# Corrigé – Produit scalaire : orthogonalité, angles et Al-Kashi

Mathématiques – Première spécialité

Produit scalaire · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

*Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.*

## **Exercice 1** – Orthogonaux ou pas ? ★

Le repère est orthonormé. Dis si les vecteurs (ou les droites) sont orthogonaux. Justifie par un calcul.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 + (-6) \times 2$
$= 12 - 12$
$= 0$

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-1) + 1 \times 4$
$= -5 + 4$
$= -1$

Le produit scalaire n'est pas nul : les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times 7 + 7 \times 2$
$= -14 + 14$
$= 0$

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{3} \times 6 + 2 \times (-1)$
$= 2 - 2$
$= 0$

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 \times (-5)$
$= 6 - 5$
$= 1$

Le produit scalaire n'est pas nul : les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

f) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \times (-5) + 3 \times 0$
$= 0 + 0$
$= 0$

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

g) Les droites sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
$\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{CD}\,(3\,;\,-2)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 3 + 3 \times (-2)$
$= 6 - 6$
$= 0$

Le produit scalaire est nul : les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires.

h) Les droites sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
$\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,4)$ et $\overrightarrow{CD}\,(-4\,;\,-3)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \times (-4) + 4 \times (-3)$
$= -12 - 12$
$= -24$

Le produit scalaire n'est pas nul : les droites $(AB)$ et $(CD)$ ne sont pas perpendiculaires.

## **Exercice 2** – Le cosinus, puis l'angle ★

Calculatrice autorisée. Calcule le cosinus de l'angle avec $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, puis donne une mesure de l'angle en degrés (arrondie au degré si elle n'est pas exacte).

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{10}{4 \times 5}$
$= \dfrac{1}{2}$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$.

b) $\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{-3\sqrt{3}}{2 \times 3}$
$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}) = 150°$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 1$
$= 3 + 2$
$= 5$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2}$
$= \sqrt{5}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2}$
$= \sqrt{10}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}) = 45°$.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 3$
$= 2 - 3$
$= -1$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{5}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2}$
$= \sqrt{10}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{-1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

À la calculatrice : $(\vec{u}, \vec{v}) \approx 98°$.

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + 4 \times 12$
$= 15 + 48$
$= 63$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 12^2}$
$= \sqrt{169}$
$= 13$

$\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{63}{5 \times 13}$
$= \dfrac{63}{65}$

À la calculatrice : $(\vec{u}, \vec{v}) \approx 14°$.

f) $\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{-3}{\sqrt{2} \times 3}$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}) = 135°$.

g) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4) \times 2 + 2 \times (-1)$
$= -8 - 2$
$= -10$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$
$= \sqrt{20}$
$= 2\sqrt{5}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{5}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v})$
$= \dfrac{-10}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$
$= -1$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$.

h) Les deux vecteurs partent de $A$ : $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;\,2)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= 3\times(-2)+1\times 2\\ &= -6+2\\ &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{3^2+1^2}\\ &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{(-2)^2+2^2}\\ &= \sqrt{8}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos\widehat{BAC}\\ &= \frac{-4}{\sqrt{10}\times 2\sqrt{2}}\\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

À la calculatrice : $\widehat{BAC}\approx 117^\circ$.

## **Exercice 3** – Al-Kashi : calculer un côté ★

Calculatrice autorisée. Dans le triangle $ABC$, calcule le côté demandé ($BC$ si rien n'est précisé) avec $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{A}$. Donne la valeur exacte quand l'angle est remarquable, sinon une valeur arrondie au dixième.

a) $BC^2$

$$\begin{aligned}&= 3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\cos 60^\circ\\ &= 9+25-2\times 3\times 5\times\frac{1}{2}\\ &= 34-15\\ &= 19\end{aligned}$$

Une longueur est positive : $BC=\sqrt{19}$.

b) $BC^2$

$$\begin{aligned}&= 2^2+4^2-2\times 2\times 4\times\cos 120^\circ\\ &= 4+16-2\times 2\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 20+8\\ &= 28\end{aligned}$$

Une longueur est positive : $BC=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

*Angle obtus :* $-2\times 2\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=+8$.

c) $BC^2$
$= 5^2 + 12^2 - 2 \times 5 \times 12 \times \cos 90^\circ$
$= 25 + 144 - 2 \times 5 \times 12 \times 0$
$= 169 + 0$
$= 169$

Une longueur est positive : $BC = \sqrt{169} = 13$.
Avec un angle droit, $\cos 90^\circ = 0$ : on retrouve le théorème de Pythagore.

d) $BC^2$
$= 4^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$
$= 16 + 18 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$= 34 - 24$
$= 10$

Une longueur est positive : $BC = \sqrt{10}$.

e) $BC^2$
$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 \times \cos 150^\circ$
$= 3 + 1 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 4 + 3$
$= 7$

Une longueur est positive : $BC = \sqrt{7}$.

f) $BC^2$
$= 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60^\circ$
$= 9 + 64 - 2 \times 3 \times 8 \times \dfrac{1}{2}$
$= 73 - 24$
$= 49$

Une longueur est positive : $BC = \sqrt{49} = 7$.

g) Le côté cherché $AB$ est en face de l'angle connu $\widehat{C}$ : on écrit Al-Kashi en $C$.
$AB^2$
$= CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos \widehat{C}$
$= 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos 40^\circ$
$= 61 - 60 \cos 40^\circ$

À la calculatrice : $AB^2 \approx 15{,}04$, donc $AB \approx 3{,}9$.

h) $BC^2$
$= 10^2 + 7^2 - 2 \times 10 \times 7 \times \cos 110^\circ$
$= 149 - 140 \cos 110^\circ$

$\cos 110^\circ < 0$ (angle obtus) : $BC^2$ est plus grand que 149.
À la calculatrice : $BC^2 \approx 196{,}88$, donc $BC \approx 14{,}0$.

**Exercice 4** – Al-Kashi : calculer un angle ★★

Calculatrice autorisée. Les trois côtés du triangle $ABC$ sont connus. Calcule le cosinus de l'angle, puis sa mesure arrondie au degré.

a) On isole le cosinus dans Al-Kashi : $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A} &= \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 5} \\ &= \frac{40}{80} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $\widehat{A} = 60°$.

b) On isole le cosinus dans Al-Kashi : $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A} &= \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{-15}{30} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $\widehat{A} = 120°$.
Le cosinus est négatif : l'angle est obtus.

c) On isole le cosinus dans Al-Kashi : $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A} &= \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 6} \\ &= \frac{27}{48} \\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

À la calculatrice : $\widehat{A} \approx 56°$.

d) On isole le cosinus dans Al-Kashi : $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A} &= \frac{6^2 + 8^2 - 11^2}{2 \times 6 \times 8} \\ &= \frac{-21}{96} \\ &= -\frac{7}{32}\end{aligned}$$

À la calculatrice : $\widehat{A} \approx 103°$.
Le cosinus est négatif : l'angle est obtus.

e) On isole le cosinus dans Al-Kashi : $\cos\widehat{C} = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \times CA \times CB}$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{C} &= \frac{5^2 + 7^2 - 9^2}{2 \times 5 \times 7} \\ &= \frac{-7}{70} \\ &= -\frac{1}{10}\end{aligned}$$

À la calculatrice : $\widehat{C} \approx 96°$.
Le plus grand angle est en face du plus grand côté $[AB]$ : c'est $\widehat{C}$.
Son cosinus est négatif : le triangle a un angle obtus, en $C$.

## **Exercice 5** – Nature d'un triangle, valeur de m ★★

Le repère est orthonormé. Réponds en justifiant par des produits scalaires.

a) $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,4)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-4\,;\,3)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 3 \times (-4) + 4 \times 3 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

Le triangle est rectangle en $A$.

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

$AB = AC$ : le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle en $A$.

b) Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4m + 3 \times (-2) = 4m - 6$.

$$\begin{aligned}&4m - 6 = 0 \\ &\iff 4m = 6 \quad \textit{(on ajoute 6)} \\ &\iff m = \frac{3}{2} \quad \textit{(on divise par 4)} \\ &S = \left\{\frac{3}{2}\right\}\end{aligned}$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = m \times m + 2 \times (-8) = m^2 - 16$.

$$\begin{aligned}&m^2 - 16 = 0 \\ &\iff m^2 = 16 \quad \textit{(on ajoute 16)}\end{aligned}$$

Les deux nombres dont le carré vaut 16 sont $-4$ et $4$.

$S = \{-4\,;\,4\}$

Il y a deux valeurs : $m = -4$ et $m = 4$.

d) $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,1)$ et $\overrightarrow{DC}\,(3\,;\,1)$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AD}\,(-1\,;\,3)$ :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 3\times(-1)+1\times 3$
$\quad = -3+3$
$\quad = 0$

Un angle droit : c'est un rectangle.
$AB = \sqrt{3^2+1^2}$
$\quad = \sqrt{10}$

$AD = \sqrt{(-1)^2+3^2}$
$\quad = \sqrt{10}$

Deux côtés consécutifs égaux : $ABCD$ est un carré.

e) On teste l'angle droit en chacun des trois sommets.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 3+2\times(-3)$
$\quad = 12-6$
$\quad = 6$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)\times(-1)+(-2)\times(-5)$
$\quad = 4+10$
$\quad = 14$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-3)\times 1+3\times 5$
$\quad = -3+15$
$\quad = 12$

Aucun produit n'est nul : le triangle n'est pas rectangle.
Les trois sont positifs : ses trois angles sont aigus.

## **Exercice 6** – L'ensemble des points M ★★

$I$ est le milieu de $[AB]$. Avec $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$, détermine l'ensemble des points $M$ du plan qui vérifient l'égalité.

a) $MI^2 - \dfrac{6^2}{4} = 0$
$\quad \iff MI^2 = 0+9$
$\quad \iff MI^2 = 9$

C'est le cercle de centre $I$ et de rayon 3.
Comme $k=0$, c'est le cercle de diamètre $[AB]$ : rayon $\dfrac{AB}{2} = 3$.

b) $MI^2 - \dfrac{4^2}{4} = 12$
$\iff MI^2 = 12 + 4$
$\iff MI^2 = 16$

C'est le cercle de centre $I$ et de rayon 4.

c) $MI^2 - \dfrac{6^2}{4} = -9$
$\iff MI^2 = -9 + 9$
$\iff MI^2 = 0$

$MI = 0$ : l'ensemble est réduit au point $I$.

d) $MI^2 - \dfrac{2^2}{4} = -5$
$\iff MI^2 = -5 + 1$
$\iff MI^2 = -4$

*Un carré n'est jamais négatif : l'ensemble est vide.*

e) $\overrightarrow{MA}\,(-1 - x\,;\,2 - y)$ et $\overrightarrow{MB}\,(5 - x\,;\,-2 - y)$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-1 - x)(5 - x) + (2 - y)(-2 - y)$, et on change les deux signes de chaque produit :
$(x + 1)\,(x - 5) + (y - 2)\,(y + 2)$
$= x^2 - 5x + x - 5 + y^2 - 4$
$= x^2 + y^2 - 4x - 9$

On complète le carré : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, donc l'équation devient $(x - 2)^2 + y^2 = 13$.
C'est le cercle de centre $(2\,;\,0)$, milieu de $[AB]$, et de rayon $\sqrt{13}$.
Pour $C$ : $(4 - 2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.
Le point $C$ est sur le cercle : le triangle $ACB$ est rectangle en $C$.

## **Exercice 7** – La distance inaccessible ★★★

1. On cherche $AB$, le côté en face de l'angle connu $\widehat{C}$ : on écrit Al-Kashi en $C$.
   $AB^2$
   $= CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos\widehat{C}$
   $= 120^2 + 150^2 - 2 \times 120 \times 150 \times \cos 70^\circ$
   $= 36\,900 - 36\,000 \cos 70^\circ$

   À la calculatrice : $AB^2 \approx 24\,587{,}3$, donc $AB \approx 156{,}8$ m.
   Les deux arbres sont à environ 157 m l'un de l'autre.

2. Al-Kashi en $A$ : $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos \widehat{A}$.
   On isole le cosinus :
   $$\begin{aligned}\cos \widehat{A} &= \frac{AC^2 + AB^2 - CB^2}{2 \times AC \times AB} \\ &= \frac{120^2 + 24\,587{,}3 - 150^2}{2 \times 120 \times 156{,}8}\end{aligned}$$

   On garde la valeur de $AB^2$ en mémoire (pas l'arrondi) : $\cos \widehat{A} \approx 0{,}4381$, donc $\widehat{CAB} \approx 64°$.

## **Exercice 8** – Le travail d'une force ★★★

1. On connaît les normes et l'angle : on utilise le cosinus.
   $$\begin{aligned}W &= \|\vec{F}\| \times AB \times \cos 30° \\ &= 50 \times 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1\,000\sqrt{3}\end{aligned}$$

   Le travail vaut $1\,000\sqrt{3} \approx 1\,732$ J.

2. On connaît les coordonnées : $xx' + yy'$.
   $$\begin{aligned}W &= 30 \times 8 + (-10) \times 4 \\ &= 240 - 40 \\ &= 200\end{aligned}$$

   Le travail vaut 200 J.

3. $$\begin{aligned}\|\vec{F}\| &= \sqrt{30^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{1000} \\ &= 10\sqrt{10}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}AB &= \sqrt{8^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{80} \\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) &= \frac{200}{10\sqrt{10} \times 4\sqrt{5}} \\ &= \frac{200}{40\sqrt{50}} \\ &= \frac{5}{5\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

   L'angle mesure $45°$.

4. La force et le déplacement font un angle de $180°$.
   $$\begin{aligned} W &= 15 \times 40 \times \cos 180° \\ &= 600 \times (-1) \\ &= -600 \end{aligned}$$
   Le travail est négatif : le frottement freine la luge (travail résistant).

**Exercice 9** – Un triangle et sa médiane ★★★

1. $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos 120° \\ &= 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -12 \end{aligned}$$

2. Al-Kashi en $A$ (ou le carré de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$) :
   $$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 36 + 16 - 2 \times (-12) \\ &= 52 + 24 \\ &= 76 \end{aligned}$$
   Donc $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

3. $I$ est le milieu de $[BC]$ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}$, car $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
   On élève au carré et on développe :
   $$\begin{aligned} AI^2 &= \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(AB^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(36 - 24 + 16) \\ &= \frac{28}{4} \\ &= 7 \end{aligned}$$
   Donc $AI = \sqrt{7}$.

4. Al-Kashi en $B$, en isolant le cosinus :

$$\begin{aligned}\cos\widehat{B} &= \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times BA \times BC} \\ &= \frac{36 + 76 - 16}{2 \times 6 \times 2\sqrt{19}} \\ &= \frac{96}{24\sqrt{19}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{19}} \\ &= \frac{4\sqrt{19}}{19}\end{aligned}$$

À la calculatrice : $\widehat{ABC} \approx 23°$.

## **Exercice 10** – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un vecteur est nul.*
Le calcul $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ est juste ; il signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (et aucun des deux n'est nul ici).

b) *Pour l'angle en $B$, les deux vecteurs doivent partir de $B$ : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.*
$\overrightarrow{BA}\,(-3\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-3\,;\,3)$ : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 + 0 = 9$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{ABC} &= \frac{9}{3 \times 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Donc $\widehat{ABC} = 45°$.

c) $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$ *: le terme* $-2 \times 4 \times 5 \times \cos 120°$ *vaut* $+20$.

$$\begin{aligned}BC^2 &= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 41 + 20 \\ &= 61\end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{61}$.

d) *Al-Kashi donne $BC^2$, pas $BC$ : il faut prendre la racine carrée.*

$$\begin{aligned}BC^2 &= 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} \\ &= 74 - 35 \\ &= 39\end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{39}$.

e) *C'est le cercle de **diamètre** $[AB]$ : son centre est le milieu de $[AB]$ et son rayon* $\dfrac{AB}{2}$.
Milieu : $\left(\dfrac{1+7}{2}\,;\,\dfrac{2+10}{2}\right) = (4\,;\,6)$.
$AB = \sqrt{6^2+8^2} = 10$, donc le rayon vaut $5$.

f) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ *: on ajoute* $\dfrac{AB^2}{4} = 9$ *pour isoler* $MI^2$.
$MI^2 - 9 = 16$
$\quad\iff MI^2 = 25$

Cercle de centre $I$ et de rayon $5$.

## **QCM** – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\vec{u}\,(4\,;\,6)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,-2)$ sont orthogonaux pour :

Réponse B : $m = 3$
$4m + 6\times(-2) = 0 \iff 4m = 12 \iff m = 3$.

2. $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = 60^\circ$. Alors $BC$ vaut :

Réponse D : $\sqrt{13}$
$BC^2 = 9 + 16 - 2\times3\times4\times\dfrac{1}{2} = 13$, puis la racine carrée.

3. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$. L'angle $(\vec{u},\vec{v})$ mesure :

Réponse A : $120^\circ$
$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{-6}{3\times4} = -\dfrac{1}{2}$.

4. $AB = 8$. L'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle :

Réponse C : de centre le milieu de $[AB]$, de rayon $4$
C'est le cercle de diamètre $[AB]$.

5. Un triangle a pour côtés $4$, $5$ et $6$. Alors :

Réponse D : ses trois angles sont aigus
Le plus grand angle est en face du côté $6$ : son cosinus vaut $\dfrac{16+25-36}{2\times4\times5} = \dfrac{1}{8} > 0$.

6. Une force de $20$ N fait un angle de $60^\circ$ avec un déplacement de $5$ m. Son travail vaut :

Réponse A : $50$ J
$W = 20\times5\times\cos 60^\circ = 50$ J.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*