangle en M si et seulement si ce produit scalaire est nul : $m^2-4m+2=0$. $\Delta=16-8=8$, donc $m=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$ ou $m=2+\sqrt{2}$. Ces deux valeurs ($\approx0{,}59$ et $\approx3{,}41$) sont dans $[0\,;\,4]$. Il y a donc deux points M qui conviennent.

4. Orthogonalité de droites et de plans, vecteur normal

Ex. 22 ★☆☆ **Tests d'orthogonalité et points d'un plan**

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz' = \frac{1}{2}\times 4 + (-3)\times 1 + 2\times\frac{1}{2} = 2 - 3 + 1 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

(b) $\vec{u}\cdot\vec{w} = (-2)\times 1 + 5\times 2 + 1\times(-3) = -2 + 10 - 3 = 5 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

(c) Le plan $ax + by + cz + d = 0$ admet $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ pour vecteur normal. Ici le coefficient de y vaut 0 : $\vec{n}(4\,;\,0\,;\,-3)$.

(d) $3\times 2 + 2\times(-1) - 5 + 1 = 6 - 2 - 5 + 1 = 0$: les coordonnées vérifient l'équation, donc A appartient au plan.

(e) B appartient au plan si et seulement si $(-1) - 4\times 3 + 2\times 2 + d = 0$, c'est-à-dire $-9 + d = 0$, donc $d = 9$.

(f) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5m + 2m + (-3)\times 2 = 7m - 6$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $7m - 6 = 0$, donc $m = \frac{6}{7}$.

(g) $\vec{u}(-1\,;\,2\,;\,2)$ dirige Δ_1 et $\vec{v}(2\,;\,1\,;\,0)$ dirige Δ_2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times 2 + 2\times 1 + 2\times 0 = 0$: les droites sont orthogonales. Point commun : la cote donne $2t = 2$, donc $t = 1$. L'abscisse donne $3 - 1 = 4 + 2s$, donc $s = -1$. L'ordonnée est vérifiée : $1 + 2\times 1 = 3 = 4 + (-1)$. Les droites sont sécantes en $(2\,;\,3\,;\,2)$. Orthogonales et sécantes, elles sont perpendiculaires.

Ex. 23 ★☆☆ **Comparer des vecteurs normaux**

(a) $\vec{n}_1(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{n}_2(1\,;\,5\,;\,1)$ sont normaux. $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 2 - 5 + 3 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les plans sont perpendiculaires.

(b) $\vec{n}_1(3\,;\,-6\,;\,9)$ et $\vec{n}_2(-1\,;\,2\,;\,-3)$ vérifient $\vec{n}_1 = -3\,\vec{n}_2$: les vecteurs normaux sont colinéaires, donc les plans sont parallèles.

(c) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(4\,;\,-2\,;\,6)$ (coefficients de t). $\vec{u} = 2\,\vec{n}_1$ avec $\vec{n}_1(2\,;\,-1\,;\,3)$ normal à $\mathcal{P}_1$: $\vec{u}$ est normal à $\mathcal{P}_1$, donc $d \perp \mathcal{P}_1$.

(d) $\vec{n}(m\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{n}'(3\,;\,-1\,;\,m)$. $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 3m - 2 - m = 2m - 2$. Les plans sont perpendiculaires si et seulement si $2m - 2 = 0$, donc $m = 1$.

Ex. 23 (suite)

(e) $\vec{u}'(1\,;\,1\,;\,-1)$ dirige d' et $\vec{n}(1\,;\,2\,;\,3)$ est normal à $\mathcal{R}$. $\vec{u}'\cdot\vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0$: $\vec{u}'$ est orthogonal à $\vec{n}$, donc il n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ ($\vec{u}'$ non nul).
Donc d' n'est pas orthogonale à $\mathcal{R}$: elle lui est parallèle (et même strictement, car son point $(2\,;\,1\,;\,0)$ donne $2 + 2 + 0 - 5 = -1 \neq 0$).

(f) Un plan parallèle à $\mathcal{P}_1$ admet $\vec{n}_1(2\,;\,-1\,;\,3)$ pour vecteur normal : il a une équation $2x - y + 3z + d = 0$. O lui appartient si et seulement si $d = 0$: $2x - y + 3z = 0$.

Ex. 24 ★★☆ **La grande diagonale d'un cube, sans coordonnées**

(a) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Par bilinéarité, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$. Les produits $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$ sont nuls (arêtes orthogonales), il reste $AD^2 - AB^2 = a^2 - a^2 = 0$.

(b) Non. Un seul produit scalaire nul montre seulement que (AG) est orthogonale à la droite (BD). Pour une droite orthogonale à un plan, il faut qu'elle soit orthogonale à DEUX droites sécantes de ce plan.

(c) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = AE^2 - AB^2 = 0$. Les droites (BD) et (BE) sont sécantes en B (B, D, E ne sont pas alignés). Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan : $(AG) \perp (BDE)$.

(d) La droite (DE) est contenue dans le plan (BDE). Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan : (AG) et (DE) sont orthogonales.

(e) Non. (DE) est contenue dans le plan de la face $ADHE$. G n'est pas dans ce plan, donc (AG) le coupe seulement en A. Si (AG) et (DE) avaient un point commun, ce serait A. Or $A \notin (DE)$. Les droites ne sont donc pas sécantes (elles ne sont même pas coplanaires) : elles sont orthogonales mais pas perpendiculaires.

Ex. 25 ★★☆ **Renfort de charpente dans une caisse**

(a) $\overrightarrow{BD}(0 - 4\,;\,2 - 0\,;\,0 - 0) = (-4\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BE}(-4\,;\,0\,;\,3)$. Si $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BD}$, l'abscisse donne $k = 1$ et l'ordonnée $0 = 2k$, donc $k = 0$: c'est contradictoire. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(b) On pose $\vec{n}(3\,;\,b\,;\,c)$. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = -12 + 2b = 0$ donne $b = 6$. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE} = -12 + 3c = 0$ donne $c = 4$. Le vecteur $\vec{n}(3\,;\,6\,;\,4)$ est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : il est normal à (BDE).

Ex. 25 **(suite)**

ⓒ Non. On a bien $\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-4+4+0=0$, mais $\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-4+0+0=-4\neq 0$. Pour être normal, $\vec{m}$ doit être orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : un seul produit scalaire nul ne suffit pas.

ⓓ $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(2\,;\,-1\,;\,0)$ est normal à $\mathcal{Q}$. $\vec{n}\cdot\vec{n}_{\mathcal{Q}}=3\times 2+6\times(-1)+4\times 0=0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les plans sont perpendiculaires.

ⓔ $\overrightarrow{AG}(4\,;\,2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=-16+4+0=-12\neq 0$. La droite (AG) n'est pas orthogonale à la droite (BD) du plan (BDE). Or une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes ses droites : ici, (AG) n'est pas orthogonale à (BDE).

Ex. 26 ★★★ **La tige et la vitre d'une lanterne cubique**

ⓐ $\overrightarrow{DF}(1\,;\,-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;\,1\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times 1+(-1)\times 1+1\times 0=0$: les droites (DF) et (AC) sont orthogonales. Mais pour qu'elles soient perpendiculaires, il faut en plus un point commun. Un point de (DF) s'écrit $(t\,;\,1-t\,;\,t)$ et un point de (AC) s'écrit $(s\,;\,s\,;\,0)$. La cote donne $t=0$, puis $s=0$ (abscisse) et $s=1$ (ordonnée) : c'est impossible. Les droites ne sont pas sécantes, et pas parallèles ($\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires) : elles sont non coplanaires. Hugo a tort : elles sont orthogonales, mais pas perpendiculaires.

ⓑ $\overrightarrow{AH}(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AH}=1\times 0+(-1)\times 1+1\times 1=0$. On a aussi $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires : la cote de $\overrightarrow{AC}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{AH}$. Or une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Donc $(DF)\perp(ACH)$. Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan. Comme (CH) est dans (ACH), (DF) et (CH) sont orthogonales. Vérification : $\overrightarrow{CH}(-1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{CH}=-1+0+1=0$.

ⓒ $\overrightarrow{DF}(1\,;\,-1\,;\,1)$ est normal au plan (ACH), donc ce plan a une équation de la forme $x-y+z+d=0$. Comme $A(0\,;\,0\,;\,0)$ est dans le plan : $0-0+0+d=0$, d'où $d=0$.
Donc (ACH) : $x-y+z=0$. Contrôle : pour C, $1-1+0=0$; pour H, $0-1+1=0$.

Ex. 26 **(suite)**

ⓓ La droite (DF) passe par $D(0\,;\,1\,;\,0)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{DF}:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. On remplace dans l'équation du plan : $t-(1-t)+t=0$, soit $3t-1=0$, donc $t=\frac{1}{3}$. On obtient $K\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$. Comme $(DK)\perp(ACH)$, K est le projeté orthogonal de D sur le plan.
Donc la distance de D au plan est $DK=\left|\frac{1}{3}\right|\times\|\overrightarrow{DF}\|=\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ dm.

ⓔ Le triangle ACD est rectangle en D : son aire vaut $\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$ dm². La hauteur issue de H est $DH=1$, car (DH) est orthogonale à la face $ABCD$.
Donc $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}$ dm³. Si on prend ACH pour base, la hauteur est DK : $V=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ACH}\times DK$.
Donc $\mathcal{A}_{ACH}=\frac{3V}{DK}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm².

Ex. 27 ★★★ **Le panneau solaire et ses supports**

ⓐ $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,-4\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;\,-2\,;\,1)$. Pour les abscisses, le rapport vaut $\frac{2}{-1}=-2$. Pour les ordonnées, il vaut $\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires, et A, B, C définissent un plan. On cherche $\vec{n}(a\,;\,1\,;\,c)$ avec $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$: $\begin{cases}-a-4-3c=0\\2a-2+c=0\end{cases}$. La deuxième équation donne $c=2-2a$. On remplace dans la première : $-a-4-6+6a=0$, donc $a=2$, puis $c=-2$. On obtient $\vec{n}(2\,;\,1\,;\,-2)$, qui est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : c'est un vecteur normal à (ABC).

ⓑ Le plan (ABC) a une équation de la forme $2x+y-2z+d=0$. Comme A est dans le plan : $2\times 1+2-2\times 3+d=0$, d'où $d=2$.
Donc (ABC) : $2x+y-2z+2=0$. Contrôle : pour B, $0-2-0+2=0$; pour C, $6+0-8+2=0$.

ⓒ $\vec{n}_m(1\,;\,m\,;\,2)$ est normal à $\mathcal{Q}_m$. Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Or $\vec{n}\cdot\vec{n}_m=2\times 1+1\times m+(-2)\times 2=m-2$, qui est nul si et seulement si $m=2$. Pour que les plans soient parallèles, il faudrait $\vec{n}_m=k\vec{n}$. Les abscisses donnent $k=\frac{1}{2}$, et les cotes donnent $2=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$: c'est impossible. $\mathcal{Q}_m$ n'est donc jamais parallèle à (ABC).

ⓓ $\vec{n}_{\mathcal{R}}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\right)=\frac{1}{2}\vec{n}$: les vecteurs normaux sont colinéaires, donc les plans sont parallèles. Pour A : $1+\frac{1}{2}\times 2-3+3=2\neq 0$.
Donc $A\notin\mathcal{R}$, alors que $A\in(ABC)$. Les plans sont strictement parallèles.

Ex. 27 **(suite)**

(e) Δ est dirigée par $\vec{n}$, donc $M(1+2t\,;\,2+t\,;\,3-2t)$ avec $t\in\mathbb{R}$. Comme $A\in(ABC)$ et $(AM)\perp(ABC)$, A est le projeté orthogonal de M sur le plan. La distance de M au plan vaut donc $AM=|t|\times\|\vec{n}\|$, avec $\|\vec{n}\|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$. On résout $3|t|=6$: $t=2$ ou $t=-2$ (sans valeur absolue, on oublierait une solution). On trouve deux points : $M_1(5\,;\,4\,;\,-1)$ et $M_2(-3\,;\,0\,;\,7)$.

Ex. 28 ★★★ **La tente pyramidale et sa lampe**

(a) $\overrightarrow{BC}(0\,;\,4\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BS}(-2\,;\,2\,;\,2)$ ne sont pas colinéaires : l'abscisse de $\overrightarrow{BC}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{BS}$. On calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0+0+0=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-2+0+2=0$. $\vec{n}$ est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (SBC) : il est normal à ce plan. Le plan a donc une équation de la forme $x+z+d=0$. Comme B est dans le plan : $2+0+d=0$, d'où $d=-2$.
Donc (SBC) : $x+z-2=0$. Contrôle avec S : $0+2-2=0$.

(b) Vrai. On cherche un vecteur $\vec{n}'(a\,;\,b\,;\,c)$ normal à (SAD), avec $\overrightarrow{AD}(0\,;\,4\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AS}(2\,;\,2\,;\,2)$, qui ne sont pas colinéaires. La condition $\vec{n}'\cdot\overrightarrow{AD}=4b=0$ donne $b=0$. La condition $\vec{n}'\cdot\overrightarrow{AS}=2a+2c=0$ donne $c=-a$. On prend $a=-1$: $\vec{n}'(-1\,;\,0\,;\,1)$. Alors $\vec{n}\cdot\vec{n}'=1\times(-1)+0\times0+1\times1=0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les plans (SBC) et (SAD) sont perpendiculaires.

(c) La droite qui passe par H et qui est dirigée par $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. On remplace dans l'équation du plan : $t+t-2=0$, donc $t=1$. On obtient $K(1\,;\,0\,;\,1)$, avec $K\in(SBC)$ et $\overrightarrow{HK}=\vec{n}$ normal au plan. La distance de la lampe au plan est $HK=|1|\times\|\vec{n}\|=\sqrt{2}$ m.

(d) Soit M un point de (SBC). Comme $K\in(SBC)$, le vecteur $\overrightarrow{KM}$ est un vecteur du plan. Or $\overrightarrow{HK}$ est normal au plan, donc $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{KM}=0$. On a $\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KM}$, donc $HM^2=HK^2+2\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{KM}+KM^2=HK^2+KM^2$. Comme $KM^2\geqslant0$, on a $HM^2\geqslant HK^2$, donc $HM\geqslant HK$ (des distances sont positives). L'égalité a lieu si et seulement si $KM=0$, c'est-à-dire $M=K$. Le projeté K est donc le point du plan le plus proche de H.

Ex. 28 **(suite)**

(e) $\overrightarrow{SC}(2\,;\,2\,;\,-2)$. Un point de (SC) s'écrit $P(2s\,;\,2s\,;\,2-2s)$, et P est le projeté orthogonal de H sur (SC) si $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{SC}=0$. Cela donne $4s+4s-2(2-2s)=12s-4=0$, donc $s=\frac{1}{3}$ et $P\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$. Alors $HP=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{24}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\approx1{,}63$. Comme $P\in(SC)\subset(SBC)$ et $P\neq K$, la question précédente donne $HP>HK=\sqrt{2}\approx1{,}41$: c'est cohérent.

5. *Équation cartésienne d'un plan*

Ex. 29 ★☆☆ **Lire une équation de plan**

(a) Les coefficients de x, y, z donnent un vecteur normal : $\vec{n}(3\,;\,-2\,;\,1)$.

(b) $3\times3-2\times(-2)+1-7=7\neq0$, donc $N\notin\mathcal{P}_1$. Les coefficients donnent un vecteur normal, pas un point du plan.

(c) $3\times2-2\times(-1)+(-1)-7=6+2-1-7=0$, donc $A\in\mathcal{P}_1$.

(d) $B\in\mathcal{P}_1$ si et seulement si $3\times1-2\times4+z-7=0$, soit $-12+z=0$, donc $z=12$.

(e) Vrai : on multiplie chaque coefficient de l'équation de $\mathcal{P}_1$ par -2 (et $-2\neq0$). Les deux équations ont donc les mêmes solutions : une équation de plan n'est pas unique.

(f) $\vec{n}(0\,;\,2\,;\,0)$ est normal à $\mathcal{Q}$. L'équation s'écrit $y=-3$: c'est un plan parallèle aux axes (Ox) et (Oz).

(g) C appartient au plan si et seulement si $-1-4\times2+2\times5+d=0$, c'est-à-dire $1+d=0$, donc $d=-1$.

Ex. 30 ★☆☆ **Écrire l'équation d'un plan**

(a) Le plan a une équation $3x-y+2z+d=0$. Comme A lui appartient : $3\times(-2)-1+2\times4+d=0$, d'où $1+d=0$ et $d=-1$. Équation : $3x-y+2z-1=0$.

(b) L'axe (Oz) est dirigé par $\vec{k}(0\,;\,0\,;\,1)$, qui est donc normal au plan. Les coefficients de x et de y sont nuls : le plan a une équation $z+d=0$. Avec B : $-4+d=0$, donc $d=4$. Équation : $z+4=0$, c'est-à-dire $z=-4$.

(c) $\vec{n}'(2\,;\,-1\,;\,-3)=\frac{1}{2}\vec{n}$ est aussi normal. Le plan a une équation $2x-y-3z+d=0$. Avec C : $1-2+3+d=0$, donc $d=-2$. Équation : $2x-y-3z-2=0$.

Ex. 30 **(suite)**

(d) Deux plans parallèles ont le même vecteur normal $(1\,;\,-5\,;\,2)$. Le plan a donc une équation $x-5y+2z+d=0$. Avec O : $d=0$. Équation : $x-5y+2z=0$.

(e) La droite est orthogonale au plan, donc $\vec{u}$ est normal au plan, qui a une équation $x+4y-z+d=0$. Avec D : $2+0+3+d=0$, donc $d=-5$. Équation : $x+4y-z-5=0$.

Ex. 31 ★★☆ **Un plan qui coupe un cube dans un logiciel 3D**

(a) $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $D(0\,;\,1\,;\,0)$. $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc le milieu de $[FG]$ est $I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.

(b) $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BI}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$. Si l'on avait $\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BD}$, les premières coordonnées donneraient $k=0$, donc $\overrightarrow{BI}=\vec{0}$: c'est faux. Les deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

(c) $\vec{n}$ est normal au plan si et seulement si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=0$, c'est-à-dire $-a+b=0$ et $\frac{1}{2}b+c=0$. Avec $b=2$: $a=2$ et $c=-1$, donc $\vec{n}(2\,;\,2\,;\,-1)$.
Vérification : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2+2+0=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=0+1-1=0$.

(d) Le plan a une équation $2x+2y-z+d=0$. Avec B : $2+d=0$, donc $d=-2$. Contrôle : pour D, $0+2-0-2=0$; pour I, $2+1-1-2=0$.
Donc (BDI) : $2x+2y-z-2=0$.

(e) $\overrightarrow{AG}(1\,;\,1\,;\,1)$, donc (AG) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. On remplace dans l'équation : $2t+2t-t-2=0$, soit $3t=2$ et $t=\frac{2}{3}$. La droite (AG) coupe donc (BDI) au point $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

Ex. 32 ★★☆ **Le plan médiateur d'une diagonale de charpente**

(a) $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$. Le milieu de $[BH]$ est $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

(b) Non. Le plan médiateur passe par le milieu K, pas par B : on a $BB=0$ alors que $HB=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$, donc B n'est pas à égale distance de B et de H.
Correction : $\mathcal{P}$ a une équation $-x+y+z+d=0$. Avec K : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+d=0$, donc $d=-\frac{1}{2}$. En multipliant par 2 : $\mathcal{P}$: $-2x+2y+2z-1=0$.

Ex. 32 **(suite)**

(c) $\vec{n}(-1\,;\,1\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'(2\,;\,-2\,;\,-2)$ est normal à $\mathcal{Q}$. Comme $\vec{n}'=-2\vec{n}$, ces vecteurs normaux sont colinéaires : les plans sont parallèles. Or $K\in\mathcal{P}$ et $2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}+5=4\neq 0$, donc $K\notin\mathcal{Q}$. Les plans sont strictement parallèles.

(d) $\overrightarrow{AC}(1\,;\,1\,;\,0)$, donc (AC) : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. On remplace dans l'équation de $\mathcal{P}$: $-2t+2t+0-1=-1$, et l'équation $-1=0$ n'a aucune solution. La droite (AC) est donc strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

(e) On remplace : $-2t+2\times\frac{1}{2}+2t-1=0$, soit $0=0$, ce qui est vrai pour tout t. Tous les points de (JI) sont dans $\mathcal{P}$: la droite (JI) est contenue dans $\mathcal{P}$.

Ex. 33 ★★★ **Un panneau solaire incliné**

(a) $\overrightarrow{AB}(2\,;\,2\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,3\,;\,2)$. Si $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, les abscisses donnent $k=-\frac{1}{2}$ et les ordonnées $k=\frac{3}{2}$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés. Ils définissent bien un plan.

(b) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times 2+(-2)\times 2+(-2)\times 1=0$, mais $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-1)+(-2)\times 3+(-2)\times 2=-13\neq 0$. Un vecteur normal doit être orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : un seul produit scalaire nul ne suffit pas. Lou a tort, $\vec{v}$ n'est pas normal à (ABC).

(c) On cherche $\vec{n}(1\,;\,b\,;\,c)$ tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2+2b+c=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+3b+2c=0$. La première équation donne $c=-2-2b$. Dans la seconde : $-1+3b-4-4b=0$, soit $b=-5$, puis $c=8$.
Donc $\vec{n}(1\,;\,-5\,;\,8)$. Le plan (ABC) a une équation $x-5y+8z+d=0$. Avec A : $1-5\times(-2)+8\times 0+d=0$, soit $d=-11$. Contrôle avec B : $3-0+8-11=0$. Contrôle avec C : $0-5+16-11=0$. Conclusion : (ABC) : $x-5y+8z-11=0$.

(d) On multiplie tous les coefficients par 3, qui est non nul. On obtient une équation équivalente : $3x-15y+24z-33=0$. Une équation cartésienne n'est pas unique : elle est définie à un facteur non nul près.

(e) $\vec{n}(1\,;\,-5\,;\,8)$ est normal à (ABC) et $\vec{n}'(2\,;\,2\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{S}$. $\vec{n}\cdot\vec{n}'=1\times 2+(-5)\times 2+8\times 1=0$. Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
Donc (ABC) et $\mathcal{S}$ sont perpendiculaires.

Ex. 34 ★★★ **Trois trajectoires de drone au-dessus d'une rampe**

(a) Les coefficients de x, y et z donnent un vecteur NORMAL à $\mathcal{P}$, pas un vecteur directeur. La droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc orthogonale à $\mathcal{P}$, et elle le coupe. Elle a pour représentation paramétrique $x = t$, $y = 2t$, $z = -2t$. On remplace dans l'équation : $t + 4t + 4t - 4 = 9t - 4 = 0$, donc $t = \frac{4}{9}$. Le point d'intersection est $\left(\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\,;\,-\frac{8}{9}\right)$.

(b) Pour d_1, on remplace : $(1 + 2t) + 2(-1 + t) - 2(3 + 2t) - 4 = 1 + 2t - 2 + 2t - 6 - 4t - 4 = -11$. L'égalité $-11 = 0$ est toujours fausse : d_1 est strictement parallèle à $\mathcal{P}$. Pour d_2 : $(4 + 2t) + 2t - 2 \times 2t - 4 = 0$ pour tout t. L'égalité est toujours vraie : d_2 est contenue dans $\mathcal{P}$.

(c) On remplace : $(3 + t) + 2(1 + t) - 2(2 - t) - 4 = -3 + 5t$. L'équation $-3 + 5t = 0$ a une solution unique, $t = \frac{3}{5}$.
Donc d_3 coupe $\mathcal{P}$ en un seul point : $\left(\frac{18}{5}\,;\,\frac{8}{5}\,;\,\frac{7}{5}\right)$.
Contrôle : $\frac{18}{5} + \frac{16}{5} - \frac{14}{5} - \frac{20}{5} = 0$.

(d) On remplace : $(1 + mt) + 2(2 + t) - 2t - 4 = 1 + mt$. Si $m \neq 0$, l'équation $1 + mt = 0$ a une solution unique $t = -\frac{1}{m}$: la droite coupe la rampe. Si $m = 0$, on obtient $1 = 0$, ce qui est toujours faux. Conclusion : d_m ne coupe pas la rampe si et seulement si $m = 0$; elle lui est alors strictement parallèle.

Ex. 35 ★★★ **Le plan médiateur des haubans d'une tente**

(a) Le plan médiateur de $[AB]$ passe par le milieu I de $[AB]$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Ici, $I(3\,;\,-2\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AB}(4\,;\,2\,;\,-2)$. Le vecteur $\vec{n}(2\,;\,1\,;\,-1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ convient aussi. $\mathcal{P}$ a une équation $2x + y - z + d = 0$. Avec I : $6 - 2 - 1 + d = 0$, soit $d = -3$. Conclusion : $\mathcal{P} : 2x + y - z - 3 = 0$.

(b) Le plan médiateur $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.
Donc $CA = CB$ si et seulement si $C \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire $2c + 0 - 0 - 3 = 0$, soit $c = \frac{3}{2}$. Le piquet est donc planté en $C\left(\frac{3}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

Ex. 35 **(suite)**

(c) Dans l'équation $z = 0$, les coefficients de x et de y sont nuls : un vecteur normal au sol est $\vec{k}(0\,;\,0\,;\,1)$. Si l'on avait $\vec{k} = \lambda\vec{n}$ avec $\vec{n}(2\,;\,1\,;\,-1)$, les abscisses donneraient $0 = 2\lambda$, donc $\lambda = 0$ et $\vec{k} = \vec{0}$: c'est faux. Les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants. De plus, $\vec{k} \cdot \vec{n} = 0 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) = -1 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, donc $\mathcal{P}$ et le sol ne sont pas perpendiculaires.

(d) $\mathcal{T}_k$ a pour vecteur normal $\vec{n}'(6\,;\,3\,;\,-3) = 3\vec{n}$. Les vecteurs normaux sont colinéaires, donc $\mathcal{T}_k$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Les deux plans sont confondus si et seulement si $I \in \mathcal{T}_k$, c'est-à-dire $6 \times 3 + 3 \times (-2) - 3 \times 1 + k = 0$, soit $9 + k = 0$ et $k = -9$. On retrouve bien $3 \times (2x + y - z - 3) = 6x + 3y - 3z - 9$.

(e) On remplace dans l'équation de $\mathcal{P}$: $2 \times 2 + 1 - t - 3 = 2 - t = 0$, donc $t = 2$ et $M(2\,;\,1\,;\,2)$. Puis $MA^2 = (1 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 17$ et $MB^2 = (5 - 2)^2 + (-1 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 17$.
Donc $MA = MB = \sqrt{17}$. C'est cohérent : tout point du plan médiateur est équidistant de A et de B.

6. *Projeté orthogonal et distance à un plan*

Ex. 36 ★★★ **Capteur et panneau solaire incliné**

(a) On lit les coefficients de x, y, z : $\vec{n}(2\,;\,-3\,;\,6)$, et $\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$.

(b) Δ est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$ (pas par un vecteur du plan) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 7 + 6t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.

(c) On remplace dans l'équation : $2(1 + 2t) - 3(-2 - 3t) + 6(7 + 6t) - 1 = 49 + 49t = 0$, donc $t = -1$.

(d) $H(1 + 2 \times (-1)\,;\,-2 - 3 \times (-1)\,;\,7 + 6 \times (-1))$, soit $H(-1\,;\,1\,;\,1)$. Vérification : $2 \times (-1) - 3 \times 1 + 6 \times 1 - 1 = 0$, donc $H \in \mathcal{P}$.

(e) $\overrightarrow{MH} = -\vec{n}$, donc $MH = |-1| \times \|\vec{n}\| = 1 \times 7 = 7$.

(f) $2 \times (-1) - 3 \times 3 + 6 \times 2 - 1 = 0$: $A \in \mathcal{P}$, donc A est son propre projeté et la distance de A à $\mathcal{P}$ est nulle.

Ex. 37 ★☆☆ **Rayon laser dans une vitrine**

(a) $G(2\,;\,4\,;\,2)$ et K, milieu de $[AG]$: $K(1\,;\,2\,;\,1)$.

(b) (AG) passe par $A(0\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AG}(2\,;\,4\,;\,2) = 2\vec{u}$ avec $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,1)$: on obtient $x = t$, $y = 2t$, $z = t$.

(c) $\overrightarrow{BK}(-1\,;\,2\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = -2 + 8 + 2 = 8 \neq 0$: K n'est pas le projeté de B.

(d) $\overrightarrow{BM}(t-2\,;\,2t\,;\,t)$, donc $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AG} = 2(t-2) + 4 \times 2t + 2t = 12t - 4$.

(e) H vérifie $12t - 4 = 0$, soit $t = \frac{1}{3}$: $H\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

(f) $\overrightarrow{BH}\left(-\frac{5}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$, donc $BH = \sqrt{\frac{25+4+1}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

Ex. 38 ★★☆ **Drone au-dessus d'une rampe**

(a) Cette formule n'est pas au programme : on doit passer par le projeté orthogonal et justifier chaque étape. De plus, Malo a oublié la constante -3 dans la valeur absolue.

(b) $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{R}$, donc $\Delta : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. En remplaçant : $2(3+2t) + 2(4+2t) - (2-t) - 3 = 9 + 9t = 0$, donc $t = -1$.

(c) $H(3-2\,;\,4-2\,;\,2+1)$, soit $H(1\,;\,2\,;\,3)$. Vérification : $2 \times 1 + 2 \times 2 - 3 - 3 = 0$, donc $H \in \mathcal{R}$.

(d) Ici $t = -1$: la formule d'Inès donne $DH = -1 \times 3 = -3 < 0$, ce qui est impossible pour une distance. Comme $\overrightarrow{DH} = t\,\vec{n}$, on a $DH = |t| \times \|\vec{n}\| = |-1| \times \sqrt{4+4+1} = 3$. Le drone est à 3 unités de la rampe.

(e) Pour le point de Δ de paramètre s, son projeté sur $\mathcal{R}$ est H et sa distance à $\mathcal{R}$ vaut $|s+1| \times 3$. $|s+1| \times 3 = 3$ donne $s = 0$ (point D) ou $s = -2$.
Donc $D'(-1\,;\,0\,;\,4)$.

Ex. 39 ★★☆ **Tétraèdre dans un cube en 3D**

(a) $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$. Pour B : $1 + 0 + 0 - 1 = 0$, de même pour D et E. Les trois points non alignés vérifient l'équation, c'est donc une équation de (BDE).

(b) $I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{GI}\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$. Avec $\vec{n}(1\,;\,1\,;\,1)$ normal, $\overrightarrow{GI} = k\vec{n}$ imposerait $k = -\frac{1}{2}$ et $k = -1$: impossible. $\overrightarrow{GI}$ n'est pas normal, Noé a tort.

(c) Droite $G + t\vec{n}$: $(1+t\,;\,1+t\,;\,1+t)$. On remplace : $3(1+t) - 1 = 2 + 3t = 0$, donc $t = -\frac{2}{3}$ et $J\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{3} \times 3 - 1 = 0$ donc $J \in (BDE)$.
$GJ = \left|-\frac{2}{3}\right| \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) La hauteur issue de G est GJ : $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$.
Le tétraèdre $BDEG$ a pour volume $\frac{1}{3}$.

(e) ABD est rectangle en A, d'aire $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, et la hauteur issue de E est $AE = 1$ car (AE) est orthogonale à la face $ABCD$.
Donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$. Avec la base BDE, d'aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$, la hauteur h issue de A est la distance de A à (BDE) : $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times h$, d'où $h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La distance de A au plan (BDE) vaut $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ex. 40 ★★★ **Pyramide de verre**

(a) $\overrightarrow{BC}(0\,;\,4\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BS}(-2\,;\,2\,;\,4)$ ne sont pas colinéaires (première coordonnée nulle pour l'un, pas pour l'autre). $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 0 + 0 \times 4 + 1 \times 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BS} = 2 \times (-2) + 0 \times 2 + 1 \times 4 = 0$. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) : il est donc normal à (SBC). Une équation s'écrit $2x + z + d = 0$. Comme $B \in (SBC)$: $2 \times 4 + 0 + d = 0$, d'où $d = -8$. Vérification avec S : $2 \times 2 + 4 - 8 = 0$. Conclusion : (SBC) : $2x + z - 8 = 0$.

(b) La droite passant par A et dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$ est formée des points $(2t\,;\,0\,;\,t)$. On remplace dans l'équation : $2 \times 2t + t - 8 = 5t - 8 = 0$, donc $t = \frac{8}{5}$ et $K\left(\frac{16}{5}\,;\,0\,;\,\frac{8}{5}\right)$. Vérification : $2 \times \frac{16}{5} + \frac{8}{5} - 8 = \frac{40}{5} - 8 = 0$, donc $K \in (SBC)$. Ensuite $AK = |t| \times \|\vec{n}\| = \frac{8}{5} \times \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. La distance de A au plan (SBC) vaut $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ m.

(c) $I(4\,;\,2\,;\,0)$ est bien dans (SBC) : $2 \times 4 + 0 - 8 = 0$. Mais $\overrightarrow{AI}(4\,;\,2\,;\,0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}(2\,;\,0\,;\,1)$ (deuxième coordonnée 2 contre 0). $\overrightarrow{AI}$ n'est donc pas normal au plan, et I n'est pas le projeté orthogonal de A. D'ailleurs $AI = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} > \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Yanis a tort : un point du plan n'est le projeté que si $\overrightarrow{AI}$ est normal au plan.

(d) Base ABC : triangle rectangle en B, d'aire $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$. Sa hauteur est la distance de S au plan de base, soit $SH = 4$.
Donc $V = \frac{1}{3} \times 8 \times 4 = \frac{32}{3}$ m^3. Avec la base SBC, la hauteur est $AK = \frac{8\sqrt{5}}{5}$: $\frac{32}{3} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \frac{8\sqrt{5}}{5}$, d'où $\mathcal{B} = \frac{32 \times 5}{8\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. L'aire du triangle SBC vaut $4\sqrt{5}$ m^2.

Ex. 41 ★★★ **Lanterne et toile de tente**

(a) H et N sont dans $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{HN}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$. Or $\overrightarrow{MH}$ est normal à $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{HN}=0$. Par la relation de Chasles : $MN^2=\|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HN}\|^2=MH^2+2\,\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{HN}+HN^2=MH^2+HN^2$. Comme $HN^2\geqslant 0$, on a $MN^2\geqslant MH^2$, donc $MN\geqslant MH$ (ce sont des longueurs positives). L'égalité a lieu si et seulement si $HN=0$, c'est-à-dire $N=H$. Conclusion : H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.

(b) La droite passant par M et dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$ est formée des points $(6+2t\,;\,-2-2t\,;\,5+t)$. On remplace : $2(6+2t)-2(-2-2t)+(5+t)-3=18+9t=0$, donc $t=-2$. Ainsi $H(6+2\times(-2)\,;\,-2-2\times(-2)\,;\,5+(-2))$, soit $H(2\,;\,2\,;\,3)$. Vérification : $2\times 2-2\times 2+3-3=0$, donc $H\in\mathcal{P}$.

(c) $\overrightarrow{MH}=t\,\vec{n}$ avec $t=-2$ et $\|\vec{n}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$. Donc la distance de M à $\mathcal{P}$ vaut $MH=|t|\times\|\vec{n}\|=|-2|\times 3=6$ m (et non -6 : une distance est positive). Comme $6>5$, l'affirmation est fausse.

(d) Un point de (d) s'écrit $K(1+s\,;\,1+2s\,;\,3+2s)$, donc $\overrightarrow{MK}(s-5\,;\,2s+3\,;\,2s-2)$. K est le projeté si et seulement si $\overrightarrow{MK}\cdot\vec{u}=0$: $(s-5)+2(2s+3)+2(2s-2)=9s-3=0$, donc $s=\frac{1}{3}$ et $K\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{3}\,;\,\frac{11}{3}\right)$. Alors $\overrightarrow{MK}\left(-\frac{14}{3}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,-\frac{4}{3}\right)$ et $MK=\sqrt{\frac{196+121+16}{9}}=\sqrt{37}$ m.

(e) $\overrightarrow{HK}\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$, donc $HK=\sqrt{\frac{4+1+4}{9}}=1$. Alors $MH^2+HK^2=36+1=37=MK^2$. Explication : pour tout s, $2(1+s)-2(1+2s)+(3+2s)-3=0$, donc (d) est contenue dans $\mathcal{P}$ et $K\in\mathcal{P}$. La première question avec $N=K$ donne $MK^2=MH^2+HK^2$. On retrouve aussi $MK=\sqrt{37}>6=MH$: H reste le point du plan le plus proche de M.

Ex. 42 ★★★ **Planche de charpente dans un hangar**

(a) $\overrightarrow{AH}(0\,;\,2\,;\,2)$, $\overrightarrow{EF}(4\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{EC}(4\,;\,2\,;\,-2)$. Les droites (EF) et (EC) sont sécantes en E (vecteurs non colinéaires). $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{EF}=0\times 4+2\times 0+2\times 0=0$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{EC}=0\times 4+2\times 2+2\times(-2)=0$. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan : $(AH)\perp(EFC)$. Ainsi $\overrightarrow{AH}$, et donc $\vec{n}(0\,;\,1\,;\,1)$, est normal à (EFC) : une équation s'écrit $y+z+d=0$. Comme $E\in(EFC)$: $0+2+d=0$, d'où $d=-2$. Vérification avec C : $2+0-2=0$. Conclusion : (EFC) : $y+z-2=0$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) La droite de Léa est formée des points $(4+4k\,;\,2k\,;\,-2k)$. On remplace : $2k+(-2k)-2=-2\neq 0$ pour tout k : aucun point d'intersection. Son erreur : $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur du plan ($\vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0+2-2=0$), donc sa droite est parallèle au plan. Il faut diriger la droite par le vecteur normal $\vec{n}$: points $(4\,;\,t\,;\,t)$, puis $2t-2=0$, donc $t=1$. Le projeté est $(4\,;\,1\,;\,1)$. Vérification : $1+1-2=0$. La distance de B à (EFC) vaut $|1|\times\|\vec{n}\|=\sqrt{2}$ m.

(c) La droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$ est formée des points $(4s\,;\,2s+t\,;\,2s+t)$. On remplace : $4s+2t-2=0$, donc $t=1-2s$. La distance de M à (EFC) vaut $|1-2s|\times\sqrt{2}$. Elle est nulle si et seulement si $s=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $M(2\,;\,1\,;\,1)$, le centre du pavé. Ce point est bien dans le plan : $1+1-2=0$. Une distance à un plan est nulle si et seulement si le point appartient au plan.

(d) On résout $|1-2s|\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire $|1-2s|=\frac{1}{2}$: $1-2s=\frac{1}{2}$ ou $1-2s=-\frac{1}{2}$, donc $s=\frac{1}{4}$ ou $s=\frac{3}{4}$. Ces deux valeurs sont dans $[0\,;\,1]$. Les points cherchés sont $M_1\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $M_2\left(3\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

(e) $\overrightarrow{FE}(-4\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{FC}(0\,;\,2\,;\,-2)$: $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FC}=0$, donc EFC est rectangle en F. On a $EF=4$ et $FC=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$, donc $\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ m². La hauteur est la distance de G (cas $s=1$) au plan (EFC) : $h=|1-2|\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Conclusion : $V=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{8}{3}$ m³.

7. Sujets type bac

Ex. 43 ★☆☆ **Charpente cubique : coordonnées et orthogonalité**

(a) $G(1\,;\,1\,;\,1)$. I est le milieu de $[FG]$ avec $F(1\,;\,0\,;\,1)$: $I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$. $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$: $J\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

(b) $\overrightarrow{JI}\left(1-0\,;\,\frac{1}{2}-0\,;\,1-\frac{1}{4}\right)$, soit $\overrightarrow{JI}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right)$.

(c) $JI=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16+4+9}{16}}=\frac{\sqrt{29}}{4}$.

(d) $\overrightarrow{AI}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $\overrightarrow{CH}(-1\,;\,0\,;\,1)$. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CH}=1\times(-1)+\frac{1}{2}\times 0+1\times 1=0$: les droites sont orthogonales. Elles ne sont pas sécantes : sur (CH), $y=1$ et $x+z=1$; sur (AI), $y=1$ donne le point $(2\,;\,1\,;\,2)$, où $x+z=4$. Elles sont donc orthogonales mais pas perpendiculaires.

(e) $\overrightarrow{AG}(1\,;\,1\,;\,1)$. $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{AG}=1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\neq 0$: ils ne sont pas orthogonaux.

(f) $\overrightarrow{DI}\left(1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, donc $DI=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

Ex. 44 ★☆☆ **Panneau solaire dans un cadre en pavé**

(a) $B : 2\times 2+0+2\times 0-4=0$; $D : 0+4+0-4=0$; $E : 0+0+2\times 2-4=0$. Les trois points appartiennent à $\mathcal{P}$.

(b) Les coefficients de x, y, z donnent $\vec{n}(2\,;\,1\,;\,2)$.

(c) $G(2\,;\,4\,;\,2)$ (au-dessus de $C(2\,;\,4\,;\,0)$). $2\times 2+4+2\times 2-4=8\neq 0$, donc $G\notin\mathcal{P}$.

(d) $\overrightarrow{AG}(2\,;\,4\,;\,2)$. Si $\overrightarrow{AG}=k\vec{n}$, alors $k=1$ (première coordonnée), mais $4\neq 1\times 1$. $\overrightarrow{AG}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$: (AG) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$.

(e) $\vec{n'}(1\,;\,2\,;\,-2)$ est normal à $\mathcal{Q}$. $\vec{n}\cdot\vec{n'}=2\times 1+1\times 2+2\times(-2)=0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les plans sont perpendiculaires.

(f) $G\in\mathcal{P}' : 2\times 2+4+2\times 2+d=0$, donc $d=-12$.

Ex. 45 ★★☆ **Logiciel 3D : du vecteur normal au volume**

(a) $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $I\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, milieu de $[AE]$.

(b) $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BI}\left(-1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-1+1+0=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=-1+0+2\times\frac{1}{2}=0$. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : il est normal à (BDI). Une équation est donc $x+y+2z+d=0$ avec B : $1+d=0$, $d=-1$. Conclusion : $(BDI) : x+y+2z-1=0$
(vérification avec $I : 0+0+1-1=0$).

(c) Δ passe par G et est dirigée par $\vec{n}$: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. On remplace : $(1+t)+(1+t)+2(1+2t)-1=3+6t=0$, donc $t=-\frac{1}{2}$ et $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$. Vérification : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0-1=0$. K est le projeté orthogonal de G sur (BDI), donc la distance cherchée est $GK=\left|-\frac{1}{2}\right|\times\|\vec{n}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(d) Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{1+0}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,0\right)=K$. $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$: (IK) et (BD) sont sécantes en K et orthogonales, donc $[IK]$ est la hauteur issue de I. $IK=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $BD=\sqrt{2}$. Aire : $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(e) La hauteur issue de G est la distance de G au plan (BDI), soit GK. $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. Le volume du tétraèdre $GBDI$ vaut $\frac{1}{4}$ unité de volume.

Ex. 46 ★★☆ **Drone au-dessus d'une rampe : les erreurs de Noé**

(a) $3\times 0+4\times 3-12=0$, donc $N\in\mathcal{R}$. Mais $\overrightarrow{MN}\left(-5\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$ et $\vec{n}(3\,;\,0\,;\,4)$: $\frac{-5}{3}\neq\frac{-5/2}{4}=-\frac{5}{8}$, donc $\overrightarrow{MN}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$. $\overrightarrow{MN}$ n'est pas normal au plan : Noé a tort, N n'est pas le projeté orthogonal.

(b) La droite passe par M et est dirigée par $\vec{n}(3\,;\,0\,;\,4)$: $\begin{cases}x=5+3t\\y=2\\z=\frac{11}{2}+4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. On remplace : $3(5+3t)+4\left(\frac{11}{2}+4t\right)-12=25+25t=0$, donc $t=-1$ et $K\left(2\,;\,2\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Vérification : $3\times 2+4\times\frac{3}{2}-12=0$.

(c) Une distance est positive : $MK=|t|\times\|\vec{n}\|=|-1|\times\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$. La formule toute faite n'est pas au programme : on justifie par le projeté orthogonal. La distance de M à la rampe est 5 m.

(d) K et N sont dans $\mathcal{R}$, donc $\overrightarrow{KN}\left(-2\,;\,0\,;\,\frac{3}{2}\right)$ est un vecteur du plan, et $\overrightarrow{MK}(-3\,;\,0\,;\,-4)$ est normal : $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KN}=6+0-6=0$. Alors $MN^2=\|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}\|^2=MK^2+2\,\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KN}+KN^2=25+\frac{25}{4}=\frac{125}{4}$, donc $MN=\frac{5\sqrt{5}}{2}$. On a bien $MN>MK$: le projeté K est le point de la rampe le plus proche du drone.

(e) $M=K+\vec{n}$, donc les points du côté de M s'écrivent $L=K+s\vec{n}$ avec $s>0$, et $KL=s\times 5=\frac{5}{2}$ donne $s=\frac{1}{2}$. $L\left(2+\frac{3}{2}\,;\,2\,;\,\frac{3}{2}+2\right)=\left(\frac{7}{2}\,;\,2\,;\,\frac{7}{2}\right)$. Vérification : pour L, $3\times\frac{7}{2}+4\times\frac{7}{2}-12=\frac{25}{2}$, donc $t=-\frac{1}{2}$ et la distance vaut $\frac{1}{2}\times 5=2{,}5$ m.

Ex. 47 ★★★ **Pyramide de verre : distance, volume et aire**

(a) On a $\overrightarrow{SB}(2\,;\,2\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{SC}(-2\,;\,2\,;\,-4)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (premières coordonnées opposées, deuxièmes égales). Un vecteur $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est normal à (SBC) si et seulement si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0$, c'est-à-dire $2a+2b-4c=0$ et $-2a+2b-4c=0$. En soustrayant les deux équations : $4a=0$, donc $a=0$, puis $b=2c$. Avec $c=1$, on obtient $\vec{n}(0\,;\,2\,;\,1)$. Vérification : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0+4-4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0+4-4=0$. Le plan (SBC) a donc une équation de la forme $2y+z+d=0$. Comme S est dans le plan, $2\times 0+4+d=0$, d'où $d=-4$. Contrôle : pour B, $4+0-4=0$; pour C, $4+0-4=0$. Conclusion : $(SBC) : 2y+z-4=0$.

Ex. 47 **(suite)**

(b) D'abord, $2 \times \frac{6}{5} + \frac{8}{5} - 4 = \frac{12}{5} + \frac{8}{5} - \frac{20}{5} = 0$, donc $K \in (SBC)$. Ensuite, $\overrightarrow{AK}\left(0\,;\,\frac{16}{5}\,;\,\frac{8}{5}\right) = \frac{8}{5}\,\vec{n}$: ce vecteur est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$, donc il est normal au plan. Conclusion : K est le point du plan tel que $\overrightarrow{AK}$ est normal à (SBC), c'est donc le projeté orthogonal de A sur (SBC).

(c) La distance de A au plan (SBC) est la longueur AK. Comme $\overrightarrow{AK} = \frac{8}{5}\,\vec{n}$: $AK = \frac{8}{5} \times \|\vec{n}\| = \frac{8}{5} \times \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Conclusion : la distance de A au plan (SBC) vaut $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ m.

(d) On a $\overrightarrow{AB}(0\,;\,4\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BC}(-4\,;\,0\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \times (-4) + 4 \times 0 + 0 \times 0 = 0$: le triangle ABC est rectangle en B, avec $AB = BC = 4$. Son aire vaut donc $\mathcal{B} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$. Le plan (ABC) a pour équation $z = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{HS}(0\,;\,0\,;\,4)$ lui est normal ($\overrightarrow{HS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{HS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$). Comme $H \in (ABC)$, H est le projeté orthogonal de S et la hauteur vaut $h = HS = 4$. Ainsi $V = \frac{1}{3} \times 8 \times 4 = \frac{32}{3}$. Conclusion : $V = \frac{32}{3}$ m^3.

(e) On prend maintenant pour base le triangle SBC. La hauteur associée est la distance de A au plan (SBC), soit AK. On a donc $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{SBC} \times AK$, d'où $\mathcal{A}_{SBC} = \frac{3V}{AK} = \frac{32}{\frac{8\sqrt{5}}{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. Vérification directe : $SB = SC = \sqrt{24}$, donc SBC est isocèle en S. Soit $M(0\,;\,2\,;\,0)$ le milieu de $[BC]$: (SM) est une hauteur, et $SM = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$. L'aire vaut alors $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$. Conclusion : l'aire de SBC vaut $4\sqrt{5}$ m^2, et les deux méthodes concordent.

Ex. 48 ★★★ **Rayon laser et miroir plan dans un pavé**

(a) On a $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{AD}\| = 2$. Ces vecteurs ne sont pas unitaires, donc ce repère n'est pas orthonormé : on ne pourrait pas y calculer de norme avec $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dans le repère orthonormé donné, on a $F(4\,;\,0\,;\,2)$, $C(4\,;\,2\,;\,0)$ et $H(0\,;\,2\,;\,2)$. Les milieux sont donc $I(4\,;\,0\,;\,1)$, $J(2\,;\,2\,;\,0)$ et $K(0\,;\,1\,;\,2)$.

Ex. 48 **(suite)**

(b) On a $\overrightarrow{IJ}(-2\,;\,2\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{IK}(-4\,;\,1\,;\,1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : $\frac{-4}{-2} = 2$ mais $\frac{1}{2} \neq 2$. Par la formule $xx' + yy' + zz'$: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = -2 + 4 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IK} = -4 + 2 + 2 = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc il est normal à (IJK). Une équation s'écrit $x + 2y + 2z + d = 0$. Avec I : $4 + 0 + 2 + d = 0$, donc $d = -6$. Contrôle : pour J, $2 + 4 + 0 - 6 = 0$; pour K, $0 + 2 + 4 - 6 = 0$. Conclusion : (IJK) : $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

(c) On a $G(4\,;\,2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AG}(4\,;\,2\,;\,2)$. Une représentation paramétrique de (AG) est $\begin{cases} x = 4s \\ y = 2s \\ z = 2s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation du plan : $4s + 4s + 4s - 6 = 0$, donc $12s = 6$ et $s = \frac{1}{2}$. On obtient $L(2\,;\,1\,;\,1)$. Contrôle : $2 + 2 + 2 - 6 = 0$. Conclusion : le rayon frappe le miroir en $L(2\,;\,1\,;\,1)$, qui est le milieu de $[AG]$, c'est-à-dire le centre du pavé.

(d) On calcule $\overrightarrow{AG} \cdot \vec{n} = 4 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 = 12$, puis $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2\sqrt{6}$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. On a donc $\cos\theta = \frac{12}{2\sqrt{6} \times 3} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Conclusion : $\theta \approx 35{,}3°$.

(e) La droite passant par G et dirigée par $\vec{n}$ est formée des points $(4 + t\,;\,2 + 2t\,;\,2 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation du plan : $(4 + t) + 2(2 + 2t) + 2(2 + 2t) - 6 = 6 + 9t = 0$, donc $t = -\frac{2}{3}$. On obtient $R\left(\frac{10}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$. Contrôle : $\frac{10}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 6 = 0$, et $\overrightarrow{GR} = -\frac{2}{3}\,\vec{n}$ est normal au miroir.
Donc $GR = \left|-\frac{2}{3}\right| \times \|\vec{n}\| = \frac{2}{3} \times 3 = 2$. Or $\overrightarrow{GL}(-2\,;\,-1\,;\,-1)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ ($\frac{-2}{1} \neq \frac{-1}{2}$) : L n'est pas le projeté, et $GL = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} > 2$. Sacha a tort : le projeté R est le point du miroir le plus proche de G. Conclusion : la distance de G au miroir vaut 2 dm.

Ex. 49 ★★★ **Antenne et toit incliné : du plan au volume**

(a) On a $F(6\,;\,0\,;\,6)$ et $H(0\,;\,6\,;\,6)$, donc $I(3\,;\,0\,;\,6)$ et $J(0\,;\,3\,;\,6)$. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}(-6\,;\,6\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BI}(-3\,;\,0\,;\,6)$ ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée est nulle pour l'un et pas pour l'autre). Les points B, D et I définissent donc bien un plan. On vérifie l'équation : pour B, $12+0+0-12=0$; pour D, $0+12+0-12=0$; pour I, $6+0+6-12=0$. Le plan d'équation $2x+2y+z-12=0$ contient ces trois points non alignés : c'est donc le plan (BDI). Pour J : $0+6+6-12=0$, donc $J\in(BDI)$.

(b) D'après l'équation, $\vec{n}(2\,;\,2\,;\,1)$ est un vecteur normal au toit, donc c'est un vecteur directeur de Δ. Avec $G(6\,;\,6\,;\,6)$, on obtient $\Delta : \begin{cases} x=6+2t \\ y=6+2t \\ z=6+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation du plan : $2(6+2t)+2(6+2t)+(6+t)-12=18+9t=0$, donc $t=-2$. On obtient $P(2\,;\,2\,;\,4)$. Contrôle : $4+4+4-12=0$, et $\overrightarrow{GP}(-4\,;\,-4\,;\,-2)=-2\,\vec{n}$. Conclusion : $P(2\,;\,2\,;\,4)$.

(c) Soit N un point du plan (BDI). Comme P et N sont dans ce plan, $\overrightarrow{PN}$ est un vecteur du plan. Or $\overrightarrow{GP}$ est normal au plan, donc $\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{PN}=0$. Par la relation de Chasles, $GN^2=\|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PN}\|^2=GP^2+2\,\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{PN}+PN^2=GP^2+PN^2$.
Donc $GN^2\geqslant GP^2$, soit $GN\geqslant GP$, avec égalité si et seulement si $N=P$. Le point P est donc le point du toit le plus proche de G. La distance cherchée vaut $GP=|-2|\times\sqrt{2^2+2^2+1^2}=2\times 3=6$. Conclusion : la distance de G au toit vaut 6 m.

(d) La droite (BD) est dirigée par $\vec{u}(-1\,;\,1\,;\,0)$. Un point de (BD) s'écrit $Q(6-s\,;\,s\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{JQ}(6-s\,;\,s-3\,;\,-6)$. La condition $\overrightarrow{JQ}\cdot\vec{u}=0$ s'écrit $-(6-s)+(s-3)=2s-9=0$, donc $s=\frac{9}{2}$. On obtient $Q\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{9}{2}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{JQ}\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,-6\right)$. Contrôle : $\overrightarrow{JQ}\cdot\vec{u}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+0=0$. On calcule $JQ=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+36}=\sqrt{\frac{81}{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ et $BD=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$. (JQ) est une hauteur du triangle, donc l'aire vaut $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}=27$. Conclusion : l'aire de BDJ vaut $27\ \text{m}^2$.

(e) Comme $J\in(BDI)$, le plan (BDJ) est le toit. La hauteur issue de G est donc la distance de G à ce plan, soit $GP=6$. Par la formule $V=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$: $V=\frac{1}{3}\times 27\times 6=54$. Conclusion : le volume du tétraèdre $GBDJ$ vaut $54\ \text{m}^3$.