Produit scalaire : les quatre façons de le calculer – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Produit scalaire · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Pour lire un angle, les deux vecteurs doivent partir du même point : l'angle de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'est pas $\widehat{ABC}$.
- Avec un projeté orthogonal, regarde les sens : si le projeté tombe de l'autre côté, le produit scalaire est négatif.
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$: n'oublie pas le double produit.
- Un angle obtus a un cosinus négatif : le produit scalaire est négatif.
- En coordonnées : $xx' + yy'$, abscisse avec abscisse, ordonnée avec ordonnée, jamais « en croix ».
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$: un carré n'est jamais négatif, attention au signe : $(-a)^2 = a^2$, pas $-a^2$.

Exercice 1 – Avec le cosinus ★

Calcule le produit scalaire avec la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$.

a) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 60°$

b) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 120°$

c) $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 45°$

d) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 90°$

e) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 30°$

f) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 150°$

g) $\|\vec{u}\| = \dfrac{1}{2}$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 180°$

h) ABC est un triangle équilatéral de côté 6 : calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 – Avec les coordonnées ★

Le repère est orthonormé. Calcule le produit scalaire avec $xx' + yy'$.

a) $\vec{u}\,(3\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,5)$

b) $\vec{u}\,(-1\,;\,6)$ et $\vec{v}\,(-3\,;\,-2)$

c) $\vec{u}\,(2\,;\,5)$ et $\vec{v}\,(-5\,;\,2)$

d) $\vec{u}\,\left(\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$ et $\vec{v}\,\left(4\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$

e) $\vec{u}\,(0\,;\,-4)$ et $\vec{v}\,(7\,;\,3)$

f) $\vec{u}\,(\sqrt{2}\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(\sqrt{2}\,;\,-3)$

g) $\vec{w}\,(2\,;\,-5)$: calcule $\vec{w}\cdot\vec{w}$, puis $\|\vec{w}\|$.

h) $A(1\,;\,2)$, $B(4\,;\,-1)$ et $C(0\,;\,5)$: calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3 – Avec les normes ★

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à partir des normes données.

a) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$

b) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{13}$

c) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 12$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 13$

d) $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 2\sqrt{7}$

e) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{5}$

f) $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3}$

g) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 9$

h) ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$: calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 – Bilinéarité et identités ★★

On sait que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Calcule.

a) $(2\vec{u}) \cdot (-3\vec{v})$

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

c) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

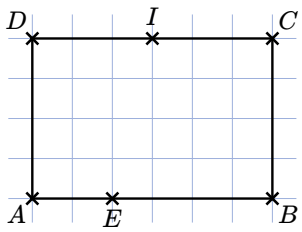
d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

e) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v})$

f) $\|3\vec{u} + 2\vec{v}\|$

Exercice 5 – Le rectangle et les projetés ★★

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 6$ et $AD = 4$. I est le milieu de $[DC]$ et E le point de $[AB]$ tel que $AE = 2$. Calcule chaque produit scalaire avec un projeté orthogonal (sans coordonnées), puis contrôle à la dernière question.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
4. $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED}$
5. Dans le repère orthonormé d'origine A où $B(6\,;\,0)$ et $D(0\,;\,4)$, contrôle les résultats des questions 2 et 4.

Exercice 6 – Choisir la bonne formule ★★

Calcule le produit scalaire. Commence par écrire la méthode choisie (cosinus, projeté, coordonnées ou normes).

a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 150°$

b) $\vec{u}\,(-2\,;\,5)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,1)$ dans un repère orthonormé

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 3$

d) ABC est rectangle en A, $AB = 5$ et $BC = 7$: calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

e) $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{21}$: calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

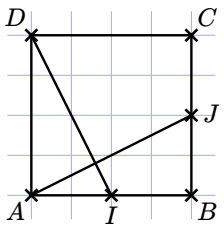
Exercice 7 – Le triangle équilatéral ★★★

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et H est le milieu de $[BC]$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Calcule $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.
4. Calcule AH, puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
5. Calcule $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$.

Exercice 8 – Le carré et les deux milieux ★★★

$ABCD$ est un carré de côté 4, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. On veut montrer que (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.



1. Calcule $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.
2. Avec la relation de Chasles, écris $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$, puis calcule $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AJ}$. Conclus.
3. Retrouve ce résultat dans le repère orthonormé d'origine A où $B(4\,;\,0)$ et $D(0\,;\,4)$.
4. Calcule $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DB}$, puis $\cos \widehat{IDB}$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon résultat.

a) $\vec{u}\,(2\,;\,-3)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-3) \times 4 = -10$

b) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4 + 9 = 13$

c) $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$, $(\vec{u}, \vec{v}) = 135°$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$

d) ABC équilatéral de côté 8 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 8 \times 8 \times \cos 60° = 32$

e) $ABCD$ carré de côté 5 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = AB^2 = 25$

f) $\vec{u}\,(-3\,;\,4)$: $\vec{u} \cdot \vec{u} = -3^2 + 4^2 = 7$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(3\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,5)$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :
   A 13 **B** 11 **C** 1 **D** 20
2. $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :
   A -6 **B** 6 **C** $-6\sqrt{3}$ **D** 12
3. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{37}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :
   A 6 **B** -12 **C** 12 **D** -6
4. $ABCD$ est un carré de côté 3. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ vaut :
   A $9\sqrt{2}$ **B** 9 **C** 0 **D** 18
5. $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 2$. Alors $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ vaut :
   A 29 **B** 3 **C** 25 **D** 21

6. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. Alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ vaut :

A 6 **B** 10 **C** 14 **D** 8

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).