Produit scalaire, orthogonalité – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Produit scalaire dans l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Dans l'espace : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$; n'oublie pas la cote.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$: la racine, et $(-a)^2 = a^2$.
- Un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un vecteur est nul : les vecteurs sont orthogonaux.
- Vecteur normal à un plan : orthogonal à DEUX vecteurs non colinéaires du plan.
- Pour un angle de sommet P, les deux vecteurs partent de P.
- Des droites orthogonales ne sont pas forcément perpendiculaires : il faut en plus un point commun.

Exercice 1 – Produit scalaire en coordonnées ★

Le repère est orthonormé. Calcule avec $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

a) $\vec{u}\,(3\,;\,-2\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(1\,;\,4\,;\,6)$

b) $\vec{u}\,(-1\,;\,5\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,-3\,;\,-4)$

c) $\vec{u}\,(4\,;\,0\,;\,-3)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,7\,;\,1)$

d) $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(1\,;\,5\,;\,1)$

e) $\vec{u}\,(\dfrac{1}{2}\,;\,-3\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(6\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,2)$

f) $\vec{u}\,(\sqrt{2}\,;\,1\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(\sqrt{2}\,;\,3\,;\,2)$

g) $A(2\,;\,-1\,;\,0)$, $B(4\,;\,1\,;\,-3)$ et $C(-1\,;\,0\,;\,2)$: calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

h) $\vec{w}\,(3\,;\,-4\,;\,1)$: calcule $\vec{w}\cdot\vec{w}$.

Exercice 2 – Normes et distances ★

Le repère est orthonormé. Donne le résultat sous forme simplifiée ($\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

a) $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,2)$: calcule $\|\vec{u}\|$.

b) $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$: calcule $\|\vec{u}\|$.

c) $\vec{u}\,(0\,;\,4\,;\,-4)$: calcule $\|\vec{u}\|$.

d) $\vec{u}\,(-6\,;\,3\,;\,0)$: calcule $\|\vec{u}\|$.

e) $\vec{u}\,(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\,;\,1)$: calcule $\|\vec{u}\|$.

f) $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,-2\,;\,3)$: calcule la distance AB.

g) $C(0\,;\,-1\,;\,2)$ et $D(3\,;\,1\,;\,-1)$: calcule la distance CD.

h) Montre que $M(1\,;\,1\,;\,1)$ est à la même distance de $A(3\,;\,1\,;\,-1)$ et de $B(-1\,;\,3\,;\,1)$.

Exercice 3 – Vecteurs et droites orthogonaux ★

Le repère est orthonormé. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

a) $\vec{u}\,(1\,;\,4\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,-1\,;\,1)$

b) $\vec{u}\,(0\,;\,2\,;\,5)$ et $\vec{v}\,(7\,;\,-5\,;\,2)$

c) $\vec{u}\,(\dfrac{1}{2}\,;\,3\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,-1\,;\,-1)$

d) $\vec{u}\,(m\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,m\,;\,4)$: trouve m pour qu'ils soient orthogonaux.

e) $\vec{u}\,(1\,;\,m\,;\,m)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,-3\,;\,2)$: pour quelles valeurs de m sont-ils orthogonaux ?

f) $\vec{u}\,(m\,;\,1\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,-5\,;\,2)$: trouve m pour qu'ils soient orthogonaux.

g) $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,0\,;\,0)$: sont-ils orthogonaux ?

h) $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(3\,;\,1\,;\,1)$, $C(0\,;\,2\,;\,-1)$ et $D(1\,;\,0\,;\,-1)$: les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?

Exercice 4 – Angle de deux vecteurs ★★

Le repère est orthonormé. Calcule le cosinus avec $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$, puis l'angle (calculatrice autorisée, arrondi au dixième de degré).

a) $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,0\,;\,2)$

b) $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$

c) $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,3\,;\,4)$

d) $A(1\,;\,0\,;\,1)$, $B(2\,;\,2\,;\,3)$, $C(3\,;\,1\,;\,-1)$: l'angle $\widehat{BAC}$.

e) $A(0\,;\,1\,;\,2)$, $B(1\,;\,1\,;\,1)$, $C(2\,;\,3\,;\,1)$: l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice 5 – Produit scalaire dans un cube ★★

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Calcule sans coordonnées (projeté orthogonal ou relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

b) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CG}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GH}$

d) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BG}$

e) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC}$

Exercice 6 – Vecteur normal à un plan ★★

Le repère est orthonormé. Un vecteur non nul est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

a) $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,-1)$ et le plan dirigé par $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,0)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$: $\vec{n}$ est-il normal au plan ?

b) $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$, $C(0\,;\,0\,;\,3)$ et $\vec{n}\,(6\,;\,3\,;\,2)$: $\vec{n}$ est-il normal au plan (ABC) ?

c) $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ et le plan dirigé par $\vec{u}\,(1\,;\,-1\,;\,0)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,0\,;\,1)$: $\vec{n}$ est-il normal au plan ?

d) Trouve a et b pour que $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,1)$ soit normal au plan dirigé par $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,-3)$.

e) $A(0\,;\,1\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,0)$, $C(0\,;\,2\,;\,2)$ et $d : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$: montre que d est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 7 – Le tétraèdre ABCD ★★★

Dans un repère orthonormé, on considère $A(1\,;\,2\,;\,0)$, $B(3\,;\,3\,;\,2)$, $C(-1\,;\,3\,;\,2)$ et $D(1\,;\,6\,;\,-2)$.

1. Calcule AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré (calculatrice).
3. Montre que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
4. Les droites (BC) et (AD) sont-elles orthogonales ? Et les droites (BD) et (AC) ?

Exercice 8 – Le cube et sa grande diagonale ★★★

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D), muni du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Donne les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.
2. Montre que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
3. Calcule une mesure de l'angle $\widehat{BAG}$, arrondie au dixième de degré (calculatrice).
4. Calcule $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EB}$, puis l'angle $\widehat{GEB}$ sans calculatrice. Que peux-tu dire du triangle GEB ?

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $\vec{u}\,(2\,;\,-3\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,1\,;\,5)$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 4 + (-3)\times 1 = 5$.

b) $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,2)$: $\|\vec{u}\| = 1 + 4 + 4 = 9$.

c) $\vec{u}\,(-2\,;\,4\,;\,4)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{-4+16+16} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

d) $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$, plan dirigé par $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(1\,;\,1\,;\,1)$: $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2 + 0 - 2 = 0$, donc $\vec{n}$ est normal au plan.

e) $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,-1\,;\,1)$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3 - 2 - 1 = 0$, donc l'un des deux vecteurs est nul.

f) $d : x = t, y = t, z = 0$ et $d' : x = s, y = -s, z = 1$ ont des vecteurs directeurs orthogonaux, donc d et d' sont perpendiculaires.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :

   A 0 **B** 3 **C** -3 **D** -7

2. $\vec{u}\,(2\,;\,-6\,;\,3)$. Alors $\|\vec{u}\|$ vaut :

   A 7 **B** 49 **C** 11 **D** $\sqrt{11}$

3. $\vec{u}\,(2\,;\,m\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,3\,;\,-5)$ sont orthogonaux pour :

   A $m = -1$ **B** $m = 5$ **C** $m = \dfrac{5}{2}$ **D** $m = 1$

4. $\vec{u}\,(0\,;\,3\,;\,4)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,0\,;\,1)$. Le cosinus de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ vaut :

   A 4 **B** $\dfrac{4}{5}$ **C** $\dfrac{4}{25}$ **D** $\dfrac{5}{4}$

5. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$, avec $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ ($\vec{n}$ non nul). Alors :

   A $\vec{n}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$ **B** $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{u}$ **C** on ne peut rien dire **D** $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$

6. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 ($ABCD$ en bas ; E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ vaut :

   A 9 **B** 0 **C** $3\sqrt{3}$ **D** 27

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).