1. Produit scalaire avec le cosinus

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : normes et angle**

(a) Avec le cosinus : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 8\times\cos 60° = 24\times\frac{1}{2} = 12$. L'angle est aigu, donc le résultat est positif.

(b) Avec le cosinus : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\sqrt{2}\times 5\times\cos 135° = 10\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{10\times 2}{2} = -10$. L'angle est obtus, donc le résultat est négatif.

(c) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7\times 9\times 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

(d) Avec le cosinus : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3}\times 6\times\cos\frac{5\pi}{6} = 6\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{6\times 3}{2} = -9$.

(e) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires, donc l'angle vaut 180° : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 7\times\cos 180° = -21$ (et non 21).

(f) C'est le carré scalaire : $\vec{w}\cdot\vec{w} = \|\vec{w}\|^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9\times 2 = 18$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : dans un triangle équilatéral**

(a) Les vecteurs partent de A et $\widehat{BAC} = 60°$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5\times 5\times\cos 60° = \frac{25}{2}$.

(b) Les vecteurs ne partent pas du même point. Or $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -5\times 5\times\cos 60° = -\frac{25}{2}$. Ici, l'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ vaut 120° et non 60°.

(c) C'est le carré scalaire : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA} = CA^2 = 25$.

(d) Dans un triangle équilatéral, la médiane (AH) est aussi une hauteur, donc $(AH)\perp(BC)$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

(e) La médiane (AH) est aussi une bissectrice, donc $\widehat{BAH} = 30°$. De plus $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (hauteur du triangle équilatéral). Avec le cosinus : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{4}$.

Ex. 3 ★★☆ **Travail d'une force : à l'endroit et à rebours**

(a) Avec le cosinus : $W = 40\times 15\times\cos 45° = 600\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 300\sqrt{2}\approx 424{,}3$ J.

(b) $450 = 60\times 10\times\cos\theta$, donc $\cos\theta = \frac{450}{600} = \frac{3}{4}$. À la calculatrice, $\theta\approx 41{,}4°$.

(c) Comme $\cos\theta\leqslant 1$, on a $W\leqslant 25\times 14 = 350$ J. Or $400 > 350$: c'est impossible.

Ex. 3 (suite)

(d) $-180 = F\times 12\times\cos 120° = F\times 12\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -6F$, donc $F = 30$ N. Le travail est négatif parce que l'angle est obtus.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux dans l'hexagone régulier**

(a) Faux : un produit scalaire est un nombre, pas un vecteur. Le triangle OAB est équilatéral, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3\times 3\times\cos 60° = \frac{9}{2}$: c'est un nombre.

(b) Faux : un angle intérieur de l'hexagone régulier mesure 120°, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = 3\times 3\times\cos 120° = -\frac{9}{2}$. Le résultat est négatif, car l'angle est obtus.

(c) Vrai : $ABCO$ et $OCDE$ sont des losanges, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$. Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 9$.

(d) Faux : O est le milieu de $[AD]$, donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires de sens contraires. On a donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = 3\times 3\times\cos 180° = -9$.

Ex. 5 ★★★ **Le panneau de treillis d'un pont**

(a) Les deux vecteurs partent de A. Avec le cosinus : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AD\times\cos 45° = 6\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 12$.

(b) Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{ADC} = 180° - 45° = 135°$. Les deux vecteurs partent de D : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 2\sqrt{2}\times 6\times\cos 135° = 12\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -12$. L'angle est obtus, donc le résultat est négatif.

(c) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$. Les deux vecteurs sont colinéaires et de sens contraires (angle 180°) : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -(2\sqrt{2})^2 = -8$.

(d) Un produit scalaire est un nombre, pas un vecteur. Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, on obtient le carré scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 36$.

(e) Par bilinéarité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 12 + 36 = 48$. Le résultat est positif, ce qui est cohérent : l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu, car il est plus petit que $\widehat{BAD} = 45°$.

Ex. 6 ★★★ **Le losange du carreleur**

(a) Les deux vecteurs partent de A. Avec le cosinus : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos 120° = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$. L'angle est obtus, donc le résultat est négatif.

(b) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne partent pas du même point : l'angle qu'ils forment n'est pas $\widehat{ABC}$. Comme $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, on ramène les deux vecteurs en B. Dans un losange, deux angles consécutifs sont supplémentaires, donc $\widehat{ABC} = 180° - 120° = 60°$. Ainsi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \times 4 \times \cos 60° = -8$.

(c) Par bilinéarité : $BD^2 = \|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2 = 16 - 2 \times (-8) + 16 = 48$. Une longueur est positive, donc $BD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

(d) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Alors $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2 = 16 - 16 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux, donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

(e) On ramène tout en A : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Par bilinéarité : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2 = 8 + 16 = 24$. Avec le cosinus : $\cos \widehat{ABD} = \frac{24}{BA \times BD} = \frac{24}{4 \times 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $0° \leqslant \widehat{ABD} \leqslant 180°$, on obtient $\widehat{ABD} = 30°$.

Ex. 7 ★★★ **Le bras articulé d'un robot**

(a) Avec le cosinus : $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO \times AB \times \cos \widehat{OAB}$, donc $\cos \widehat{OAB} = \frac{-7{,}5}{5 \times 3} = -\frac{1}{2}$. Comme $0° \leqslant \widehat{OAB} \leqslant 180°$, on obtient $\widehat{OAB} = 120°$: le produit scalaire est négatif, l'angle est bien obtus.

(b) $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne partent pas du même point. Or $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$, donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -(-7{,}5) = 7{,}5$.

(c) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Par bilinéarité : $OB^2 = OA^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2 = 25 + 15 + 9 = 49$. Une longueur est positive, donc $OB = 7$.

(d) On a toujours $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leqslant OA \times OB = 5 \times 7 = 35$, et $40 > 35$: la valeur lue est impossible. Par bilinéarité : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = OA^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 25 + 7{,}5 = 32{,}5$.

(e) Avec le cosinus : $\cos \widehat{AOB} = \frac{32{,}5}{5 \times 7} = \frac{13}{14}$. À la calculatrice, $\widehat{AOB} \approx 21{,}8°$: c'est un angle aigu, cohérent avec un produit scalaire positif.

2. *Produit scalaire par projection orthogonale*

Ex. 8 ★☆☆ **Lire le projeté et choisir le signe**

(a) H est le projeté orthogonal de C sur (AB), et H et B sont du même côté de A, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5 \times 3 = 15$.

(b) K est le projeté orthogonal de D sur (AB), mais K et B sont de part et d'autre de A (l'angle $\widehat{BAD}$ est obtus), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -AB \times AK = -5 \times 2 = -10$.

(c) On part de B : $BH = AB - AH = 5 - 3 = 2$, et H et A sont du même côté de B, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BH = 5 \times 2 = 10$.

(d) $BK = BA + AK = 5 + 2 = 7$, et K et A sont du même côté de B, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \times BK = 5 \times 7 = 35$.

(e) $(HC) \perp (HB)$, donc le projeté orthogonal de C sur (HB) est H lui-même : $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Ex. 9 ★★☆ **Rectangle : projeter au bon endroit**

(a) $(BC) \perp (AB)$, donc le projeté orthogonal de C sur (AB) est B : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 36$.

(b) Le projeté orthogonal de I sur (AB) est le milieu J de $[AB]$, du même côté que B, avec $AJ = 3$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AJ = 6 \times 3 = 18$.

(c) Les vecteurs ne partent pas du même point. Avec Chasles : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + AD^2 = 0 + 16 = 16$, car $(AD) \perp (AB)$.

(d) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ (côtés opposés du rectangle), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB^2 = -36$.

Ex. 10 ★★☆ **Hexagone régulier et erreur d'Inès**

(a) $[AD]$ est un diamètre du cercle circonscrit et B, E sont sur ce cercle, donc $\widehat{ABD} = 90°$; de plus $\widehat{BAE} = 120° - 30° = 90°$ (le triangle AFE est isocèle en F avec $\widehat{AFE} = 120°$). Le projeté de D sur (AB) est B : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 = 16$. Le projeté de E sur (AB) est A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

(b) $\widehat{BAF} = 120°$ est obtus : le projeté K de F sur (AB) est de l'autre côté de A, avec $AK = AF \times \cos 60° = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = -AB \times AK = -4 \times 2 = -8$.

(c) Les diagonales $[AD]$ et $[CF]$ ont le même milieu O, donc $ACDF$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$. On remplace par ce vecteur égal : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = -8$.

Ex. 10 **(suite)**

(d) Inès multiplie deux longueurs sans projeter : $AB \times AC$ n'est le produit scalaire que si les vecteurs sont colinéaires de même sens. Le projeté H de C sur (AB) est au-delà de B, avec $BH = BC \times \cos 60° = 2$, donc $AH = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 6 = 24$.

Ex. 11 ★★☆ **Trapèze rectangle : sur quelle droite projeter ?**

(a) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) : $ADCH$ est un rectangle, donc $AH = DC = 3$, et H est du côté de B. Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 7 \times 3 = 21$.

(b) On ramène les vecteurs au même point : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Le projeté de C sur (BA) est H, avec $BH = 7 - 3 = 4$, du côté de A : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 7 \times 4 = 28$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -28$.

(c) On projette $\overrightarrow{BC}$ sur la droite (AD) qui porte l'autre vecteur : B se projette en A et C en D. Donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = 25$.

(d) Le projeté K de B sur (CD) vérifie $CK = AB - DC = 4$, et K et D sont de part et d'autre de C : $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = -CD \times CK = -3 \times 4 = -12$.

Ex. 12 ★★★ **Hauteur extérieure : signes et relation de Chasles**

(a) Noa a bien projeté, mais a oublié le signe. H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Comme A est entre H et B, H et B sont de part et d'autre de A : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires (l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus). Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -7 \times 1 = -7$.

(b) H est aussi le projeté orthogonal de C sur (BA), donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$. H et A sont du même côté de B et $BH = BA + AH = 7 + 1 = 8$, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BH = 7 \times 8 = 56$.

(c) $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, donc par bilinéarité et symétrie $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -(-7) = 7$. De même $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = (-1) \times (-1) \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 56$.

(d) Par bilinéarité : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CH^2 + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$. Comme $(CH) \perp (AB)$, les deux produits du milieu sont nuls. $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont de même sens, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = HA \times HB = 1 \times 8 = 8$. Ainsi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 9 + 8 = 17$.

Ex. 12 **(suite)**

(e) Le triangle AHC est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore $AC^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ et $AC = \sqrt{10}$. Avec le cosinus : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{-7}{7\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. À la calculatrice, $\widehat{BAC} \approx 108{,}4°$: l'angle est obtus, ce qui est cohérent avec le signe $-$.

Ex. 13 ★★★ **Losange : projeter sur la bonne diagonale**

(a) Les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en O, donc $O \in (AC)$ et $(BO) \perp (AC)$: O est le projeté orthogonal de B sur (AC). Le triangle ABD est isocèle en A avec un angle de $60°$, donc il est équilatéral : $BD = 6$ et $OB = 3$. Dans le triangle ABO rectangle en O : $AO^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, donc $AO = 3\sqrt{3}$ et $AC = 6\sqrt{3}$. Par projection, et comme $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont de même sens : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = AO \times AC = 3\sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 54$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne partent pas du même point : $60°$ n'est pas l'angle entre ces deux vecteurs. On écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Le triangle ABD est équilatéral, donc $\widehat{ABD} = 60°$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -6 \times 6 \times \cos 60° = -18$. L'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$, une fois ramenés au même point, mesure $120°$.

(c) Les diagonales sont perpendiculaires, donc le projeté orthogonal de C sur (BD) est O. Ainsi $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BO}$. Ces deux vecteurs sont de même sens, avec $BO = 3$, donc $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = BD \times BO = 6 \times 3 = 18$.

(d) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Par conséquent $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$. Le projeté orthogonal de B sur (AO) est O, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO^2 = 27$, d'où $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} = -27$.

Ex. 14 ★★★ **Allées perpendiculaires dans un terrain carré**

(a) $(BC) \perp (AB)$ et $F \in [BC]$, donc le projeté orthogonal de F sur (AE), qui est la droite (AB), est B. B et E sont du même côté de A, donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \times AB = 2 \times 6 = 12$.

Ex. 14 **(suite)**

(b) Par bilinéarité : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$. On a $(DA)\perp(AB)$ et $(AE)\perp(BF)$, donc le premier et le dernier produits sont nuls. $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires et de sens contraires : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}=-6\times 2=-12$. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times 6=12$.
Donc $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc les allées (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

(c) Le calcul est le même : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ (droites perpendiculaires), $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}=-6x$ (sens contraires) et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=6x$ (même sens).
Donc $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=-6x+6x=0$ pour tout x de $[0\,;6]$: les droites (DE) et (AF) sont toujours perpendiculaires.

(d) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$, avec $CF=6-2=4$. Par bilinéarité, $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}$. Le premier et le dernier produits sont nuls (angles droits). $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont de même sens : $6\times 4=24$. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de même sens : $2\times 6=12$.
Donc $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=24+12=36$.

(e) Par le théorème de Pythagore : dans le triangle DAE rectangle en A, $DE=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$; dans le triangle DCF rectangle en C, $DF=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$. Avec le cosinus : $\cos\widehat{EDF}=\frac{36}{2\sqrt{10}\times 2\sqrt{13}}=\frac{9}{\sqrt{130}}$, donc à la calculatrice $\widehat{EDF}\approx 38°$.

3. *Bilinéarité, développement et normes*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes — développer par bilinéarité**

(a) Par bilinéarité, on sort les réels : $(2\vec{u})\cdot(3\vec{v})=2\times 3\times\vec{u}\cdot\vec{v}=6\times(-2)=-12$.

(b) Par bilinéarité : $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=25+(-2)=23$
($\vec{u}\cdot\vec{u}$ est le carré scalaire $\|\vec{u}\|^2$).

(c) Par bilinéarité : $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}-2\,\vec{v}\cdot\vec{v}=-2-2\times 9=-20$.

(d) Identité remarquable : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=25-9=16$
(les termes $-\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $+\vec{v}\cdot\vec{u}$ s'annulent par symétrie).

Ex. 15 **(suite)**

(e) Par bilinéarité : $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})=3\,\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+6\,\vec{v}\cdot\vec{u}-2\,\vec{v}\cdot\vec{v}=3\|\vec{u}\|^2+5\,\vec{u}\cdot\vec{v}-2\|\vec{v}\|^2$ (symétrie)
$=75-10-18=47$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes — norme d'une somme, d'une différence**

(a) La norme d'une somme n'est pas la somme des normes : on passe par le carré. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=36+8+5=49$, donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$, alors que $6+\sqrt{5}\approx 8{,}24$.
(Oublier le double produit donnerait aussi un faux résultat : $\sqrt{41}$.)

(b) Le double produit change de signe : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=36-8+5=33$, donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{33}$.

(c) $\|\vec{u}-3\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\times 3\,\vec{u}\cdot\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2=36-24+45=57$ (car $\|3\vec{v}\|^2=9\|\vec{v}\|^2$), donc $\|\vec{u}-3\vec{v}\|=\sqrt{57}$.

Ex. 17 ★★☆ **Un cadre de portail : d'une diagonale à l'autre**

(a) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et, avec Chasles, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{u}+\vec{v}$. De même, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\vec{u}-\vec{v}$.

(b) $AC^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$. On isole, sans oublier le $\frac{1}{2}$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)=\frac{1}{2}(100-49-16)=\frac{35}{2}$.

(c) $BD^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=49-35+16=30$, donc $BD=\sqrt{30}$ dm $\approx 5{,}48$ dm.

(d) Avec le cosinus : $\cos\widehat{BAD}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{AB\times AD}=\frac{35}{2}\times\frac{1}{28}=\frac{5}{8}$, donc $\widehat{BAD}\approx 51{,}3°$
(calculatrice).

Ex. 18 ★★☆ **Démonstration à compléter, puis le terrain de Malik**

(a) Par bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$; par symétrie, $=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.
Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\iff 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}=0\iff\vec{u}\perp\vec{v}$.

(b) Avec Chasles, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Donc $AC^2=AB^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+BC^2$. On isole, sans oublier le $\frac{1}{2}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-BC^2)=\frac{1}{2}(49-25-81)=-\frac{57}{2}$.

Ex. 18 (suite)

(c) Par bilinéarité, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{57}{2}$. Ce produit scalaire de deux vecteurs de même origine B est positif, donc l'angle $\widehat{ABC}$ est aigu.
Attention : le signe de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ne donne pas la nature de $\widehat{ABC}$, car ces deux vecteurs n'ont pas la même origine.

(d) On applique l'équivalence de la première question avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$: $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC} \iff AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25 + 81 = 106$. Il aurait fallu $AC = \sqrt{106}$ m $\approx 10{,}30$ m (et non 7 m).

Ex. 19 ★★★ Le bras articulé d'un robot

(a) Avec Chasles : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$.
Donc $BC^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. On isole le produit scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(36+16-64) = -6$.

(b) Avec le cosinus : $\cos\widehat{BAC} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{AB\times AC} = \frac{-6}{6\times 4} = -\frac{1}{4}$. Ce cosinus est négatif, donc l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus. À la calculatrice, $\widehat{BAC}\approx 104{,}5°$.

(c) On a bien $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$. En revanche, Léo a oublié le double produit : $AI^2 = \frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \frac{1}{4}(\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(36 - 12 + 16) = 10$.
Donc $AI = \sqrt{10}$ cm.

(d) On a $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$. Par bilinéarité : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{u})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = \frac{1}{2}(\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2) = \frac{1}{2}(16-36) = -10$. Ce produit scalaire n'est pas nul, donc (AI) n'est pas perpendiculaire à (BC).

Ex. 20 ★★★ Les barres de renfort d'une passerelle

(a) Par bilinéarité : $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, tout comme $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$: ces deux termes sont nuls. $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires, donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} = -h\times h$. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times 8 = 32$.
Finalement, $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = 32 - h^2$.

(b) Avec Pythagore : $DM^2 = AD^2 + AM^2 = 16+16 = 32$ et $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64+16 = 80$. D'après la question précédente, $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = 32-16 = 16$.
Donc $\|\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{AC}\|^2 = DM^2 - 2\,\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2 = 32 - 32 + 80 = 80$, d'où $\|\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
Sans le double produit, on trouverait à tort $\sqrt{112}$.

Ex. 20 (suite)

(c) Les barres sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $32 - h^2 = 0$. Comme $h>0$, on obtient $h = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

(d) Vrai. Pour $h = 4\sqrt{2}$, on a $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. Or $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (Pythagore vectoriel). Ici $DM^2 = 32+16 = 48$ et $AC^2 = 64+32 = 96$, donc $\|\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{AC}\|^2 = 144$ et la norme vaut 12.

Ex. 21 ★★★ Deux cordes sur un anneau : tout retrouver à partir des normes

(a) $OUSV$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{US} = \overrightarrow{OV}$. Avec Chasles : $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{US} = \overrightarrow{OS}$. De plus, $\vec{u}-\vec{v} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{VO} = \overrightarrow{VU}$ (et non $\overrightarrow{UV}$). Sa norme reste $UV = 5$.

(b) Par bilinéarité : $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$. Avec la symétrie, cela donne $\|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Le dernier terme est $+\|\vec{v}\|^2$, car $(-\vec{v})\cdot(-\vec{v}) = \|\vec{v}\|^2$.

(c) On a $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. En soustrayant : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\,\vec{u}\cdot\vec{v}$.
Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(49-25) = 6$.

(d) On part de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, soit $49 = 9 + 12 + \|\vec{v}\|^2$.
Donc $\|\vec{v}\|^2 = 28$ et $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{7}$ N. Avec le cosinus : $\cos\theta = \frac{6}{3\times 2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$, d'où $\theta\approx 67{,}8°$.

(e) On a $\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{VU} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 9 - 28 = -19$. Ce produit scalaire n'est pas nul, donc les diagonales (OS) et (UV) ne sont pas perpendiculaires.

4. *En coordonnées : calcul et orthogonalité*

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : produit scalaire et norme en coordonnées

(a) Le repère est orthonormé, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\times 3 + 5\times(-4) = -6 - 20 = -26$.

(b) Le repère est orthonormé, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-3)\times(-4) + (-2)\times 1 = 12 - 2 = 10$ (attention : $(-3)\times(-4) = +12$).

(c) $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

(d) Le repère est orthonormé. Arrivée moins départ : $\overrightarrow{AB}(-5-3\,;4-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-8\,;6)$.
Donc $AB = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$.

Ex. 22 **(suite)**

(e) $\vec{i}(1\,;0)$ et $\vec{j}(0\,;1)$, donc $\vec{u}\cdot\vec{i}=(-7)\times 1+4\times 0=-7$ et $\vec{u}\cdot\vec{j}=(-7)\times 0+4\times 1=4$: on retrouve les coordonnées de $\vec{u}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : orthogonalité et perpendicularité**

(a) Produit scalaire : $4\times(-6)+(-6)\times 9=-24-54=-78\neq 0$, donc ils ne sont pas orthogonaux.
Déterminant : $4\times 9-(-6)\times(-6)=36-36=0$, donc ils sont colinéaires. Il ne faut pas confondre les deux critères.

(b) Le repère est orthonormé : $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3)\times 8+7\times 3=-24+21=-3\neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

(c) $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(2\,;-3)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=3\times 2+2\times(-3)=0$: ces vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

(d) $\overrightarrow{AB}(4\,;5)$. Le vecteur $\vec{w}(-5\,;4)$ convient, car $4\times(-5)+5\times 4=0$: toute droite dirigée par $\vec{w}$ est perpendiculaire à (AB).

Ex. 24 ★★☆ **Trois copies à corriger**

(a) Tom a calculé $xy'+x'y$, comme pour un déterminant. Le repère est orthonormé, donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=3\times 4+(-2)\times 6=12-12=0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(b) Le repère n'est pas orthonormé ($\|\vec{j}\|=2$), donc on ne peut pas utiliser $xx'+yy'$. Par bilinéarité, avec $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ et $\vec{j}\cdot\vec{j}=4$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\vec{j})\cdot(-\vec{i}+2\vec{j})=-2\times 1+2\times 4=6\neq 0$, donc ils ne sont pas orthogonaux.

(c) Yanis a fait départ moins arrivée pour $\overrightarrow{AB}$. En faisant arrivée moins départ : $\overrightarrow{AB}(4-0\,;-4-(-1))$, soit $\overrightarrow{AB}(4\,;-3)$, et $\overrightarrow{AC}(2\,;3)$. Le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 2+(-3)\times 3=8-9=-1<0$: l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

Ex. 25 ★★☆ **Le terrain de Sacha**

(a) Le repère est orthonormé. En A : $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$, $\overrightarrow{AC}(4\,;8)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24+16=40\neq 0$. En C : $\overrightarrow{CA}(-4\,;-8)$, $\overrightarrow{CB}(2\,;-6)$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-8+48=40\neq 0$. En B : $\overrightarrow{BA}(-6\,;-2)$, $\overrightarrow{BC}(-2\,;6)$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12-12=0$. Donc ABC est rectangle en B.

(b) $AB=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$. Avec le cosinus : $\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{40}{2\sqrt{10}\times 4\sqrt{5}}=\frac{40}{40\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. C'est une valeur remarquable : $\widehat{BAC}=45°$.

Ex. 25 **(suite)**

(c) Le triangle ABD est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, avec $\overrightarrow{AD}(m+2\,;m+1)$: $6(m+2)+2(m+1)=8m+14=0$, donc $m=-\frac{7}{4}$.

(d) $\vec{u}\perp\vec{v}\iff m(m+3)+4\times(-1)=0\iff m^2+3m-4=0$. On a $\Delta=9+16=25$, d'où $m=\frac{-3-5}{2}=-4$ ou $m=\frac{-3+5}{2}=1$.

Ex. 26 ★★★ **La pince du bras robotisé**

(a) Coordonnées : arrivée − départ. $\overrightarrow{AB}(3-(-1)\,;1-3)$, soit $\overrightarrow{AB}(4\,;-2)$, et $\overrightarrow{AC}(m+1\,;5-3)$, soit $\overrightarrow{AC}(m+1\,;2)$. Le repère est orthonormé, donc $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

(b) Léo a calculé $xy'+x'y$: c'est une confusion avec le déterminant de colinéarité, pas un produit scalaire. D'ailleurs, pour $m=3$, on a $\overrightarrow{AC}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 4+(-2)\times 2=12\neq 0$. Le repère est orthonormé, donc ABC est rectangle en $A\iff\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$\iff 4(m+1)+(-2)\times 2=0\iff 4m=0$
$\iff m=0$.

(c) On prend les vecteurs issus de B : $\overrightarrow{BA}(-4\,;2)$ et $\overrightarrow{BC}(m-3\,;4)$. Le triangle ABC est rectangle en B
$\iff\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\iff -4(m-3)+2\times 4=0$
$\iff -4m+20=0\iff m=5$.

(d) On prend les vecteurs issus de C : $\overrightarrow{CA}(-1-m\,;-2)$ et $\overrightarrow{CB}(3-m\,;-4)$. On a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-1-m)(3-m)+(-2)\times(-4)=m^2-2m-3+8=m^2-2m+5$. Le discriminant vaut $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 5=-16<0$: l'équation $m^2-2m+5=0$ n'a pas de solution.
Donc aucune valeur de m ne rend ABC rectangle en C.

(e) L'alignement est une question de colinéarité : on utilise le déterminant, pas le produit scalaire (un produit scalaire nul traduit l'orthogonalité). A, B, C sont alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\iff 4\times 2-(-2)(m+1)=0\iff 2m+10=0\iff m=-5$.

Ex. 27 ★★★ **Le motif de carrelage de Nina**

(a) La formule $xx'+yy'$ n'est valable que dans un repère orthonormé. Ici, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos 45°=10\times 10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=100\neq 0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux. De plus, $AC=10\sqrt{2}\neq AB$. Le calcul de Nina ne donne donc pas $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}$: on ne peut rien conclure.

Ex. 27 **(suite)**

(b) $\|\vec{i}\| = \frac{10}{10} = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$ car $(AB) \perp (AD)$ dans le carré : le repère est orthonormé. $B(10\,;0)$, $C(10\,;10)$, $D(0\,;10)$, donc $I(10\,;5)$ et $J(5\,;10)$ (milieux). Arrivée − départ : $\overrightarrow{AI}(10\,;5)$ et $\overrightarrow{BJ}(5-10\,;10-0)$, soit $\overrightarrow{BJ}(-5\,;10)$.

(c) Le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 10 \times (-5) + 5 \times 10 = -50 + 50 = 0$. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux, donc les droites (AI) et (BJ) sont perpendiculaires. On pouvait le prévoir : $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées $(a\,;b) = (10\,;5)$ et $\overrightarrow{BJ}$ a pour coordonnées $(-b\,;a) = (-5\,;10)$. Ces deux vecteurs sont toujours orthogonaux.

(d) $AI = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ cm. On prend les vecteurs issus de A : $\overrightarrow{AB}(10\,;0)$ et $\overrightarrow{AI}(10\,;5)$, avec $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 10 \times 10 + 0 \times 5 = 100$.
Donc $\cos\widehat{BAI} = \frac{100}{10 \times 5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. À la calculatrice, $\widehat{BAI} \approx 27°$.

Ex. 28 ★★★ **Le vitrail de Malik**

(a) $\overrightarrow{AB}(5\,;0)$ et $\overrightarrow{DC}(5-0\,;5-5)$, soit $\overrightarrow{DC}(5\,;0)$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ est un parallélogramme. Ensuite, $\overrightarrow{AC}(8\,;4)$ et $\overrightarrow{BD}(0-2\,;5-1)$, soit $\overrightarrow{BD}(-2\,;4)$. Le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 8 \times (-2) + 4 \times 4 = 0$: les diagonales sont perpendiculaires. C'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, donc $ABCD$ est un losange.

(b) $\overrightarrow{AD}(3\,;4)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times 3 + 0 \times 4 = 15$. On a $AB = 5$ et $AD = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
Donc $\cos\widehat{DAB} = \frac{15}{5 \times 5} = \frac{3}{5}$, et $\widehat{DAB} \approx 53{,}1°$.

(c) Pour l'angle en B, il faut deux vecteurs issus de B. Lina a pris $\overrightarrow{AB}$, qui arrive en B : son calcul donne l'angle extérieur. On calcule $\overrightarrow{BA}(-5\,;0)$ et $\overrightarrow{BD}(-2\,;4)$: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-5) \times (-2) + 0 \times 4 = 10 > 0$, donc l'angle $\widehat{ABD}$ est aigu. Avec $BD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: $\cos\widehat{ABD} = \frac{10}{5 \times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, et $\widehat{ABD} \approx 63{,}4°$.

(d) Le repère est orthonormé et $\overrightarrow{AC}(8\,;4)$. $\vec{w} \perp \overrightarrow{AC} \iff 8x + 4y = 0 \iff y = -2x$. Alors $\|\vec{w}\|^2 = x^2 + (-2x)^2 = 5x^2$, et $AC^2 = 8^2 + 4^2 = 80$.
Donc $5x^2 = 80 \iff x^2 = 16 \iff x = 4$ ou $x = -4$. Il y a deux vecteurs : $\vec{w}(4\,;-8)$ et $\vec{w}(-4\,;8)$ (on retrouve $(-b\,;a)$ et son opposé).

5. *Calculer un angle*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : du cosinus à l'angle**

(a) Avec le cosinus : $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-3\sqrt{6}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus. Comme $\theta \in [0° ; 180°]$, on a $\theta = 150°$.

(b) Le repère est orthonormé, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + 0 \times 3 = 6$; $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.
Donc $\cos\theta = \frac{6}{2 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\theta = 45°$.

(c) Le repère est orthonormé, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times (-1) + 1 \times 3 = -1$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{17}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$.
Donc $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{170}} = -\frac{\sqrt{170}}{170}$. Ce n'est pas une valeur remarquable. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus. À la calculatrice (mode degrés) : $\theta \approx 94{,}4°$.

(d) Avec le cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 60°$, donc $9 = 6 \times \|\vec{v}\| \times \frac{1}{2} = 3\|\vec{v}\|$, d'où $\|\vec{v}\| = 3$.

(e) Faux. Un angle géométrique est compris entre $0°$ et $180°$: il n'est jamais négatif. Sur cet intervalle, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ donne $\theta = 120°$, un angle obtus.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : l'angle en un sommet**

(a) $\overrightarrow{AB}(5\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;3)$. Le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + (-1) \times 3 = 10 - 3 = 7$.

(b) $AB = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$ et $AC = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

(c) Avec le cosinus : $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{7}{\sqrt{26} \times \sqrt{13}} = \frac{7}{13\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$, car $\sqrt{26} \times \sqrt{13} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$. À la calculatrice (mode degrés) : $\widehat{BAC} \approx 67{,}6°$.

(d) $\overrightarrow{BA}(-5\,;1)$, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -10 + 3 = -7$ et $\cos = -\frac{7\sqrt{2}}{26}$. Léo trouve donc environ $112{,}4°$. C'est l'angle extérieur ($180° - 67{,}6°$) : pour l'angle en A, il faut deux vecteurs issus de A, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Ex. 31 ★★☆ **Deux voiliers : angle de vecteurs, angle de droites**

(a) Le repère est orthonormé, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 1 \times 1 = -5$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$.
Donc $\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: l'angle est obtus, $\theta = 135°$.

(b) L'angle entre deux droites est compris entre $0°$ et $90°$. L'angle entre les vecteurs vaut $135°$, donc les droites forment un angle de $180° - 135° = 45°$.

(c) $d_3 \perp d_2$ si et seulement si $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $1 \times (-3) + m \times 1 = 0$, soit $m = 3$.

(d) Avec $\vec{w}(1\,;3)$: $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 + 3 = 5$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{10}$.
Donc $\cos = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les droites d_1 et d_3 forment un angle de $45°$.

Ex. 32 ★★☆ **Un terrain, trois méthodes pour un angle**

(a) Avec les coordonnées (repère orthonormé) : $\overrightarrow{AB}(6\,;0)$, $\overrightarrow{AC}(2\,;4)$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times2+0\times4=12$. Avec la projection : H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $H(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$. H et B sont du même côté de A, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH=6\times 2=12$.

(b) Un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 : Malik a oublié de diviser par les normes. $AB=6$ et $AC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, donc $\cos\widehat{BAC}=\frac{12}{6\times2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. À la calculatrice : $\widehat{BAC}\approx63{,}4°$.

(c) $\overrightarrow{BC}(-4\,;4)$, donc $BC^2=16+16=32$ et $BC=4\sqrt{2}$. Avec le théorème d'Al-Kashi : $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, soit $32=36+20-24\sqrt{5}\cos\widehat{BAC}$. Donc $\cos\widehat{BAC}=\frac{24}{24\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$: on retrouve le même résultat.

(d) $\overrightarrow{BA}(-6\,;0)$ et $\overrightarrow{BC}(-4\,;4)$: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=24$, donc $\cos\widehat{ABC}=\frac{24}{6\times4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{ABC}=45°$. Par la somme des angles : $\widehat{ACB}\approx180°-63{,}4°-45°\approx71{,}6°$. Contrôle : $\overrightarrow{CA}(-2\,;-4)$ et $\overrightarrow{CB}(4\,;-4)$, donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-8+16=8$ et $\cos\widehat{ACB}=\frac{8}{\sqrt{20}\times\sqrt{32}}=\frac{8}{8\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, d'où $\widehat{ACB}\approx71{,}6°$. Les deux méthodes concordent.

Ex. 33 ★★★ **Bras de robot : l'angle au coude**

(a) Le repère est orthonormé, donc on calcule avec les coordonnées. Les vecteurs issus du sommet C sont $\overrightarrow{CE}(-4\,;-1)$ et $\overrightarrow{CM}(3\,;5)$. $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CM}=(-4)\times3+(-1)\times5=-17$. $CE=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$ et $CM=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$. Avec le cosinus : $\cos\widehat{ECM}=\frac{-17}{\sqrt{17}\times\sqrt{34}}=\frac{-17}{17\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, car $\sqrt{17}\times\sqrt{34}=\sqrt{17^2\times2}=17\sqrt{2}$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus. Comme $\widehat{ECM}\in[0°\,;180°]$, on a $\widehat{ECM}=135°$.

(b) Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ ne part pas du sommet C : il fallait prendre $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{EC}$. Par bilinéarité, $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CM}=17$: le signe change. Lina a calculé l'angle entre $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire l'angle extérieur en C : $180°-135°=45°$. Ce n'est pas l'angle du bras.

Ex. 33 (suite)

(c) Angle en E : $\overrightarrow{EC}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{EM}(7\,;6)$, donc $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}=28+6=34$, avec $EC=\sqrt{17}$ et $EM=\sqrt{85}$. $\cos\widehat{CEM}=\frac{34}{\sqrt{17}\times\sqrt{85}}=\frac{34}{17\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. À la calculatrice (mode degrés) : $\widehat{CEM}\approx26{,}6°$. Angle en M : $\overrightarrow{MC}(-3\,;-5)$ et $\overrightarrow{ME}(-7\,;-6)$, donc $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME}=21+30=51$, avec $MC=\sqrt{34}$ et $ME=\sqrt{85}$. $\cos\widehat{EMC}=\frac{51}{\sqrt{34}\times\sqrt{85}}=\frac{51}{17\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, donc $\widehat{EMC}\approx18{,}4°$.

(d) $135°+26{,}6°+18{,}4°=180°$: on retrouve la somme des angles d'un triangle, donc les trois résultats sont cohérents. Avec les $45°$ de Lina, la somme ferait $90°$: ce contrôle aurait révélé son erreur.

Ex. 34 ★★★ **Étagère en trapèze : l'angle des diagonales**

(a) Le repère est orthonormé. On a $\overrightarrow{AC}(2\,;h)$ et $\overrightarrow{BD}(0-8\,;h-0)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BD}(-8\,;h)$. Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times(-8)+h\times h=h^2-16$.

(b) $(AC)\perp(BD)$ si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $h^2-16=0$, soit $h=4$ ou $h=-4$. Comme $h>0$, les diagonales sont perpendiculaires si et seulement si $h=4$, soit une hauteur de 4 dm.

(c) On a $\overrightarrow{AC}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{BD}(-8\,;2)$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2^2-16=-12$. $AC=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $BD=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$. $\cos\theta=\frac{-12}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{17}}=\frac{-12}{4\sqrt{34}}=-\frac{3}{\sqrt{34}}=-\frac{3\sqrt{34}}{34}$. Ce n'est pas une valeur remarquable : à la calculatrice (mode degrés), $\theta\approx121{,}0°$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus, et non « négatif ».

(d) Faux. L'angle entre deux droites est compris entre $0°$ et $90°$. Ici $\theta>90°$, donc l'angle entre (AC) et (BD) vaut $180°-\theta\approx59{,}0°$. On le retrouve avec $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}(8\,;-2)$, qui dirigent les mêmes droites : leur produit scalaire vaut $16-4=12$, il est positif.

(e) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas nuls, donc $\cos\theta$ a le même signe que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=h^2-16$. θ est aigu si et seulement si $h^2>16$, soit $h>4$ puisque $h>0$. θ est obtus si et seulement si $0<h<4$. Pour $h=4$, on a $\theta=90°$.

Ex. 35 ★★★ **Deux poussées : un angle sans coordonnées**

(a) Par bilinéarité et symétrie : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ (il ne faut pas oublier le double produit). Donc $49=25+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+9$, d'où $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{49-34}{2}=\frac{15}{2}$.

Ex. 35 (suite)

(b) Avec le cosinus : $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{15/2}{5\times 3} = \frac{1}{2}$. Comme $\theta \in [0° ; 180°]$, on a $\theta = 60°$.

(c) Noé a oublié la norme $\|\vec{u}\|$ au dénominateur. Par bilinéarité, $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} = 25 + \frac{15}{2} = \frac{65}{2}$. Son quotient vaut donc $\frac{65}{14} > 1$, alors qu'un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 : la calculatrice ne peut pas trouver d'angle. Le bon calcul : $\cos\beta = \frac{65/2}{5\times 7} = \frac{13}{14}$, donc $\beta \approx 21{,}8°$.

(d) Dans le triangle OAS, on a $OA = 5$, $AS = \|\vec{v}\| = 3$, $OS = \|\vec{u}+\vec{v}\| = 7$ et $\widehat{AOS} = \beta$. D'après le théorème d'Al-Kashi : $AS^2 = OA^2 + OS^2 - 2\times OA\times OS\times \cos\beta$, donc $\cos\beta = \frac{25+49-9}{2\times 5\times 7} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$: on retrouve le même résultat. De même, $\cos\widehat{OAS} = \frac{25+9-49}{2\times 5\times 3} = -\frac{1}{2}$, donc $\widehat{OAS} = 120°$. Les vecteurs issus de A sont $\overrightarrow{AO} = -\vec{u}$ et $\overrightarrow{AS} = \vec{v}$: l'angle en A vaut donc $180° - \theta$, et non θ.

(e) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 25 - 15 + 9 = 19$, donc $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{19}$. D'autre part, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 25 - 9 = 16$.
Donc $\cos\alpha = \frac{16}{7\times\sqrt{19}} = \frac{16\sqrt{19}}{133}$, et à la calculatrice $\alpha \approx 58{,}4°$.

6. *Théorème d'Al-Kashi*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : le troisième côté**

(a) L'angle $\widehat{A}$ est compris entre AB et AC. Avec le théorème d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{A} = 49 + 225 - 2\times 7\times 15\times\frac{1}{2} = 274 - 105 = 169$. Une longueur est positive, donc $BC = 13$.

(b) Le côté opposé à $\widehat{D}$ est EF : $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2\times DE\times DF\times\cos 120° = 25 + 16 - 2\times 5\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 41 + 20 = 61$. L'angle est obtus, donc le terme devient positif.
Donc $EF = \sqrt{61}$.

(c) Le côté opposé à $\widehat{K}$ est LM. $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2\times KL\times KM\times\cos\frac{\pi}{4} = 36 + 2 - 2\times 6\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 38 - 12 = 26$, donc $LM = \sqrt{26}$.

(d) L'angle $\widehat{S}$ est compris entre SR et ST, donc on calcule le côté opposé RT : $RT^2 = 3 + 25 - 2\times\sqrt{3}\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 28 - 15 = 13$, donc $RT = \sqrt{13}$.

Ex. 37 ★★☆ **Automatismes : un angle et sa nature à partir des trois côtés**

(a) $a = BC = 7$ est opposé à $\widehat{A}$: $\cos\widehat{A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC} = \frac{16+36-49}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$. À la calculatrice, $\widehat{A} \approx 86{,}4°$. Le cosinus est positif, donc l'angle est aigu, même s'il est proche de 90°.

(b) $QR = \sqrt{31}$ est opposé à $\widehat{P}$: $\cos\widehat{P} = \frac{PQ^2+PR^2-QR^2}{2\times PQ\times PR} = \frac{3+16-31}{2\times\sqrt{3}\times 4} = \frac{-12}{8\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus : $\widehat{P} = \frac{5\pi}{6}$.

(c) $UV^2 + UW^2 - VW^2 = 81 + 144 - 225 = 0$.
Donc $\cos\widehat{U} = 0$: l'angle $\widehat{U}$ est droit (on retrouve le théorème de Pythagore), le triangle est rectangle en U.

(d) Seul l'angle opposé au plus grand côté, 10, peut être obtus. On calcule $6^2 + 7^2 - 10^2 = 36 + 49 - 100 = -15 < 0$, donc son cosinus est négatif : cet angle est obtus.

Ex. 38 ★★☆ **Démonstration d'Al-Kashi et erreur de Noé**

(a) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Par bilinéarité et symétrie : $BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AB^2$.

(b) Avec le cosinus : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{A} = cb\cos\widehat{A}$.
Donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. Si $\widehat{A} = 90°$, $\cos\widehat{A} = 0$ et $a^2 = b^2 + c^2$: c'est le théorème de Pythagore.

(c) Erreur 1 : l'angle est obtus, donc $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le terme devient positif. Erreur 2 : Noé a oublié de prendre la racine carrée. Correction : $BC^2 = 9 + 32 + 2\times 3\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 41 + 24 = 65$, donc $BC = \sqrt{65}$.

Ex. 39 ★★☆ **Navigation entre deux îles**

(a) L'angle $\widehat{P}$ est compris entre PI et PJ. Avec le théorème d'Al-Kashi : $IJ^2 = 18^2 + 25^2 - 2\times 18\times 25\times\cos 40° = 949 - 900\cos 40° \approx 259{,}56$, donc $IJ \approx 16{,}1$ km.

(b) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\times PI\times PJ\times\sin\widehat{P} = \frac{1}{2}\times 18\times 25\times\sin 40° = 225\sin 40° \approx 145$ km².

(c) $PJ = 25$ est opposé à $\hat{I}$: $\cos\widehat{PIJ} = \frac{PI^2+IJ^2-PJ^2}{2\times PI\times IJ} \approx \frac{324+259{,}56-625}{2\times 18\times 16{,}111} \approx -0{,}071$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est obtus : $\widehat{PIJ} \approx 94°$.

Ex. 40 ★★★ **L'angle connu n'est pas compris : deux triangles possibles**

(a) L'angle de $60°$ est au sommet A : il est compris entre $[AB]$ et $[AC]$, pas entre les côtés de longueurs 8 et 7, qui sont $[AB]$ et $[BC]$. Une formule avec 8 et 7 demande l'angle $\widehat{ABC}$, qu'on ne connaît pas. Le calcul d'Inès est donc faux : il donnerait $AC^2 = 57$.

(b) Le côté opposé à $\widehat{A}$ est BC, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{A}$. On remplace : $49 = 64 + x^2 - 2 \times 8 \times x \times \frac{1}{2} = x^2 - 8x + 64$.
Donc $x^2 - 8x + 15 = 0$.

(c) $\Delta = 64 - 60 = 4$, donc $x = \frac{8-2}{2} = 3$ ou $x = \frac{8+2}{2} = 5$. Les deux valeurs sont positives, donc deux triangles conviennent : ABC avec $AC = 3$ et ABD avec $AD = 5$. Le cercle coupe la demi-droite $[AE)$ en deux points.

(d) Dans chaque triangle, le plus grand côté est $AB = 8$. Seul l'angle opposé à ce côté peut être obtus. Triangle ABC : $\cos\widehat{ACB} = \frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2\times CA\times CB} = \frac{9+49-64}{42} = -\frac{1}{7} < 0$, donc l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus. Triangle ABD : $\cos\widehat{ADB} = \frac{25+49-64}{70} = \frac{1}{7} > 0$, donc l'angle $\widehat{ADB}$ est aigu, et les trois angles de ABD sont aigus.

(e) Avec $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin\widehat{A}$ et $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$: aire de $ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$; aire de $ABD = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Ex. 41 ★★★ **Bras articulé de robot**

(a) Avec le théorème d'Al-Kashi en A (le côté opposé est OP) : $OP^2 = OA^2 + AP^2 - 2 \times OA \times AP \times \cos\widehat{OAP} = 900 + 400 - 1200 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1300 + 600 = 1900$. L'angle est obtus, donc son cosinus est négatif et le terme $-2bc\cos\widehat{A}$ s'ajoute.
Donc $OP = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19} \approx 43{,}6$ cm. N'oublie pas la racine : OP ne vaut pas 1900.

(b) $40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos\widehat{OAP}$, soit $1600 = 1300 - 1200\cos\widehat{OAP}$.
Donc $\cos\widehat{OAP} = \frac{1300-1600}{1200} = -\frac{1}{4}$. À la calculatrice, $\widehat{OAP} \approx 104{,}5°$: l'angle est obtus.

(c) Trois côtés connus ; le côté opposé à $\widehat{AOP}$ est AP : $\cos\widehat{AOP} = \frac{OA^2+OP^2-AP^2}{2\times OA\times OP} = \frac{900+1600-400}{2\times 30\times 40} = \frac{2100}{2400} = \frac{7}{8}$. Le cosinus est positif, donc l'angle est aigu : $\widehat{AOP} \approx 29{,}0°$.

(d) $OP^2 = 1300 - 1200\cos\widehat{OAP}$. Comme l'angle est strictement compris entre $0°$ et $180°$, on a $\cos\widehat{OAP} > -1$, donc $-1200\cos\widehat{OAP} < 1200$ et $OP^2 < 1300 + 1200 = 2500$. Comme $OP > 0$, on obtient $OP < \sqrt{2500}$, c'est-à-dire $OP < 50$ cm.

Ex. 41 (suite)

(e) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OA \times AP \times \sin\widehat{OAP} = \frac{1}{2} \times 30 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3} \approx 259{,}8$ cm².

Ex. 42 ★★★ **Le terrain de Malik**

(a) Le côté opposé à $\widehat{A}$ est BD : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos 90° = 1600 + 900 - 0 = 2500$, donc $BD = 50$ m. Comme $\cos 90° = 0$, on retrouve le théorème de Pythagore.

(b) Vrai. D'après la question 1, $BD = 50$ m ; de plus, $BC = 30$ m et $CD = 70$ m. Le plus grand côté du triangle BCD est donc $[CD]$. Seul l'angle opposé au plus grand côté peut être obtus, et l'angle opposé à $[CD]$ est $\widehat{CBD}$. Malik a donc raison.

(c) Trois côtés connus. Le côté opposé à $\widehat{CBD}$ est CD, donc $\cos\widehat{CBD} = \frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2\times BC\times BD} = \frac{900+2500-4900}{3000} = -\frac{1}{2}$. Le signe est négatif, donc l'angle est obtus : $\widehat{CBD} = 120°$.

(d) Aire de ABD (rectangle en A) : $\frac{1}{2} \times 40 \times 30 = 600$ m². Aire de BCD : $\frac{1}{2} \times BC \times BD \times \sin 120° = \frac{1}{2} \times 30 \times 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 375\sqrt{3}$ m².
Donc l'aire de la parcelle vaut $600 + 375\sqrt{3} \approx 1250$ m².

7. *Ensemble des points M tels que $MA \cdot MB = k$*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : lire l'ensemble selon la valeur de k**

(a) I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - 9$. Ainsi $MI^2 = 7 + 9 = 16$, d'où $MI = 4$: c'est le cercle de centre I et de rayon 4.

(b) $MI^2 = -9 + 9 = 0$, donc $MI = 0$ et $M = I$: l'ensemble est réduit au point I.

(c) $MI^2 = -12 + 9 = -3 < 0$: c'est impossible, car un carré est positif. L'ensemble est vide.

(d) $MI^2 = 3 + 9 = 12$, donc $MI = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$: c'est le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{3}$.

(e) $MI^2 = 0 + 9 = 9$, donc $MI = 3$: c'est le cercle de diamètre $[AB]$, de centre I et de rayon $\frac{AB}{2} = 3$ (et non 6).

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : le cercle de diamètre [AB] en coordonnées**

(a) I est le milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{0+4}{2} ; \frac{3+(-1)}{2}\right)$, soit $I(2\,;1)$. Le repère est orthonormé, donc $AB = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Le rayon vaut $\frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$.

Ex. 44 **(suite)**

(b) $\overrightarrow{MA}(-4\,;0)$ et $\overrightarrow{MB}(0\,;-4)$. Le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(-4)\times 0+0\times(-4)=0$. D'après le théorème, $M\in\mathcal{C}$. Comme $M\neq A$ et $M\neq B$, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit : le triangle AMB est rectangle en M.

(c) $\overrightarrow{NA}(-3\,;0)$ et $\overrightarrow{NB}(1\,;-4)$, donc $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(-3)\times 1+0\times(-4)=-3\neq 0$.
Donc $N\notin\mathcal{C}$.

(d) $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, donc $\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (convention avec le vecteur nul).
Donc $A\in\mathcal{C}$: les points A et B font partie du cercle de diamètre $[AB]$.

(e) Vrai. La formule $xx'+yy'$ n'est valable que dans un repère orthonormé. Le théorème « $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\iff M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$ » suffit à conclure : on n'a pas besoin d'équation de cercle, qui relève du chapitre Géométrie repérée.

Ex. 45 ★★☆ **Démonstration exigible : transformer MA · MB**

(a) Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$. Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, donc $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$.

(b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$. Par bilinéarité, on applique l'identité $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$, ce qui donne MI^2-IA^2.

(c) $IA=\frac{AB}{2}$, donc $IA^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}$ (et non $\frac{AB}{4}$). Donc, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$.

(d) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\iff MI^2=\frac{AB^2}{4}\iff MI=\frac{AB}{2}$, car des longueurs sont positives. C'est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Ex. 46 ★★☆ **Bras de robot : l'erreur de Lina et le choix de k**

(a) Lina a écrit $\frac{AB}{4}$ au lieu de $\frac{AB^2}{4}$. Or $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}=MI^2-25$.
Donc $MI^2=-16+25=9$ et $MI=3$: c'est le cercle de centre I et de rayon 3 cm.

(b) L'ensemble est réduit au point I si et seulement si $MI^2=k+25=0$, soit $k=-25$.

(c) Il faut $MI^2=(2\sqrt{5})^2=20$, donc $k+25=20$, soit $k=-5$.

(d) L'ensemble est vide si et seulement si $k+25<0$ (un carré ne peut pas être négatif), c'est-à-dire si $k<-25$.

Ex. 47 ★★★ **Navigation : deux balises et un voilier**

(a) Le repère est orthonormé, donc on peut utiliser $xx'+yy'$. $\overrightarrow{CA}(-4\,;2)$ et $\overrightarrow{CB}(2\,;4)$, donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-4)\times 2+2\times 4=0$. D'après le théorème, C appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Comme C est distinct de A et de B, l'angle $\widehat{ACB}$ est droit : le triangle ABC est rectangle en C.

(b) I est le milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{-2+4}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right)$, soit $I(1\,;2)$. $AB=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. Le rayon vaut $\frac{AB}{2}=\sqrt{10}$
(et non AB).

(c) $\overrightarrow{EA}(-5\,;-4)$ et $\overrightarrow{EB}(1\,;-2)$, donc $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=(-5)\times 1+(-4)\times(-2)=3$. Vérification : $EI^2=2^2+3^2=13$ et $\frac{AB^2}{4}=\frac{40}{4}=10$, donc $EI^2-\frac{AB^2}{4}=13-10=3$: c'est bien le même résultat.

(d) Pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-10$.
Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3\iff MI^2=13\iff MI=\sqrt{13}$ (une longueur est positive). Γ est le cercle de centre $I(1\,;2)$ et de rayon $\sqrt{13}$ (il passe par E). C n'est pas sur Γ : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0\neq 3$.

(e) Le repère est orthonormé : $EA=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$ et $EB=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$. Avec le cosinus : $\cos\widehat{AEB}=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}}{EA\times EB}=\frac{3}{\sqrt{41}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{205}}$, donc $\widehat{AEB}\approx 77{,}9°$. L'angle est aigu, ce qui est cohérent avec un produit scalaire positif.

Ex. 48 ★★★ **Terrain de sport : angles vus depuis deux poteaux**

(a) Avec le cosinus : $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=SA\times SB\times\cos 90°=0$. Or $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=SI^2-\frac{AB^2}{4}=SI^2-\frac{144}{4}=SI^2-36$ (et non $\frac{12}{4}$).
Donc $SI^2=36$ et $SI=6$ m (une longueur est positive) : S est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

(b) Faux. Pour $M=A$, $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, donc $\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (convention avec le vecteur nul) ; de même pour $M=B$. Et $IA=IB=6$: A et B sont sur le cercle de diamètre $[AB]$. L'angle droit ne se lit que pour M distinct de A et de B.

(c) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PI^2-36=25-36=-11$. Le produit scalaire est négatif et P est distinct de A et de B, donc $\cos\widehat{APB}<0$: l'angle $\widehat{APB}$ est obtus
(P est à l'intérieur du cercle de diamètre $[AB]$).

Ex. 48 **(suite)**

(d) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=28 \iff MI^2=28+36=64 \iff MI=8$: c'est le cercle de centre I et de rayon 8. Pour un tel point, $MI=8\neq 6$, donc M est distinct de A et de B ; le produit scalaire vaut $28>0$, donc $\cos\widehat{AMB}>0$: l'angle $\widehat{AMB}$ est aigu.

(e) $\overrightarrow{RA}-\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{BA}$, donc $AB^2=RA^2+RB^2-2\,\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}=\frac{1}{2}(8^2+10^2-12^2)=10$. Puis $RI^2=10+36=46$, donc $RI=\sqrt{46}$ m.

Ex. 49 ★★★ **Ferme de pont : un demi-hexagone**

(a) Les coordonnées de Nora sont justes ($\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{BC}$), mais la formule $xx'+yy'$ n'est valable qu'en repère orthonormé : ici $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux. Par bilinéarité, avec $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}\cdot(2\,\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})=AB^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$ et $\widehat{BAO}=60^\circ$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=7\times 7\times\cos 60^\circ=24{,}5$. D'où $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=49-49=0$: l'angle $\widehat{ABD}$ est droit.

(b) OCD est équilatéral, donc $OC=7$. Alors $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=OC^2-\frac{14^2}{4}=49-49=0$: C appartient au cercle de diamètre $[AD]$. Comme C est distinct de A et de D, l'angle $\widehat{ACD}$ est droit : le triangle ACD est rectangle en C.

(c) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}=k \iff MO^2=k+49$. L'ensemble est réduit à un point si et seulement si $k+49=0$, soit $k=-49$: c'est le point O. Pour $k=-60$: $MO^2=-11<0$, impossible ; l'ensemble est vide.

(d) K est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle équilatéral OBC de côté 7 : par Pythagore, $OK^2=7^2-3{,}5^2=\frac{147}{4}$, soit $OK=\frac{7\sqrt{3}}{2}$. Il faut $k=\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KD}=\frac{147}{4}-49=-\frac{49}{4}$. L'ensemble est alors le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{-\frac{49}{4}+49}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ m.