49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Produit scalaire avec le cosinus

À retenir : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$ est un nombre. Les deux vecteurs partent du même point : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. Le signe est celui de $\cos\theta$; $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. Ex. : $2\times5\times\cos 120° = -5$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : normes et angle** — Calcule chaque produit scalaire en valeur exacte. θ désigne l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(a) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 8$ et $\theta = 60°$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(b) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = 135°$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(c) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 9$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

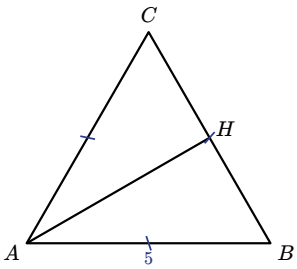
(d) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$: calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(e) A appartient au segment $[BC]$, avec $AB = 3$ et $AC = 7$ (figure). Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



(f) $\|\vec{w}\| = 3\sqrt{2}$: calcule $\vec{w}\cdot\vec{w}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : dans un triangle équilatéral** — ABC est un triangle équilatéral de côté 5 et H est le milieu de $[BC]$. Calcule chaque produit scalaire en valeur exacte.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(b) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ (attention à l'origine des vecteurs).

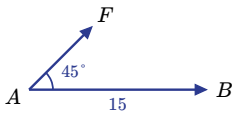
(c) Calcule $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}$.

(d) Calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(e) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Ex. 3 ★★☆ **Travail d'une force : à l'endroit et à rebours** — Le travail (en joules) d'une force $\vec{F}$ (en newtons) pendant un déplacement $\overrightarrow{AB}$ (en mètres) est le produit scalaire $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. Donne les valeurs exactes, puis arrondis au dixième si besoin.

(a) Léa pousse un chariot avec une force de 40 N, sur $AB = 15$ m (figure). Calcule W.

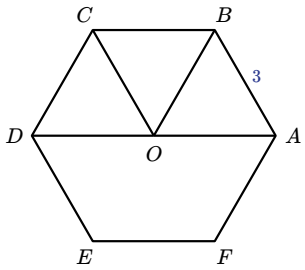


(b) Hugo tire une luge sur 10 m avec une force de 60 N. Le travail vaut 450 J. Calcule l'angle entre la force et le déplacement.

(c) Inès affirme : « Avec une force de 25 N sur 14 m, j'ai fourni 400 J. » Est-ce possible ? Justifie.

(d) Le vent exerce sur un cycliste une force qui fait un angle de 120° avec son déplacement de 12 m. Son travail vaut -180 J. Calcule la norme de cette force.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux dans l'hexagone régulier** — $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et de côté 3. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.



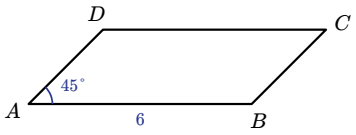
(a) « $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ est un vecteur de norme $\frac{9}{2}$. »

(b) « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = \frac{9}{2}$. »

(c) « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = 9$. »

(d) « $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = 9$. »

Ex. 5 ★★★ **Le panneau de treillis d'un pont** — Sur le plan d'un pont, un panneau de treillis a la forme d'un parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 6$, $AD = 2\sqrt{2}$ (en mètres) et $\widehat{BAD} = 45°$. Donne chaque résultat en valeur exacte.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

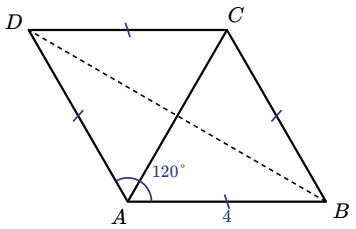
(b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$, puis calcule $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$.

(c) Calcule $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$ en justifiant la position des deux vecteurs.

(d) Noé écrit : « $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6\overrightarrow{AB}$, c'est un vecteur de même sens que $\overrightarrow{AB}$ ». Corrige son erreur et calcule ce produit scalaire.

(e) Écris $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Le signe du résultat est-il cohérent avec la figure ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Le losange du carreleur** — Pour un carrelage, Maëlle trace un losange $ABCD$ de côté 4 avec $\widehat{BAD} = 120°$. Donne chaque résultat en valeur exacte.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

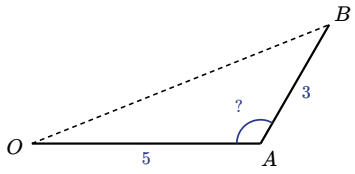
(b) Rayan écrit : « $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 \times 4 \times \cos 60° = 8$ ». Explique son erreur et donne le bon résultat.

(c) Avec $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, développe BD^2 pour calculer la longueur BD.

(d) Avec $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, calcule $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Que dis-tu des droites (AC) et (BD) ? Justifie.

(e) Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$, puis déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

Ex. 7 ★★★ **Le bras articulé d'un robot** — Le bras articulé d'un robot a une épaule O, un coude A et une pince B, avec $OA = 5$ dm et $AB = 3$ dm. Le capteur du coude affiche $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -7{,}5$. Arrondis les angles non remarquables au dixième de degré.



(a) Détermine la mesure exacte de l'angle $\widehat{OAB}$.

(b) Calcule $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

(c) Développe $\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\|^2$ pour montrer que $OB = 7$.

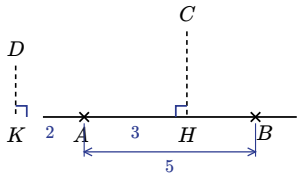
(d) Jade lit à l'écran : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 40$. Explique pourquoi c'est impossible, puis calcule la vraie valeur.

(e) Déduis-en une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2. *Produit scalaire par projection orthogonale*

À retenir : H projeté orthogonal de C sur (AB) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si H est du côté de B, $-AB \times AH$ sinon, 0 si $H = A$. Ex. : $AB = 3$, $AH = 2$, H opposé à B : -6. Même origine d'abord.

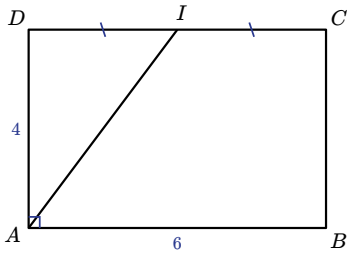
Ex. 8 ★★★ **Lire le projeté et choisir le signe** — Sur la figure, H et K sont les projetés orthogonaux de C et de D sur la droite (AB). Calcule chaque produit scalaire.



(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

(d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ (e) $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$

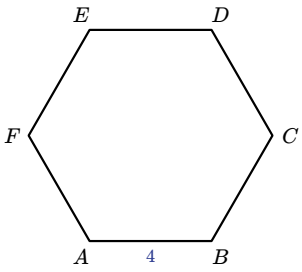
Ex. 9 ★☆☆ **Rectangle : projeter au bon endroit** — $ABCD$ est un rectangle avec $AB = 6$ et $AD = 4$; I est le milieu de $[DC]$. Calcule chaque produit scalaire sans calculer AC.



(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ (c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$

(d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

Ex. 10 ★★☆ **Hexagone régulier et erreur d'Inès** — $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 4 et de centre O (ses angles mesurent $120°$).



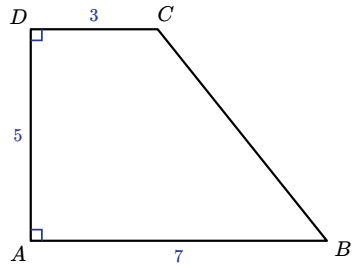
(a) Justifie que $(BD) \perp (AB)$ et que $(AE) \perp (AB)$, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.

(b) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ par projection orthogonale.

(c) Justifie que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

(d) Inès écrit : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$. Explique son erreur, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ex. 11 ★★☆ **Trapèze rectangle : sur quelle droite projeter ?** — $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et en D, avec $(AB) \parallel (DC)$, $AB = 7$, $DC = 3$ et $AD = 5$.



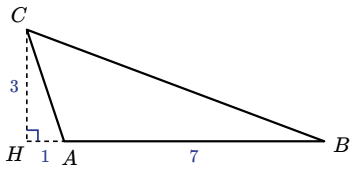
(a) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(b) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (attention à l'origine des vecteurs).

(c) Calcule $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(d) Calcule $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Ex. 12 ★★★ **Hauteur extérieure : signes et relation de Chasles** — ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de C, c'est-à-dire le projeté orthogonal de C sur (AB). On a $AB = 7$, $AH = 1$ et $CH = 3$, et A est entre H et B. Arrondis l'angle au dixième de degré.



(a) Noa écrit : « $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 7$ ». Explique son erreur, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

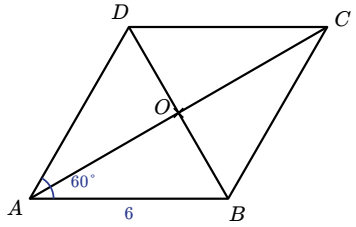
(b) Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ par projection.

(c) Déduis-en, sans nouvelle projection, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.

(d) En écrivant $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}$, calcule $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

(e) Calcule AC, puis la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Ex. 13 ★★★ **Losange : projeter sur la bonne diagonale** — Un carreau de faïence a la forme d'un losange $ABCD$ de centre O, de côté 6, avec $\widehat{BAD} = 60°$. On rappelle que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.



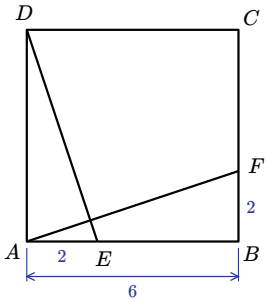
(a) Justifie que le projeté orthogonal de B sur (AC) est O, puis calcule AO et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(b) Lina écrit : « $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 6 \times 6 \times \cos 60° = 18$ ». Trouve son erreur, puis calcule correctement ce produit scalaire.

(c) Calcule $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ en projetant sur la droite (BD).

(d) Calcule $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD}$ en remplaçant d'abord $\overrightarrow{CD}$ par un vecteur égal.

Ex. 14 ★★★ **Allées perpendiculaires dans un terrain carré** — Malo trace deux allées droites $[DE]$ et $[AF]$ dans un terrain carré $ABCD$ de côté 6 (en mètres). E est sur $[AB]$, F est sur $[BC]$, et $AE = BF$. Sur la figure, $AE = BF = 2$. Arrondis l'angle au degré.



(a) Calcule $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ par projection sur la droite qui porte $\overrightarrow{AE}$, sans calculer AF.

(b) Avec $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, calcule $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}$. Que peux-tu dire des allées ?

(c) Dans le cas général $AE = BF = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 6$, démontre que les droites (DE) et (AF) sont toujours perpendiculaires.

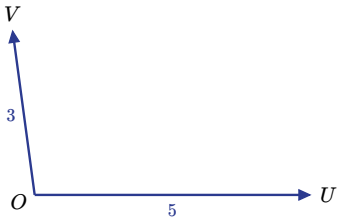
(d) On revient au cas $AE = BF = 2$. En décomposant $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ avec la relation de Chasles, calcule $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.

(e) Calcule DE et DF, puis une mesure de l'angle $\widehat{EDF}$.

3. *Bilinéarité, développement et normes*

À retenir : $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$. Pièges : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ et $(2\vec{u})\cdot(3\vec{v}) = 6\,\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes — développer par bilinéarité** — On donne $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2$. Sur la figure, $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Développe par bilinéarité en gardant les vecteurs, puis calcule.



(a) Calcule $(2\vec{u})\cdot(3\vec{v})$.

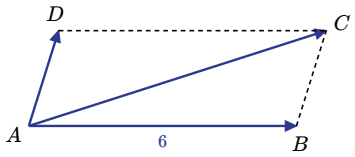
(b) Calcule $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$.

(c) Calcule $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot\vec{v}$.

(d) Calcule $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$.

(e) Calcule $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$.

Ex. 16 ★★☆ **Automatismes — norme d'une somme, d'une différence** — $ABCD$ est un parallélogramme, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, donc $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On donne $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$.

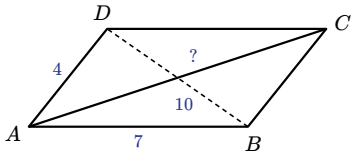


(a) Nina écrit : « $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 6 + \sqrt{5}$ ». Explique son erreur, puis calcule $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

(b) Calcule $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

(c) Calcule $\|\vec{u}-3\vec{v}\|$.

Ex. 17 ★★☆ **Un cadre de portail : d'une diagonale à l'autre** — Inès fabrique un cadre de portail en forme de parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 7$ dm, $AD = 4$ dm et une diagonale $AC = 10$ dm. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Arrondis l'angle au dixième de degré.



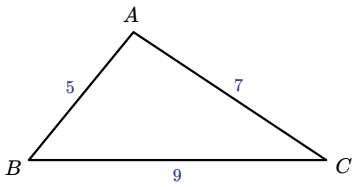
(a) Exprime $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(b) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

(c) Déduis-en la longueur exacte de la diagonale BD.

(d) Calcule une mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.

Ex. 18 ★★☆ **Démonstration à compléter, puis le terrain de Malik** — $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques. Malik étudie aussi un terrain triangulaire ABC avec $AB = 5$ m, $AC = 7$ m et $BC = 9$ m.



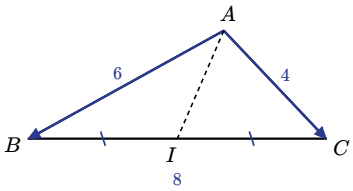
(a) Complète : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \ldots$ (bilinéarité) $= \ldots$ (symétrie). Déduis-en : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$.

(b) Exprime $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(c) Déduis-en $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis la nature de l'angle $\widehat{ABC}$. Justifie.

(d) Malik voulait un angle droit en B, avec les mêmes longueurs AB et BC. Quelle longueur AC aurait-il fallu ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Le bras articulé d'un robot** — Le bras articulé d'un robot pivote en A. Ses deux segments mesurent $AB = 6$ cm et $AC = 4$ cm, et ses pinces B et C sont à $BC = 8$ cm l'une de l'autre. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. I est le milieu de $[BC]$. Les angles sont à donner à 0,1° près.



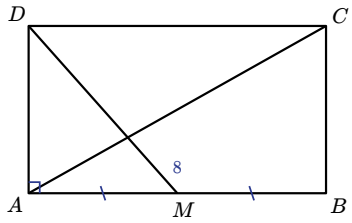
(a) Exprime $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis développe BC^2 pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(b) Déduis-en la nature de l'angle $\widehat{BAC}$, puis sa mesure.

(c) Léo écrit : « $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$, donc $AI^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2) = 13$ ». Trouve son erreur, puis calcule AI.

(d) Calcule $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$ par bilinéarité. La médiane (AI) est-elle perpendiculaire à (BC) ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Les barres de renfort d'une passerelle** — Kofi dessine le cadre d'une passerelle : un rectangle $ABCD$ avec $AB = 8$ m et $AD = h$ m ($h > 0$). M est le milieu de $[AB]$. Deux barres de renfort suivent $[DM]$ et $[AC]$.



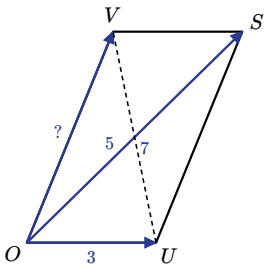
(a) Écris $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, puis exprime $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de h.

(b) Dans cette question, $h = 4$. Calcule DM^2, AC^2, puis $\|\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AC}\|$.

(c) Détermine la valeur de h pour laquelle les barres $[DM]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires.

(d) Pour cette valeur, Zoé affirme : « $\|\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AC}\|^2 = DM^2 + AC^2$ ». Vrai ou faux ? Justifie, puis calcule cette norme.

Ex. 21 ★★★ **Deux cordes sur un anneau : tout retrouver à partir des normes** — Deux cordes tirent un anneau O avec les forces $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ (en newtons). $OUSV$ est un parallélogramme. Lina mesure $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 5$. L'angle est à donner à 0,1° près.



(a) Écris $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ comme des vecteurs de la figure.

(b) Yanis écrit : « $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2$ ». Corrige son erreur en développant $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

(c) Combine les développements de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et de $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(d) Calcule $\|\vec{v}\|$, puis la mesure de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(e) Calcule $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{VU}$. Les diagonales du parallélogramme sont-elles perpendiculaires ? Justifie.

4. *En coordonnées : calcul et orthogonalité*

À retenir : Seulement en repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Orthogonaux $\iff$ produit scalaire nul (colinéaires $\iff$ $xy' - x'y = 0$). $\vec{u}(a\,;b) \perp \vec{v}(-b\,;a)$: $(2\,;5) \perp (-5\,;2)$.

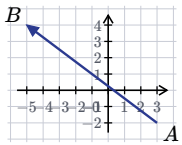
Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : produit scalaire et norme en coordonnées** — Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Donne les résultats en valeur exacte.

(a) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(-2\,;5)$ et $\vec{v}(3\,;-4)$.

(b) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(-3\,;-2)$ et $\vec{v}(-4\,;1)$.

(c) Calcule la norme de $\vec{w}(-6\,;3)$.

(d) On donne $A(3\,;-2)$ et $B(-5\,;4)$. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis la longueur AB.



(e) Soit $\vec{u}(-7\,;4)$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{i}$ et $\vec{u} \cdot \vec{j}$.

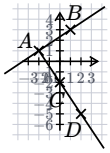
Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : orthogonalité et perpendicularité** — Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

(a) $\vec{u}(4\,;-6)$ et $\vec{v}(-6\,;9)$ sont-ils orthogonaux ? colinéaires ? Justifie.

(b) $\vec{u}(-3\,;7)$ et $\vec{v}(8\,;3)$ sont-ils orthogonaux ? Justifie.

Ex. 23 **(suite)**

(c) On donne $A(-2\,;1)$, $B(1\,;3)$, $C(0\,;-2)$ et $D(2\,;-5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ? Justifie.



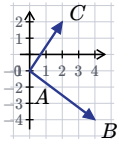
(d) On donne $A(-3\,;2)$ et $B(1\,;7)$. Donne un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à (AB).

Ex. 24 ★★☆ **Trois copies à corriger** — Ben corrige trois copies. Pour chaque élève, trouve l'erreur, puis donne le bon calcul et la bonne conclusion.

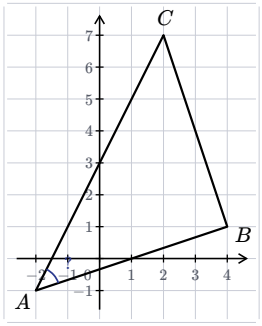
(a) Repère orthonormé, $\vec{u}(3\,;-2)$ et $\vec{v}(4\,;6)$. Tom écrit : « $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 6 + 4\times(-2) = 10$, donc ils ne sont pas orthogonaux ».

(b) Repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 2$. Chloé écrit, pour $\vec{u}(2\,;1)$ et $\vec{v}(-1\,;2)$: « $2\times(-1) + 1\times 2 = 0$, donc $\vec{u}\perp\vec{v}$ ».

(c) Repère orthonormé, $A(0\,;-1)$, $B(4\,;-4)$, $C(2\,;2)$. Yanis écrit : « $\overrightarrow{AB}(-4\,;3)$, $\overrightarrow{AC}(2\,;3)$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$ et $\widehat{BAC}$ est aigu ».



Ex. 25 ★★☆ **Le terrain de Sacha** — Sacha dessine un terrain triangulaire dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 10 m) : $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;1)$ et $C(2\,;7)$.



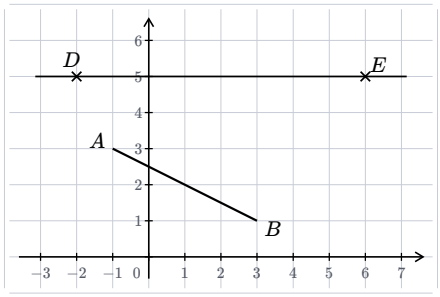
(a) Montre que le triangle ABC est rectangle et précise en quel sommet.

(b) Calcule la valeur exacte de $\cos\widehat{BAC}$, puis une mesure de $\widehat{BAC}$.

(c) Sacha veut placer un piquet $D(m\,;m)$ tel que le triangle ABD soit rectangle en A. Trouve m.

(d) Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{u}(m\,;4)$ et $\vec{v}(m+3\,;-1)$ sont-ils orthogonaux ?

Ex. 26 ★★★ **La pince du bras robotisé** — Inès programme un bras articulé de robot dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Le bras va de $A(-1\,;3)$ à $B(3\,;1)$. La pince est au point $C(m\,;5)$, où m est un réel : elle se déplace sur la droite (DE) de la figure.



(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ (en fonction de m), puis la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ en valeur exacte.

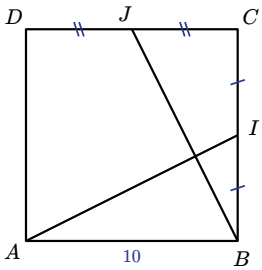
(b) Léo cherche m pour que ABC soit rectangle en A. Il écrit : « $4\times 2 + (m+1)\times(-2) = 0$, donc $m = 3$ ». Trouve son erreur et donne la bonne valeur de m.

(c) Détermine m pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

(d) Démontre qu'aucune valeur de m ne rend le triangle ABC rectangle en C.

(e) Pour quelle valeur de m les points A, B et C sont-ils alignés ? Quel outil utilises-tu, et pourquoi pas le produit scalaire ?

Ex. 27 ★★★ **Le motif de carrelage de Nina** — Nina trace un motif de carrelage. $ABCD$ est un carré de côté 10 cm, I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[CD]$. On se demande si les droites (AI) et (BJ) sont perpendiculaires. Arrondis les angles au degré.



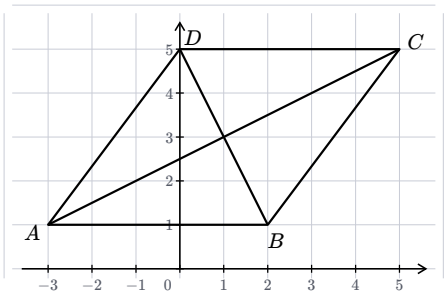
(a) Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, Nina trouve $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BJ}\left(-\frac{3}{2}\,;1\right)$, puis $xx' + yy' = -\frac{1}{4} \neq 0$, et conclut « pas perpendiculaires ». Explique son erreur.

(b) On pose $\vec{i} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}$. Justifie que $(A\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, puis donne les coordonnées de B, I, J, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$.

(c) Démontre que $(AI)\perp(BJ)$. Quelle relation entre les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ et de $\overrightarrow{BJ}$ permettait de le prévoir ?

(d) Calcule AI en valeur exacte, puis $\cos\widehat{BAI}$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAI}$.

Ex. 28 ★★★ **Le vitrail de Malik** — Malik conçoit un vitrail $ABCD$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 dm) : $A(-3\,;1)$, $B(2\,;1)$, $C(5\,;5)$ et $D(0\,;5)$. Arrondis les angles au dixième de degré.



(a) Démontre que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Quelle est la nature de $ABCD$?

(b) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{DAB}$.

(c) Lina calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-10$ et conclut que l'angle $\widehat{ABD}$ est obtus. Corrige-la, puis donne une mesure de $\widehat{ABD}$.

(d) Malik ajoute une baguette dirigée par un vecteur $\vec{w}(x\,;y)$ orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ et de même norme que $\overrightarrow{AC}$. Détermine les vecteurs $\vec{w}$ possibles.

5. *Calculer un angle*

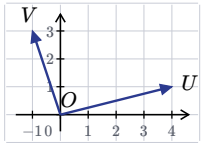
À retenir : $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$, avec θ entre $0°$ et $180°$: cos $<0\Rightarrow$ angle obtus. Angle en A : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ partent de A. Simplifie avant de conclure : $\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $45°$. Deux droites : angle entre $0°$ et $90°$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : du cosinus à l'angle** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Donne les angles en degrés ; arrondis au dixième de degré si l'angle n'est pas remarquable.

(a) $\|\vec{u}\|=2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{6}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\sqrt{6}$. Détermine l'angle géométrique θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(b) $\vec{u}(2\,;0)$ et $\vec{v}(3\,;3)$: calcule $\cos\theta$ en valeur exacte simplifiée, puis l'angle θ.

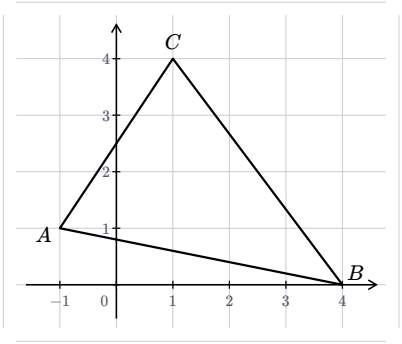
(c) $\vec{u}(4\,;1)$ et $\vec{v}(-1\,;3)$ sont représentés ci-dessous. Calcule l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



(d) On sait que $\|\vec{u}\|=6$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=9$ et que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure $60°$. Retrouve $\|\vec{v}\|$.

(e) Vrai ou faux ? « Si $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, alors $\theta=-60°$. » Justifie.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : l'angle en un sommet** — Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(-1\,;1)$, $B(4\,;0)$ et $C(1\,;4)$. Arrondis les angles au dixième de degré.



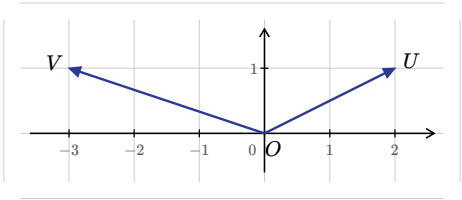
(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(b) Calcule les longueurs AB et AC en valeur exacte.

(c) Calcule $\cos\widehat{BAC}$ en valeur exacte, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

(d) Pour l'angle en A, Léo utilise les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$. Quel angle trouve-t-il ? Explique son erreur.

Ex. 31 ★★☆ **Deux voiliers : angle de vecteurs, angle de droites** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 mille marin), deux voiliers quittent le port O. Le premier suit la droite d_1 dirigée par $\vec{u}(2\,;1)$, le second suit la droite d_2 dirigée par $\vec{v}(-3\,;1)$.



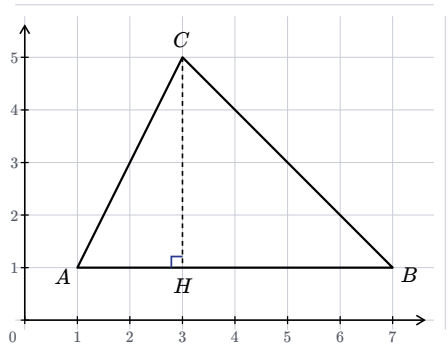
(a) Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis l'angle géométrique θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en valeur exacte.

(b) Jade affirme : « les droites d_1 et d_2 forment un angle de $135°$ ». Corrige son affirmation.

(c) Un troisième voilier suit la droite d_3 dirigée par $\vec{w}(1\,;m)$. Détermine m pour que d_3 soit perpendiculaire à d_2.

(d) Avec cette valeur de m, calcule l'angle entre les droites d_1 et d_3.

Ex. 32 ★★☆ **Un terrain, trois méthodes pour un angle** — Un terrain triangulaire ABC est placé dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 10 m) : $A(1\,;1)$, $B(7\,;1)$ et $C(3\,;5)$. H est le projeté orthogonal de C sur (AB). Arrondis les angles au dixième de degré.



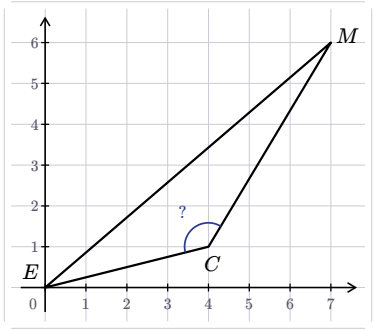
(a) Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons : avec les coordonnées, puis avec le projeté orthogonal H.

(b) Malik écrit « $\cos\widehat{BAC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$ ». Explique pourquoi c'est impossible, puis calcule $\widehat{BAC}$.

(c) Calcule BC, puis retrouve $\cos\widehat{BAC}$ avec le théorème d'Al-Kashi.

(d) Calcule $\widehat{ABC}$ en valeur exacte. Déduis $\widehat{ACB}$ de la somme des angles, puis contrôle avec $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Ex. 33 ★★★ **Bras de robot : l'angle au coude** — Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, le bras articulé d'un robot est schématisé par le triangle ECM : l'épaule $E(0\,;0)$, le coude $C(4\,;1)$ et la pince $M(7\,;6)$. Arrondis les angles au dixième de degré.



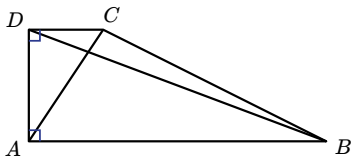
(a) Calcule $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis la valeur exacte de $\cos\widehat{ECM}$ et la mesure de l'angle $\widehat{ECM}$.

(b) Lina écrit : « $\overrightarrow{EC}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{CM}(3\,;5)$, donc $\cos\widehat{ECM}=\dfrac{17}{\sqrt{17}\times\sqrt{34}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{ECM}=45°$ ». Explique son erreur et ce qu'elle a calculé.

(c) Calcule les valeurs exactes de $\cos\widehat{CEM}$ et de $\cos\widehat{EMC}$, puis les mesures de ces deux angles.

(d) Vérifie tes trois résultats avec la somme des angles du triangle ECM.

Ex. 34 ★★★ **Étagère en trapèze : l'angle des diagonales** — Maëlle conçoit une étagère en forme de trapèze rectangle $ABCD$, renforcée par deux barres placées sur les diagonales. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 dm), on a $A(0\,;0)$, $B(8\,;0)$, $C(2\,;h)$ et $D(0\,;h)$, avec $h>0$. On note θ l'angle géométrique entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$. Arrondis les angles au dixième de degré.



La figure n'est pas à l'échelle.

(a) Exprime $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ en fonction de h.

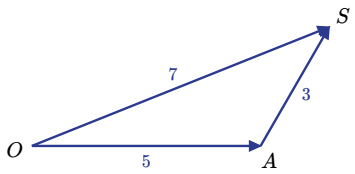
(b) Détermine h pour que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires. Justifie.

(c) Dans cette question, $h=2$. Calcule la valeur exacte de $\cos\theta$, puis θ.

(d) Toujours avec $h=2$, Sami affirme : « l'angle entre les droites (AC) et (BD) est θ ». Vrai ou faux ? Justifie, puis donne cet angle.

(e) Pour quelles valeurs de h l'angle θ est-il aigu ? Obtus ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Deux poussées : un angle sans coordonnées** — Deux ouvriers poussent une lourde caisse. Leurs poussées sont représentées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, avec $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$ (en centaines de newtons). On place les points O, A et S tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AS}=\vec{v}$. Arrondis les angles au dixième de degré.



(a) Développe $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ par bilinéarité, puis calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(b) Déduis-en l'angle géométrique θ entre les deux poussées.

(c) Pour l'angle β entre $\vec{u}$ et $\vec{u}+\vec{v}$, Noé écrit $\cos\beta=\dfrac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}$, et sa calculatrice affiche une erreur. Explique pourquoi, puis calcule β.

(d) Retrouve $\cos\beta$ avec le théorème d'Al-Kashi dans le triangle OAS, puis calcule $\widehat{OAS}$. Pourquoi cet angle n'est-il pas égal à θ ?

(e) Calcule $\|\vec{u}-\vec{v}\|$, puis l'angle α entre $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$.

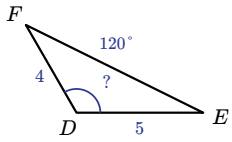
6. Théorème d'Al-Kashi

À retenir : Côté opposé à gauche : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, avec $\widehat{A}$ compris entre b et c. Angle obtus : $\cos\widehat{A} < 0$, le terme devient $+$. Ex. : $b = c = 1$, $\widehat{A} = 120°$: $a^2 = 3$, $a = \sqrt{3}$. Aire $\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : le troisième côté** — Dans chaque triangle, écris d'abord la formule d'Al-Kashi avec les lettres du triangle, puis donne la valeur exacte de la longueur demandée.

(a) Triangle ABC : $AB = 7$, $AC = 15$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calcule BC.

(b) Triangle DEF : $DE = 5$, $DF = 4$ et $\widehat{EDF} = 120°$. Calcule EF.

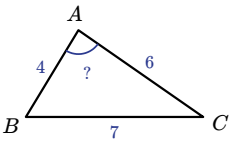


(c) Triangle KLM : $KL = 6$, $KM = \sqrt{2}$ et $\widehat{K} = \frac{\pi}{4}$. Quel côté est opposé à l'angle $\widehat{K}$? Calcule sa longueur.

(d) Triangle RST : $RS = \sqrt{3}$, $ST = 5$ et $\widehat{RST} = 30°$. Quelle longueur peut-on calculer directement ? Calcule-la.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : un angle et sa nature à partir des trois côtés** — Dans chaque question, on connaît les trois côtés du triangle. Donne les valeurs exactes ; arrondis au dixième de degré un angle qui n'est pas remarquable.

(a) Triangle ABC : $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calcule $\cos\widehat{A}$, puis donne la mesure de $\widehat{A}$ en degrés.



(b) Triangle PQR : $PQ = \sqrt{3}$, $PR = 4$ et $QR = \sqrt{31}$. Calcule $\cos\widehat{P}$, puis donne la mesure de $\widehat{P}$ en radians.

(c) Triangle UVW : $UV = 9$, $UW = 12$ et $VW = 15$. Calcule $UV^2 + UW^2 - VW^2$. Quelle est la nature de l'angle $\widehat{U}$?

(d) Un triangle a pour côtés 6, 7 et 10. Quel est le seul angle qui peut être obtus ? L'est-il ? Justifie.

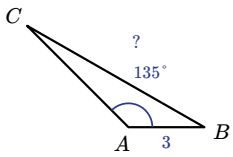
Ex. 38 ★★☆ **Démonstration d'Al-Kashi et erreur de Noé** — Dans un triangle ABC, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

(a) Justifie que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, puis complète par bilinéarité : $BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - \ldots + AB^2$.

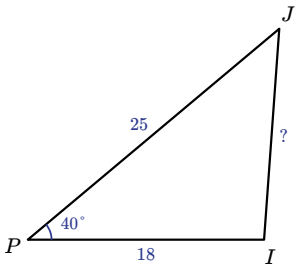
(b) Exprime $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec b, c et $\cos\widehat{A}$, puis conclus. Que devient la formule si $\widehat{A} = 90°$?

Ex. 38 (suite)

(c) Avec $AB = 3$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $\widehat{A} = 135°$, Noé écrit : $BC^2 = 9 + 32 - 2\times 3\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 17$, donc $BC = 17$. Trouve ses deux erreurs et corrige.



Ex. 39 ★★☆ **Navigation entre deux îles** — Yanis pilote une vedette depuis le port P. L'île I est à 18 km de P, l'île J à 25 km, et les deux routes forment un angle $\widehat{IPJ} = 40°$. Arrondis les longueurs au dixième de km, l'aire au km² et l'angle au degré.

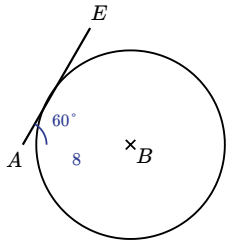


(a) Calcule la distance IJ entre les deux îles.

(b) Calcule l'aire de la zone triangulaire PIJ.

(c) Calcule l'angle $\widehat{PIJ}$ formé par les routes $[IP]$ et $[IJ]$. Est-il aigu ou obtus ?

Ex. 40 ★★★ **L'angle connu n'est pas compris : deux triangles possibles** — Inès veut construire avec son triangle de géomètre un triangle ABC tel que $AB = 8$, $BC = 7$ et $\widehat{BAC} = 60°$. On note $x = AC$. Sur la figure, le point C est sur la demi-droite $[AE)$ et sur le cercle de centre B et de rayon 7.



(a) Inès écrit $AC^2 = 8^2 + 7^2 - 2\times 8\times 7\times\cos 60°$. Explique son erreur.

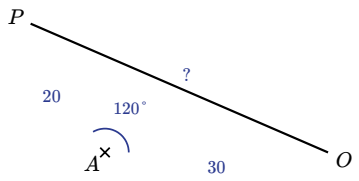
(b) Écris le théorème d'Al-Kashi en partant du côté opposé à l'angle $\widehat{A}$, puis montre que $x^2 - 8x + 15 = 0$.

(c) Résous cette équation. Combien de triangles conviennent ?

(d) On note C et D les deux points obtenus, avec $AC < AD$. Dans les triangles ABC et ABD, donne la nature de l'angle opposé au plus grand côté. Justifie.

(e) Calcule la valeur exacte de l'aire de chacun des deux triangles.

Ex. 41 ★★★ **Bras articulé de robot** — Sacha programme un bras de robot : l'épaule O et le coude A sont reliés par un segment de 30 cm, le coude A et la pince P par un segment de 20 cm. L'angle $\widehat{OAP}$ est réglable. Donne les valeurs exactes, puis les valeurs arrondies au dixième. La figure montre la position de la question 1.



(a) On règle $\widehat{OAP} = \frac{2\pi}{3}$. Calcule la distance OP entre l'épaule et la pince.

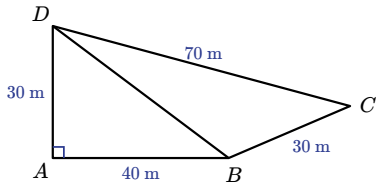
(b) La pince doit atteindre un objet situé à 40 cm de l'épaule. Calcule $\cos\widehat{OAP}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{OAP}$.

(c) Dans la position de la question 2, calcule $\cos\widehat{AOP}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{AOP}$.

(d) L'angle $\widehat{OAP}$ varie strictement entre $0°$ et $180°$. Justifie que, pour tout réglage, $OP < 50$ cm.

(e) Calcule l'aire du triangle OAP dans la position de la question 1.

Ex. 42 ★★★ **Le terrain de Malik** — Malik, géomètre, relève une parcelle $ABCD$: $AB = 40$ m, $AD = 30$ m, $BC = 30$ m, $CD = 70$ m, et l'angle $\widehat{BAD}$ est droit. Il trace la diagonale $[BD]$. Arrondis l'aire au m² près.



(a) Calcule BD avec le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABD. Quel théorème retrouves-tu ?

(b) Malik affirme : « Dans le triangle BCD, seul l'angle $\widehat{CBD}$ peut être obtus. » Vrai ou faux ? Justifie sans calculer d'angle.

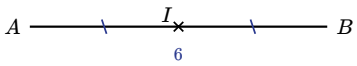
(c) Calcule $\cos\widehat{CBD}$, puis donne la mesure exacte de l'angle $\widehat{CBD}$.

(d) Calcule l'aire exacte de la parcelle $ABCD$, puis sa valeur arrondie.

7. *Ensemble des points M tels que $MA \cdot MB = k$*

À retenir : I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. Pour $= k$: $MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$; > 0 cercle, $= 0$ point I, < 0 vide. $k = 0$: cercle de diamètre $[AB]$, rayon $\frac{AB}{2}$. Ex. : $AB = 2$, $k = 3$ donne $MI = 2$.

Ex. 43 ★★☆ **Automatismes : lire l'ensemble selon la valeur de k** — A et B sont deux points tels que $AB = 6$, et I est le milieu de $[AB]$. Pour chaque valeur de k, détermine l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$.



(a) $k = 7$.

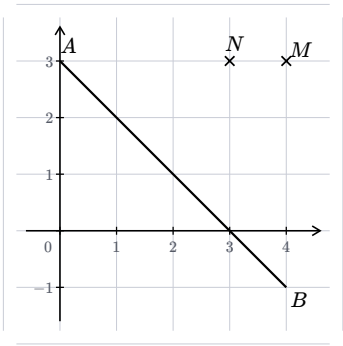
(b) $k = -9$.

(c) $k = -12$.

(d) $k = 3$ (rayon en valeur exacte).

(e) $k = 0$: précise le centre et le rayon.

Ex. 44 ★★☆ **Automatismes : le cercle de diamètre [AB] en coordonnées** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. On donne $A(0\,;3)$, $B(4\,;-1)$, $M(4\,;3)$ et $N(3\,;3)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.



(a) Donne le centre I de $\mathcal{C}$ et son rayon en valeur exacte.

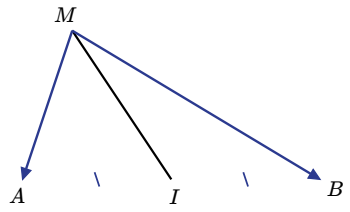
(b) Calcule $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Déduis-en que $M \in \mathcal{C}$ et donne la nature du triangle AMB.

(c) Le point N appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifie avec un produit scalaire.

(d) Le point A appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifie avec le produit scalaire $\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

(e) Vrai ou faux ? Justifie : « Ici, le calcul $xx' + yy'$ suffit, sans équation de cercle, parce que le repère est orthonormé. »

Ex. 45 ★★☆ **Démonstration exigible : transformer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$** — A et B sont deux points distincts et I est le milieu de $[AB]$. On veut démontrer que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.



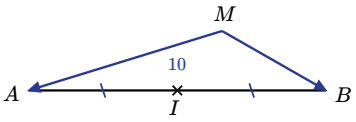
(a) Avec la relation de Chasles, écris $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I, puis justifie que $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

(b) Déduis-en que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ et cite l'identité utilisée.

(c) Exprime IA^2 en fonction de AB, puis conclus.

(d) Démontre que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Précise son centre et son rayon.

Ex. 46 ★★☆ **Bras de robot : l'erreur de Lina et le choix de k** — Deux capteurs A et B d'un bras articulé de robot sont distants de $AB = 10$ cm. I est le milieu de $[AB]$, et la pince est en un point M. Lina cherche l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -16$ (en cm²). Elle écrit : « $MI^2 = -16 + \frac{10}{4} = -13{,}5 < 0$, donc l'ensemble est vide. »



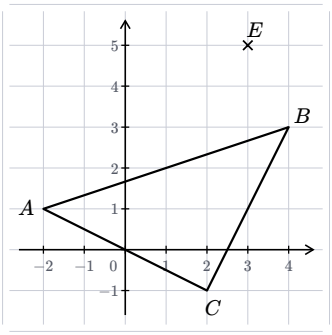
(a) Repère l'erreur de Lina, puis donne l'ensemble correct.

(b) Pour quelle valeur de k l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est-il réduit au point I ?

(c) Trouve k pour que cet ensemble soit le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{5}$ cm.

(d) Pour quelles valeurs de k cet ensemble est-il vide ? Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Navigation : deux balises et un voilier** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé (unité : le mille marin). Deux balises sont en $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;3)$, une bouée en $C(2\,;-1)$ et un voilier en $E(3\,;5)$. On note I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Les angles sont arrondis au dixième de degré.



(a) Calcule $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. Déduis-en que C appartient à $\mathcal{C}$, puis la nature du triangle ABC.

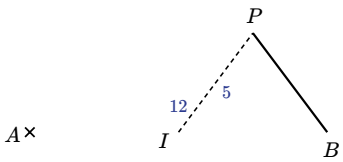
(b) Donne les coordonnées du centre I de $\mathcal{C}$ et son rayon en valeur exacte.

(c) Calcule $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$, puis vérifie que $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB} = EI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

(d) Sans utiliser d'équation de cercle, détermine l'ensemble Γ des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 3$. La bouée C est-elle sur Γ ? Justifie.

(e) Calcule EA et EB, puis une mesure de l'angle $\widehat{AEB}$ sous lequel le voilier voit les deux balises.

Ex. 48 ★★★ **Terrain de sport : angles vus depuis deux poteaux** — Sur un terrain, deux poteaux A et B sont distants de $AB = 12$ m ; I est le milieu de $[AB]$. On admet que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.



(a) Un arbitre en S voit les deux poteaux sous un angle droit : $\widehat{ASB} = 90°$. Calcule $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$, puis la distance SI.

(b) Théo affirme : « A et B n'appartiennent pas à l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$, car l'angle $\widehat{AMB}$ n'existe pas pour eux. » Vrai ou faux ? Justifie.

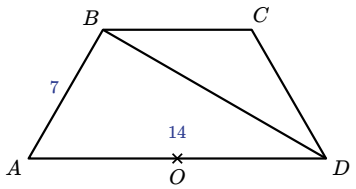
(c) Un joueur est en P avec $PI = 5$ m. Calcule $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ et déduis-en la nature de l'angle $\widehat{APB}$.

(d) Détermine l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 28$, puis justifie que pour ces points l'angle $\widehat{AMB}$ est aigu.

Ex. 48 **(suite)**

(e) Un point R vérifie $RA = 8$ m et $RB = 10$ m. Calcule $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB}$ avec les normes seules, puis RI en valeur exacte.

Ex. 49 ★★★ **Ferme de pont : un demi-hexagone** — La ferme d'un pont est un trapèze $ABCD$ avec $(BC) \parallel (AD)$, $AD = 14$ m et $AB = BC = CD = 7$ m. O est le milieu de $[AD]$; on admet que les triangles ABO, OBC et OCD sont équilatéraux. Pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - \frac{AD^2}{4}$.



(a) Nora se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$: $B(1\,;0)$, $D(0\,;2)$, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-1) \times (-1) + 0 \times 2 = 1$. Repère son erreur, puis calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ par bilinéarité et conclus sur $\widehat{ABD}$.

(b) Démontre que C appartient au cercle de diamètre $[AD]$ et déduis-en la nature du triangle ACD.

(c) Pour quelle valeur de k l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = k$ est-il réduit à un point ? Et pour $k = -60$, quel est cet ensemble ? Justifie.

(d) K est le milieu de $[BC]$. Détermine k pour que K appartienne à l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = k$, puis décris cet ensemble.