Produit scalaire : orthogonalité, angles et Al-Kashi – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Produit scalaire · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ne veut pas dire qu'un vecteur est nul : les vecteurs sont orthogonaux.
- Pour l'angle $\widehat{ABC}$, on prend $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, qui partent tous deux de B.
- Al-Kashi : le côté qu'on calcule est celui qui est en face de l'angle utilisé.
- Angle obtus : cosinus négatif, et le terme $-2bc\cos\widehat{A}$ devient positif.
- Al-Kashi donne le carré du côté : il reste à prendre la racine carrée.
- Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu de $[AB]$ et pour rayon $\dfrac{AB}{2}$.

Exercice 1 – Orthogonaux ou pas ? ★

Le repère est orthonormé. Dis si les vecteurs (ou les droites) sont orthogonaux. Justifie par un calcul.

a) $\vec{u}\,(4\,;\,-6)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,2)$

b) $\vec{u}\,(5\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(-1\,;\,4)$

c) $\vec{u}\,(-2\,;\,7)$ et $\vec{v}\,(7\,;\,2)$

d) $\vec{u}\,(\dfrac{1}{3}\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(6\,;\,-1)$

e) $\vec{u}\,(2\sqrt{3}\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(\sqrt{3}\,;\,-5)$

f) $\vec{u}\,(0\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(-5\,;\,0)$

g) Les droites (AB) et (CD), avec $A(1\,;\,2)$, $B(3\,;\,5)$, $C(0\,;\,4)$ et $D(3\,;\,2)$

h) Les droites (AB) et (CD), avec $A(-1\,;\,0)$, $B(2\,;\,4)$, $C(5\,;\,1)$ et $D(1\,;\,-2)$

Exercice 2 – Le cosinus, puis l'angle ★

Calculatrice autorisée. Calcule le cosinus de l'angle avec $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$, puis donne une mesure de l'angle en degrés (arrondie au degré si elle n'est pas exacte).

a) $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$

b) $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\sqrt{3}$

c) $\vec{u}\,(1\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,1)$

d) $\vec{u}\,(2\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(1\,;\,3)$

e) $\vec{u}\,(3\,;\,4)$ et $\vec{v}\,(5\,;\,12)$

f) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$

g) $\vec{u}\,(-4\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,-1)$

h) $A(1\,;\,1)$, $B(4\,;\,2)$ et $C(-1\,;\,3)$: calcule $\widehat{BAC}$.

Exercice 3 – Al-Kashi : calculer un côté ★

Calculatrice autorisée. Dans le triangle ABC, calcule le côté demandé (BC si rien n'est précisé) avec $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$. Donne la valeur exacte quand l'angle est remarquable, sinon une valeur arrondie au dixième.

a) $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{A} = 60°$

b) $AB = 2$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = 120°$

c) $AB = 5$, $AC = 12$ et $\widehat{A} = 90°$

d) $AB = 4$, $AC = 3\sqrt{2}$ et $\widehat{A} = 45°$

e) $AB = \sqrt{3}$, $AC = 1$ et $\widehat{A} = 150°$

f) $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{A} = 60°$

g) $BC = 6$, $CA = 5$ et $\widehat{C} = 40°$: calcule AB.

h) $AB = 10$, $AC = 7$ et $\widehat{A} = 110°$

Exercice 4 – Al-Kashi : calculer un angle ★★

Calculatrice autorisée. Les trois côtés du triangle ABC sont connus. Calcule le cosinus de l'angle, puis sa mesure arrondie au degré.

a) $AB = 8$, $AC = 5$ et $BC = 7$: calcule $\widehat{A}$.

b) $AB = 3$, $AC = 5$ et $BC = 7$: calcule $\widehat{A}$.

c) $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 5$: calcule $\widehat{A}$.

d) $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 11$: calcule $\widehat{A}$.

e) $AB = 9$, $BC = 7$ et $CA = 5$: le triangle a-t-il un angle obtus ?

Exercice 5 – Nature d'un triangle, valeur de m ★★

Le repère est orthonormé. Réponds en justifiant par des produits scalaires.

a) $A(2\,;\,-1)$, $B(5\,;\,3)$ et $C(-2\,;\,2)$: quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Trouve le réel m tel que $\vec{u}\,(m\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,-2)$ soient orthogonaux.

c) Trouve les réels m tels que $\vec{u}\,(m\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,-8)$ soient orthogonaux.

d) $A(1\,;\,0)$, $B(4\,;\,1)$, $C(3\,;\,4)$ et $D(0\,;\,3)$: quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

e) $A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,4)$ et $C(4\,;\,-1)$: le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 6 – L'ensemble des points M ★★

I est le milieu de $[AB]$. Avec $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$, détermine l'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité.

a) $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

b) $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$

c) $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$

d) $AB = 2$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$

e) $A(-1\,;\,2)$ et $B(5\,;\,-2)$: écris une équation de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Le point $C(4\,;\,3)$ en fait-il partie ?

Exercice 7 – La distance inaccessible ★★★

Calculatrice autorisée. Un étang empêche de mesurer directement la distance entre deux arbres A et B. D'un point C, un géomètre mesure $CA = 120$ m, $CB = 150$ m et l'angle $\widehat{ACB} = 70°$.

1. Calcule la distance AB, arrondie au mètre.
2. Calcule l'angle $\widehat{CAB}$, arrondi au degré.

Exercice 8 – Le travail d'une force ★★★

Calculatrice autorisée. Le travail d'une force constante $\vec{F}$ (en newtons) lors d'un déplacement de A à B (en mètres) est $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, en joules (J).

1. Un enfant tire une luge sur 40 m en ligne droite, avec une force de 50 N qui fait un angle de $30°$ avec le déplacement. Calcule le travail de cette force.
2. Dans un repère orthonormé (unité : le mètre pour les déplacements, le newton pour les forces), $\vec{F}\,(30\,;\,-10)$ et $\overrightarrow{AB}\,(8\,;\,4)$. Calcule W.
3. Avec les données de la question 2, calcule l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.
4. Pendant le trajet de la question 1, le frottement de la neige est une force de 15 N de sens contraire au déplacement. Calcule son travail et interprète le signe.

Exercice 9 – Un triangle et sa médiane ★★★

Calculatrice autorisée à la dernière question. ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 120°$. I est le milieu de $[BC]$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calcule la valeur exacte de BC.
3. Justifie que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, puis calcule la longueur AI.
4. Calcule une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\vec{u}\,(5\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,10)$: « $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20 - 20 = 0$, donc $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. »

b) $A(2\,;\,1)$, $B(5\,;\,1)$, $C(2\,;\,4)$: « avec $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-3\,;\,3)$, $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{-9}{3 \times 3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\widehat{ABC} = 135°$. »

c) $AB = 4$, $AC = 5$, $\widehat{A} = 120°$: « $BC^2 = 16 + 25 - 20 = 21$, donc $BC = \sqrt{21}$. »

d) $AB = 5$, $AC = 7$, $\widehat{A} = 60°$: « $BC = 25 + 49 - 35 = 39$. »

e) $A(1\,;\,2)$ et $B(7\,;\,10)$: « l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de centre A et de rayon $AB = 10$. »

f) $AB = 6$: « $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 \iff MI^2 = 16 - 9 = 7$, cercle de centre I et de rayon $\sqrt{7}$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\vec{u}\,(4\,;\,6)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,-2)$ sont orthogonaux pour :

   A $m = -3$ **B** $m = 3$ **C** $m = \dfrac{4}{3}$ **D** $m = 12$

2. $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = 60°$. Alors BC vaut :

   A 13 **B** $\sqrt{37}$ **C** 5 **D** $\sqrt{13}$

3. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$. L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ mesure :

   A $120°$ **B** $60°$ **C** $150°$ **D** $30°$

4. $AB = 8$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle :

   A de centre A, de rayon 8 **B** de centre le milieu de $[AB]$, de rayon 8

   C de centre le milieu de $[AB]$, de rayon 4 **D** de centre A, de rayon 4

5. Un triangle a pour côtés 4, 5 et 6. Alors :

   A il est rectangle **B** il a un angle obtus **C** on ne peut pas savoir **D** ses trois angles sont aigus

6. Une force de 20 N fait un angle de $60°$ avec un déplacement de 5 m. Son travail vaut :

   A 50 J **B** 100 J **C** $50\sqrt{3}$ J **D** -50 J

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).