Corrigé – Produit scalaire, orthogonalité

Mathématiques – Terminale spécialité

Produit scalaire dans l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Produit scalaire en coordonnées ★

Le repère est orthonormé. Calcule avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-2) \times 4 + 1 \times 6$
$= 3 - 8 + 6$
$= 1$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \times 2 + 5 \times (-3) + (-2) \times (-4)$
$= -2 - 15 + 8$
$= -9$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 2 + 0 \times 7 + (-3) \times 1$
$= 8 + 0 - 3$
$= 5$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times 1$
$= 2 - 5 + 3$
$= 0$

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2} \times 6 + (-3) \times \dfrac{1}{3} + 2 \times 2$
$= 3 - 1 + 4$
$= 6$

f) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 1 \times 3 + (-1) \times 2$
$= 2 + 3 - 2$
$= 3$

g) Arrivée moins départ : $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,2\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 2 \times 1 + (-3) \times 2$
$= -6 + 2 - 6$
$= -10$

h) $\vec{w} \cdot \vec{w} = 3 \times 3 + (-4) \times (-4) + 1 \times 1$
$= 9 + 16 + 1$
$= 26$

C'est le carré de la norme : $\|\vec{w}\|^2 = 26$, toujours positif.

Exercice 2 – Normes et distances ★

Le repère est orthonormé. Donne le résultat sous forme simplifiée ($\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$
$= \sqrt{4+1+4}$
$= \sqrt{9}$
$= 3$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}$
$= \sqrt{1+4+9}$
$= \sqrt{14}$

$(-2)^2 = 4$ *: le carré porte aussi sur le signe.*

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{0+16+16}$
$= \sqrt{32}$
$= 4\sqrt{2}$

On simplifie : $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$.

d) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 0^2}$
$= \sqrt{36+9+0}$
$= \sqrt{45}$
$= 3\sqrt{5}$

On simplifie : $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

e) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 1^2}$
$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}$
$= \sqrt{\frac{9}{4}}$
$= \frac{3}{2}$

f) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-4\,;\,4)$ (arrivée moins départ), et $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
$AB = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$
$= \sqrt{4+16+16}$
$= \sqrt{36}$
$= 6$

g) $\overrightarrow{CD}\,(3\,;\,2\,;\,-3)$ (arrivée moins départ), et $CD = \|\overrightarrow{CD}\|$.
$CD = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{9+4+9}$
$= \sqrt{22}$

h) $\overrightarrow{MA}\,(2\,;\,0\,;\,-2)$:

$$\begin{aligned} MA &= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 0 + 4} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{MB}\,(-2\,;\,2\,;\,0)$:

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{4 + 4 + 0} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$MA = MB$: M est équidistant de A et B.

Exercice 3 – Vecteurs et droites orthogonaux ★

Le repère est orthonormé. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 4 \times (-1) + (-2) \times 1$
$= 3 - 4 - 2$
$= -3$

$-3 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \times 7 + 2 \times (-5) + 5 \times 2$
$= 0 - 10 + 10$
$= 0$

Produit scalaire nul : les vecteurs sont orthogonaux.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2} \times 4 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-1)$
$= 2 - 3 + 1$
$= 0$

Produit scalaire nul : les vecteurs sont orthogonaux.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
$= m \times 3 + 2 \times m + (-1) \times 4$
$= 5m - 4$

On résout $5m - 4 = 0$: $5m = 4$, donc $m = \dfrac{4}{5}$.

e) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
$= 1 \times m + m \times (-3) + m \times 2$
$= m - 3m + 2m$
$= 0$

Le produit scalaire est nul pour tout réel m : les vecteurs sont toujours orthogonaux.

f) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
$= m^2 - 5 + 4$
$= m^2 - 1$

On résout $m^2 - 1 = 0$: $m^2 = 1$, donc $m = -1$ ou $m = 1$.

g) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 1 \times 0 + (-2) \times 0 = 0$.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur : oui.
Attention à la réciproque : un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un des vecteurs est nul (voir b et c).

h) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{CD}\,(1\,;\,-2\,;\,0)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times 0$
$= 2 - 2 + 0$
$= 0$

Les vecteurs directeurs sont orthogonaux : les droites sont orthogonales.
Orthogonales ne veut pas dire perpendiculaires : pour être perpendiculaires, il faudrait en plus qu'elles se coupent.

Exercice 4 – Angle de deux vecteurs ★★

Le repère est orthonormé. Calcule le cosinus avec $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, puis l'angle (calculatrice autorisée, arrondi au dixième de degré).

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 2$
$= 0 + 0 + 2$
$= 2$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}$
$= \sqrt{1 + 0 + 1}$
$= \sqrt{2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}$
$= \sqrt{0 + 0 + 4}$
$= \sqrt{4}$
$= 2$

$\cos\theta$
$= \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$
$= \dfrac{2}{\sqrt{2} \times 2}$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\theta = 45°$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times 1$
$= 0 + 0 - 1$
$= -1$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{1 + 0 + 1}$
$= \sqrt{2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{0 + 1 + 1}$
$= \sqrt{2}$

$\cos\theta$
$= \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$
$= \dfrac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$
$= -\dfrac{1}{2}$

Donc $\theta = 120°$.
Cosinus négatif : l'angle est obtus.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 1 \times 3 + (-2) \times 4$
$= 0 + 3 - 8$
$= -5$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{4 + 1 + 4}$
$= \sqrt{9}$
$= 3$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}$
$= \sqrt{0 + 9 + 16}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$

$\cos\theta$
$= \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$
$= \dfrac{-5}{3 \times 5}$
$= -\dfrac{1}{3}$

À la calculatrice : $\theta \approx 109{,}5°$.

d) L'angle est en A : on prend deux vecteurs qui partent de A, $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2\,;\,1\,;\,-2)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= 1\times 2+2\times 1+2\times(-2)\\ &= 2+2-4\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{1^2+2^2+2^2}\\ &= \sqrt{1+4+4}\\ &= \sqrt{9}\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\\ &= \sqrt{4+1+4}\\ &= \sqrt{9}\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\widehat{BAC} &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}\\ &= \frac{0}{3\times 3}\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\widehat{BAC}=90^\circ$.

Le triangle ABC est rectangle en A.

e) L'angle est en B : on prend $\overrightarrow{BA}\,(-1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BC}\,(1\,;\,2\,;\,0)$, qui partent de B.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= (-1)\times 1 + 0\times 2 + 1\times 0\\ &= -1+0+0\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{BA}\| &= \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\\ &= \sqrt{1+0+1}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{BC}\| &= \sqrt{1^2+2^2+0^2}\\ &= \sqrt{1+4+0}\\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\widehat{ABC} &= \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}\\ &= -\frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

À la calculatrice : $\widehat{ABC}\approx 108{,}4^\circ$.

Avec $\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\overrightarrow{BA}$, on trouverait l'angle supplémentaire, faux.

Exercice 5 – Produit scalaire dans un cube ★★

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Calcule sans coordonnées (projeté orthogonal ou relation de Chasles).

a) (BF) est orthogonale à la face $ABCD$, donc à (AB) : le projeté orthogonal de F sur (AB) est B.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= AB^2\\ &= 4^2\\ &= 16\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$ (arêtes verticales de même sens).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}\\ &= AE^2\\ &= 16\end{aligned}$$

c) $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{AB}$: même direction, sens contraire.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GH}$

$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= -AB^2$

$= -16$

Sens contraires : le produit scalaire est négatif.

d) Relation de Chasles : $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $(CG) \perp (AD)$.

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$

$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + 0$

$= AD^2$

$= 16$

e) Relation de Chasles : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

Les produits croisés sont nuls (arêtes orthogonales deux à deux), il reste les carrés :

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}$

$= AB^2 + AD^2 - AE^2$

$= 16 + 16 - 16$

$= 16$

Exercice 6 – Vecteur normal à un plan ★★

Le repère est orthonormé. Un vecteur non nul est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (abscisse nulle pour $\vec{v}$ seulement).

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + (-1) \times 0$

$= 2 - 2 + 0$

$= 0$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-1)$

$= 0 - 1 + 1$

$= 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : il est normal au plan.

b) $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;\,0\,;\,3)$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 6\times(-1)+3\times 2+2\times 0$
$\quad = -6+6+0$
$\quad = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times(-1)+3\times 0+2\times 3$
$\quad = -6+0+6$
$\quad = 0$

Deux produits scalaires nuls : $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

c) $\vec{n}\cdot\vec{u} = 1\times 1+1\times(-1)+1\times 0$
$\quad = 1-1+0$
$\quad = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 1\times 2+1\times 0+1\times 1$
$\quad = 2+0+1$
$\quad = 3$

$\vec{n}\cdot\vec{v}\neq 0$: $\vec{n}$ n'est pas normal au plan.
Le premier produit nul ne suffisait pas : il en faut deux.

d) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On écrit les deux conditions :
$\vec{n}\cdot\vec{u} = a+0+2 = 0$, donc $a=-2$.
$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0+b-3 = 0$, donc $b=3$.
Contrôle avec $\vec{n}\,(-2\,;\,3\,;\,1)$:
$\vec{n}\cdot\vec{u} = (-2)\times 1+3\times 0+1\times 2$
$\quad = -2+0+2$
$\quad = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = (-2)\times 0+3\times 1+1\times(-3)$
$\quad = 0+3-3$
$\quad = 0$

e) d est dirigée par $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ (les coefficients de t).
$\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 1+(-1)\times 1+1\times(-1)$
$\quad = 2-1-1$
$\quad = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0+(-1)\times 1+1\times 1$
$\quad = 0-1+1$
$\quad = 0$

Le vecteur directeur de d est normal au plan : d est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 7 – Le tétraèdre ABCD ★★★

1. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,1\,;\,2)$, $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;\,1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-4\,;\,0\,;\,0)$.
   $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$
   $= \sqrt{4 + 1 + 4}$
   $= \sqrt{9}$
   $= 3$

   $AC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}$
   $= \sqrt{4 + 1 + 4}$
   $= \sqrt{9}$
   $= 3$

   $BC = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}$
   $= \sqrt{16 + 0 + 0}$
   $= \sqrt{16}$
   $= 4$

   $AB = AC = 3$: le triangle ABC est isocèle en A (pas équilatéral, car $BC = 4$).

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 1 + 2 \times 2$
   $= -4 + 1 + 4$
   $= 1$

   $\cos \widehat{BAC}$
   $= \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$
   $= \dfrac{1}{3 \times 3}$
   $= \dfrac{1}{9}$

   À la calculatrice : $\widehat{BAC} \approx 83{,}6°$.

3. $\overrightarrow{AD}\,(0\,;\,4\,;\,-2)$.
   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (abscisses opposées, ordonnées égales).
   $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 4 \times 1 + (-2) \times 2$
   $= 0 + 4 - 4$
   $= 0$

   $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 4 \times 1 + (-2) \times 2$
   $= 0 + 4 - 4$
   $= 0$

   $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : la droite (AD) est orthogonale à ce plan.

4. (AD) est orthogonale au plan (ABC), donc à toute droite de ce plan, en particulier à (BC).
   Contrôle :
   $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = (-4) \times 0 + 0 \times 4 + 0 \times (-2)$
   $= 0 + 0 + 0$
   $= 0$

   $\overrightarrow{BD}\,(-2\,;\,3\,;\,-4)$:
   $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-2) + 3 \times 1 + (-4) \times 2$
   $= 4 + 3 - 8$
   $= -1$

   $-1 \neq 0$: les droites (BD) et (AC) ne sont pas orthogonales.

Exercice 8 – Le cube et sa grande diagonale ★★★

1. $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$.
   Arrivée moins départ : $\overrightarrow{AG}\,(1\,;\,1\,;\,1)$, $\overrightarrow{BD}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BE}\,(-1\,;\,0\,;\,1)$.

2. $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires (ordonnée nulle pour $\overrightarrow{BE}$ seulement).
   $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0$
   $= -1 + 1 + 0$
   $= 0$

   $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1$
   $= -1 + 0 + 1$
   $= 0$

   $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) : (AG) est orthogonale à ce plan.

3. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0$
   $= 1 + 0 + 0$
   $= 1$

   $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$
   $= \sqrt{1 + 1 + 1}$
   $= \sqrt{3}$

   $AB = 1$, donc :
   $\cos \widehat{BAG}$
   $= \dfrac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}}{AG \times AB}$
   $= \dfrac{1}{\sqrt{3} \times 1}$
   $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   À la calculatrice : $\widehat{BAG} \approx 54{,}7°$.

4. $\overrightarrow{EG}\,(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{EB}\,(1\,;\,0\,;\,-1)$.
$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EB} = 1\times 1 + 1\times 0 + 0\times(-1)$
$= 1 + 0 + 0$
$= 1$

$EG = \sqrt{1^2+1^2+0^2}$
$= \sqrt{1+1+0}$
$= \sqrt{2}$

$EB = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}$
$= \sqrt{1+0+1}$
$= \sqrt{2}$

$\cos\widehat{GEB}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$= \dfrac{1}{2}$

Donc $\widehat{GEB} = 60°$.
$EG = EB$ et l'angle au sommet vaut $60°$: le triangle GEB est équilatéral (ses côtés sont trois diagonales de faces).

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *La cote a été oubliée : dans l'espace, il y a trois produits.*
$\vec{u}\cdot\vec{v}$
$= 8 - 3 + 5$
$= 10$

b) $1+4+4$ *est le carré de la norme : il faut prendre la racine.*
$\|\vec{u}\|$
$= \sqrt{1+4+4}$
$= \sqrt{9}$
$= 3$

c) $(-2)^2 = 4$, *pas* -4 *: un carré n'est jamais négatif.*
$\|\vec{u}\|$
$= \sqrt{4+16+16}$
$= \sqrt{36}$
$= 6$

d) *Un seul produit scalaire nul ne suffit pas : il faut tester aussi* $\vec{v}$.
$\vec{n}\cdot\vec{v} = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$: $\vec{n}$ n'est pas normal au plan.

e) *Un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un vecteur est nul.*
Aucun des deux n'est nul : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

f) *Perpendiculaires veut dire orthogonales ET sécantes : il faut chercher un point commun.*
$(1\,;\,1\,;\,0)\cdot(1\,;\,-1\,;\,0) = 1-1+0 = 0$: les droites sont orthogonales.
Un point commun vérifierait $z=0$ et $z=1$: impossible.
Les droites sont orthogonales mais non coplanaires, donc pas perpendiculaires.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :

Réponse C : -3
$2-2-3=-3$ (sans la cote, on trouverait 0 à tort).

2. $\vec{u}\,(2\,;\,-6\,;\,3)$. Alors $\|\vec{u}\|$ vaut :

Réponse A : 7
$\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7$; 49 oublie la racine, 11 et $\sqrt{11}$ oublient les carrés.

3. $\vec{u}\,(2\,;\,m\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,3\,;\,-5)$ sont orthogonaux pour :

Réponse D : $m=1$
$2m+3m-5=0$, soit $5m=5$ et $m=1$.

4. $\vec{u}\,(0\,;\,3\,;\,4)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,0\,;\,1)$. Le cosinus de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ vaut :

Réponse B : $\dfrac{4}{5}$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=1$: $\cos=\dfrac{4}{5}$.

5. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$, avec $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ ($\vec{n}$ non nul). Alors :

Réponse D : $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$
Orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : c'est la définition d'un vecteur normal.

6. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 ($ABCD$ en bas ; E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ vaut :

Réponse A : 9
Le projeté orthogonal de G sur (AB) est B : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=AB^2=9$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).