1. Rappels : calculer une probabilité, événement contraire

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : le dé à 12 faces**

(a) Les nombres pairs sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12 : 6 issues sur 12. $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

(b) Les nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11 : 5 issues sur 12. $P = \frac{5}{12}$.

(c) Le contraire de « au plus 9 » est « au moins 10 » : issues 10, 11 et 12. $P = 1 - \frac{3}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$. Attention : « au moins 9 » serait faux.

(d) Aucune face ne porte 13 : l'événement est impossible, donc $P = 0$.

(e) Toutes les faces conviennent : l'événement est certain, donc $P = 1$.

(f) Les multiples de 3 sont 3, 6, 9 et 12 : 4 issues. $P = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : écrire et contrôler une probabilité**

(a) $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\,\%$.

(b) $\frac{7}{8} = 7 \div 8 = 0{,}875 = 87{,}5\,\%$.

(c) $\frac{7}{25} = 0{,}28$ et $31\,\% = 0{,}31$. Ordre croissant : $\frac{7}{25} < 0{,}3 < 31\,\%$.

(d) $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73 = 73\,\%$.

(e) $P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

(f) Non : $\frac{8}{5} = 1{,}6$ est supérieur à 1. Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1, donc Lina s'est trompée.

(g) Faux : seul un événement impossible a une probabilité égale à 0. Avec 0,01, l'événement est très peu probable, mais il peut se produire.

Ex. 3 ★★☆ **L'urne d'Inès**

(a) Non : le dénominateur est le nombre total de boules, pas le nombre de boules défavorables. $P(\text{bleue}) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

(b) On passe par le contraire : $P(\text{pas noire}) = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$.

(c) Oui : le nombre total de boules passe à 40. $P(\text{bleue}) = \frac{12}{40} = 0{,}3 = 30\,\%$, au lieu de 40 % avant l'ajout.

Ex. 3 (suite)

(d) Il y a 40 boules, dont 11 jaunes. Pour avoir $\frac{1}{2}$, il faut autant de jaunes que de non-jaunes. Les non-jaunes restent au nombre de 29, donc il faut 29 jaunes : on ajoute $29 - 11 = 18$ boules jaunes. Vérification : $\frac{29}{58} = \frac{1}{2}$.

Ex. 4 ★★☆ **Le sac de jetons de Mila**

(a) Rouges : $80 \div 40 \times 11 = 22$. Verts : $80 \times 0{,}45 = 36$. Blancs : $80 - 22 - 36 = 22$. Le sac contient 22 jetons rouges, 36 verts et 22 blancs.

(b) On passe par le contraire : $P(\text{pas vert}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$. La probabilité de ne pas tirer un jeton vert est $\frac{11}{20}$.

(c) $P(\text{blanc}) = \frac{22}{80} = \frac{11}{40} = 0{,}275 = 27{,}5\,\%$. La probabilité de tirer un jeton blanc est 27,5 %.

(d) Oui : $P(\text{rouge}) = P(\text{blanc}) = \frac{11}{40}$. Les deux joueurs ont la même probabilité de gagner, donc le jeu est équitable.

Ex. 5 ★★☆ **Le jeu de 32 cartes d'Hugo**

(a) Non : ces deux événements n'ont pas la même probabilité. Les 32 cartes sont équiprobables, et il y a 4 rois : $P(\text{roi}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

(b) Il y a $3 \times 2 = 6$ figures noires (valet, dame et roi de pique et de trèfle). $P(\text{pas figure noire}) = 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$.

(c) Il y a 2 as rouges (cœur et carreau). $P = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

(d) Faux : $P(\text{trèfle}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(\text{pas trèfle}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Les deux probabilités sont différentes.

Ex. 6 ★★★ **L'urne de Yanis à Brest**

(a) Il y a $20 - 8 - 3 = 9$ boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher, donc les 20 issues sont équiprobables : $P(\text{blanche}) = \frac{9}{20} = 0{,}45$. La probabilité de tirer une blanche est 0,45.

(b) L'événement contraire est « tirer une boule rouge » : $P(\text{rouge}) = \frac{8}{20}$.
Donc $P(\text{pas rouge}) = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\,\%$. La probabilité de ne pas tirer une rouge est $\frac{3}{5}$, soit 60 %.

(c) Les 8 rouges doivent représenter $\frac{1}{4}$ du total, donc le total doit être $8 \times 4 = 32$ boules. On vérifie : $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Yanis doit ajouter $32 - 20 = 12$ boules vertes.

Ex. 6 **(suite)**

(d) Il y a maintenant $3 + 12 = 15$ boules vertes sur 32. $P(\text{verte}) = \frac{15}{32} = 0{,}468\,75$, et $0{,}468\,75 < 0{,}5$. Yanis a raison : il a moins d'une chance sur deux de tirer une boule verte.

Ex. 7 ★★★ **Le jeu de Noé et Clara à Annecy**

(a) Le dé est équilibré, donc les 8 issues sont équiprobables. Les issues favorables sont 6, 7 et 8 : 3 issues. $P(\text{Noé gagne}) = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$.

(b) « Au moins 6 », c'est 6, 7 ou 8. Le contraire est donc « obtenir au plus 5 » (issues 1, 2, 3, 4 et 5) : le 6 n'en fait pas partie. Sa probabilité est $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

(c) Clara gagne exactement quand Noé ne gagne pas : $P(\text{Clara gagne}) = \frac{5}{8}$, alors que $P(\text{Noé gagne}) = \frac{3}{8}$. Les deux probabilités ne sont pas égales, donc le jeu n'est pas équitable : il avantage Clara.

(d) Le jeu est équitable si chaque joueur a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de gagner, c'est-à-dire 4 issues sur 8. Avec $k = 5$, Noé gagne avec 5, 6, 7 ou 8 : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, et Clara gagne avec 1, 2, 3 ou 4 : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Il faut donc $k = 5$.

(e) Une probabilité ne peut pas dépasser 1, or $\frac{9}{8} > 1$: il y a une erreur. Il n'y a que 8 issues, et toutes sont au plus 9. L'événement est donc certain : $P(\text{obtenir au plus 9}) = \frac{8}{8} = 1$.

Ex. 8 ★★★ **Le sachet de bonbons de Romane à Colmar**

(a) Fraise : $40 \times 0{,}1 = 4$ bonbons. Citron : $25\,\% = 0{,}25$, donc $40 \times 0{,}25 = 10$ bonbons. Menthe : $40 - 4 - 10 = 26$ bonbons. Le sachet contient 4 bonbons à la fraise, 10 au citron et 26 à la menthe.

(b) Les 40 issues sont équiprobables. $P(\text{menthe}) = \frac{26}{40} = \frac{13}{20} = 0{,}65 = 65\,\%$. La probabilité de prendre un bonbon à la menthe est $\frac{13}{20}$, soit 65 %.

(c) « Ne pas être à la fraise » est le contraire de « être à la fraise » : $P = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. La probabilité que le bonbon ne soit pas à la fraise est 0,9.

(d) Non, il a tort. Il reste bien 10 bonbons au citron, mais il n'y a plus que $40 - 2 - 3 = 35$ bonbons dans le sachet. Donc $P(\text{citron}) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \approx 0{,}29$, alors qu'avant elle valait 0,25 : elle a augmenté, car le total a diminué.

2. *Événements « et », « ou », incompatibles*

Ex. 9 ★★★ **Automatismes : « et », « ou » avec un dé à 12 faces**

(a) Oui : 12 est pair et multiple de 3. En mathématiques, « ou » n'exclut pas les deux à la fois, donc 12 réalise « A ou B ».

(b) Les issues communes sont 6 et 12 : 2 issues sur 12. $P(A \text{ et } B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

(c) Les issues sont 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 et 12 : 8 issues (6 et 12 comptés une seule fois). $P(A \text{ ou } B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

(d) Non : 12 est à la fois un multiple de 3 et supérieur ou égal à 10. B et C ont une issue commune, ils ne sont donc pas incompatibles.

(e) B ou C : 3, 6, 9, 10, 11, 12, soit 6 issues (12 compté une seule fois). $P(B \text{ ou } C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Ex. 10 ★★★ **Automatismes : additionner ou pas ?**

(a) « Vert » et « violet » n'ont aucune issue commune : ils sont incompatibles. $P = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 0{,}55$.

(b) Non : s'ils étaient incompatibles, on aurait $P(A \text{ ou } B) = 0{,}45 + 0{,}7 = 1{,}15$, plus que 1, ce qui est impossible.

(c) Ils sont incompatibles, donc $P(A \text{ ou } B) = 35\,\% + 40\,\% = 75\,\%$. « Ni A ni B » est l'événement contraire : $100\,\% - 75\,\% = 25\,\%$.

(d) 8 est pair, donc « obtenir 8 » et « nombre impair » sont incompatibles : $P = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

Ex. 11 ★★★ **L'association sportive**

(a) Total de la colonne « Escalade » : 50. $P = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

(b) Une seule case, à l'intersection de la ligne « Filles » et de la colonne « Badminton » : 36. $P = \frac{36}{200} = \frac{9}{50} = 0{,}18 = 18\,\%$.

(c) Les 110 garçons, plus les 24 filles qui font de l'escalade (les 26 garçons grimpeurs sont déjà comptés) : $P = \frac{110+24}{200} = \frac{134}{200} = \frac{67}{100}$.

(d) Ligne « Garçons », colonnes « Escalade » et « Handball » : $26 + 40 = 66$ (ou $110 - 44 = 66$). $P = \frac{66}{200} = \frac{33}{100} = 33\,\%$.

(e) Ils sont incompatibles, car chaque élève pratique une seule activité. Ils ne sont pas contraires : il reste les 70 élèves qui font du handball.

Ex. 12 ★★☆ **Un jeu de 32 cartes**

(a) Les figures noires sont le valet, la dame et le roi de pique et de trèfle, soit 6 cartes. $P = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

(b) 4 as plus 16 cartes rouges, moins l'as de cœur et l'as de carreau comptés deux fois : $4 + 16 - 2 = 18$ cartes. $P(\text{as ou rouge}) = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$.

(c) Non : les 3 figures de cœur sont comptées deux fois. Il y a $12 + 8 - 3 = 17$ cartes, donc $P(\text{figure ou cœur}) = \frac{17}{32}$, et non $\frac{5}{8}$.

(d) Oui : une carte ne peut pas être à la fois un 7 et un 8, il n'y a aucune issue commune. On additionne : $P = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 25\,\%$.

Ex. 13 ★★☆ **Vélo ou voiture ?**

(a) Vélo sans voiture : $132 - 84 = 48$. Pas de vélo (total) : $240 - 132 = 108$. Voiture sans vélo : $150 - 84 = 66$. Pas de voiture (total) : $240 - 150 = 90$. Ni vélo ni voiture : $108 - 66 = 42$
(et on vérifie que $48 + 42 = 90$).

(b) Une seule case, ligne « Vélo » et colonne « Voiture » : 84. $P = \frac{84}{240} = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

(c) Les 132 habitants qui ont un vélo, plus les 66 qui ont une voiture sans vélo : $\frac{132+66}{240} = \frac{198}{240} = \frac{33}{40} = 82{,}5\,\%$. C'est vrai : $82{,}5\,\% > 80\,\%$.

(d) Le contraire est « n'avoir ni vélo ni voiture » : 42 habitants. $P = \frac{42}{240} = \frac{7}{40}$
(on retrouve bien $1 - \frac{33}{40}$).

Ex. 14 ★★★ **As, piques et figures**

(a) Oui. L'as de pique est un as, donc A est réalisé (et Q aussi). En mathématiques, « ou » n'exclut pas les deux à la fois : il suffit qu'au moins l'un des deux soit réalisé.

(b) Noé a additionné alors que A et Q ont une issue commune, l'as de pique : il l'a comptée deux fois. Il y a $4 + 13 - 1 = 16$ cartes favorables, donc $P(A \text{ ou } Q) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

(c) Le contraire de « A ou Q » est « ni as ni pique » : la carte n'est pas un as et n'est pas un pique. Sa probabilité vaut $1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$. Vérification : $52 - 16 = 36$ cartes, et $\frac{36}{52} = \frac{9}{13}$.

(d) Un as n'est pas une figure : A et F n'ont aucune issue commune, donc ils sont incompatibles, et $P(A \text{ ou } F) = \frac{4}{52} + \frac{12}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$. Ils ne sont pas contraires : le 7 de trèfle ne réalise ni A ni F, et il reste $52 - 16 = 36$ cartes qui ne sont ni un as ni une figure.

Ex. 14 (suite)

(e) On compte chaque carte une seule fois : 4 as et 12 figures, soit 16 cartes, puis les piques pas encore comptés. Parmi les 13 piques, l'as, le valet, la dame et le roi sont déjà comptés, il en reste $13 - 4 = 9$. On a $4 + 12 + 9 = 25$ cartes favorables, donc la probabilité vaut $\frac{25}{52}$.

Ex. 15 ★★★ **Cantine et musique**

(a) Demi-pensionnaires : $0{,}75 \times 160 = 120$, donc $160 - 120 = 40$ externes. Musiciens : $0{,}25 \times 160 = 40$, donc 120 non musiciens. Demi-pensionnaires musiciens : $\frac{3}{20} \times 160 = 24$. On en déduit : externes musiciens $40 - 24 = 16$; demi-pensionnaires non musiciens $120 - 24 = 96$; externes non musiciens $40 - 16 = 24$.

(b) « Externe et non musicien » se lit dans une seule case : 24 élèves. La probabilité vaut $\frac{24}{160} = 0{,}15$, soit 15 %.

(c) Non. D et M ne sont pas incompatibles : les 24 demi-pensionnaires musiciens sont comptés deux fois dans la somme. On compte les 120 demi-pensionnaires et les 16 externes musiciens : $120 + 16 = 136$ élèves, donc $P(D \text{ ou } M) = \frac{136}{160} = 0{,}85$. Ce n'est pas certain : les 24 externes non musiciens ne réalisent ni D ni M.

(d) Il faut $0{,}30 \times 160 = 48$ musiciens. Il y en a 40, donc il faut que $48 - 40 = 8$ externes non musiciens se mettent à la musique.

Ex. 16 ★★★ **Le dé truqué de Ben**

(a) A est réalisé par les faces 2, 4 et 6 : $P(A) = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}45$. B est réalisé par les faces 4, 5 et 6 : $P(B) = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}55$. Les faces ne sont pas équiprobables, donc on additionne leurs probabilités au lieu de compter les faces.

(b) « A et B » est réalisé par les faces 4 et 6 : $P(A \text{ et } B) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$. « A ou B » est réalisé par les faces 2, 4, 5 et 6, chacune comptée une seule fois : $P(A \text{ ou } B) = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}7$.

(c) Non. Ils sont bien incompatibles : aucune face ne réalise les deux à la fois. Mais ils ne sont pas contraires : les faces 2 et 3 ne réalisent ni l'un ni l'autre, et d'ailleurs $0{,}1 + 0{,}55 = 0{,}65 \neq 1$. Le contraire de B est « obtenir 1, 2 ou 3 », de probabilité $1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

(d) Première façon : « ni A ni B » est réalisé par les faces 1 et 3, donc sa probabilité vaut $0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$. Seconde façon : c'est le contraire de « A ou B », donc sa probabilité vaut $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. La probabilité est de 30 %.

Ex. 16 (suite)

(e) Faux. Si C et B étaient incompatibles, on aurait $P(C \text{ ou } B) = 0{,}5 + 0{,}55 = 1{,}05$, ce qui est impossible car une probabilité ne dépasse pas 1. Un événement incompatible avec B n'utilise que les faces 1, 2 et 3 : sa probabilité vaut au plus 0,45.

3. *Issues non équiprobables, fréquence et simulation*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes — une roue à secteurs inégaux**

(a) $360 - 150 - 120 - 54 = 36$: le secteur gris mesure 36°.

(b) $P(\text{jaune}) = \dfrac{150}{360} = \dfrac{5}{12}$.

(c) $P(\text{violet}) = \dfrac{54}{360} = 0{,}15$.

(d) $P(\text{gris}) = \dfrac{36}{360} = 0{,}1 = 10\,\%$.

(e) $P(\overline{J}) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes — un dé à 4 faces truqué**

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $P(4) = 1 - (0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}15) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

(b) On écrit tout en décimal : $P(1) = 0{,}2$; $P(2) = 0{,}35$; $P(3) = 0{,}15$; $P(4) = 0{,}3$. Ordre : 3, 1, 4, 2.

(c) Les faces n'ont pas toutes la même probabilité : on additionne les probabilités des faces paires. $P(\text{pair}) = P(2) + P(4) = 0{,}35 + 0{,}3 = 0{,}65 = 65\,\%$. Yanis a tort.

(d) « Au moins 2 » est le contraire de « obtenir 1 » : $P = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Ex. 19 ★☆☆ **Automatismes — fréquence, tableur et hasard**

(a) Fréquence $= \dfrac{95}{250} = 0{,}38 = 38\,\%$.

(b) $1\,500 \times 0{,}38 = 570$: on peut s'attendre à environ 570 fois sur le dos. C'est un ordre de grandeur, pas un résultat garanti.

(c) Les bornes sont comprises : de 1 à 9, il y a $9 - 1 + 1 = 9$ entiers possibles, et 9 n'est pas une face du dé. La bonne formule est =ALEA.ENTRE.BORNES(1;8).

(d) Non. Le hasard n'a pas de mémoire : le dé est équilibré, donc la probabilité d'obtenir 6 au lancer suivant est toujours $\frac{1}{6}$.

(e) Non. $\frac{9}{25} = 0{,}36$ est une fréquence calculée sur seulement 25 lancers, elle fluctue. Le dé est équilibré : $P(1) = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$.

Ex. 20 ★★☆ **Une urne mystère simulée**

(a) $\frac{9}{20} = 0{,}45$; $\frac{74}{200} = 0{,}37$; $\frac{612}{2\,000} = 0{,}306$; $\frac{6\,018}{20\,000} = 0{,}300\,9$.

(b) C'est la fluctuation : d'une série de tirages à l'autre, les résultats changent, surtout quand il y a peu de tirages.

(c) La colonne de 20 000 tirages : sur un grand nombre d'essais, la fréquence se stabilise autour de la probabilité. On estime $P(\text{rouge}) \approx 0{,}3$.

(d) $P(\text{rouge}) = \dfrac{\text{nombre de rouges}}{10} \approx 0{,}3$, donc $10 \times 0{,}3 = 3$: l'urne contient probablement 3 boules rouges.

(e) $500 \times 0{,}3 = 150$: on peut s'attendre à environ 150 rouges. Ce n'est pas garanti, c'est un ordre de grandeur.

Ex. 21 ★★☆ **La roue de la kermesse**

(a) Les secteurs n'ont pas le même angle, ils ne sont pas équiprobables. $P(A) = \frac{160}{360} = \frac{4}{9}$, et non $\frac{1}{3}$.

(b) B et C ensemble font $110 + 90 = 200^\circ$, donc $P(B \text{ ou } C) = \frac{200}{360} = \frac{5}{9}$.

(c) Non : $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$, Paul a plus de chances de gagner que Zoé. Le jeu n'est pas équitable.

(d) Il faut $P(A) = \frac{1}{2}$, soit un angle de $\frac{360}{2} = 180^\circ$ pour A. On ajoute $180 - 160 = 20^\circ$ à A, donc C mesure $90 - 20 = 70^\circ$. Contrôle : $110 + 70 = 180^\circ$.

Ex. 22 ★★★ **Le dé à 8 faces truqué d'Inès**

(a) La somme des probabilités des 8 faces vaut 1, donc les faces 1 à 7 se partagent $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Elles ont la même probabilité : $P(3) = 0{,}7 \div 7 = 0{,}1$. La probabilité d'obtenir la face 3 est 0,1.

(b) Les issues favorables sont 2, 4, 6 et 8, mais elles n'ont pas la même probabilité : on additionne. $P(\text{pair}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}6$, soit $60\,\%$. Attention : « 4 faces sur 8 » donnerait $50\,\%$, ce qui est faux car le dé est truqué.

(c) Non. Les issues ne sont pas équiprobables, donc « favorables ÷ total » ne s'applique pas. Les faces 2, 3, 5 et 7 ont chacune la probabilité 0,1 : $P(\text{premier}) = 4 \times 0{,}1 = 0{,}4 = \frac{2}{5}$. C'est moins d'une chance sur deux : Inès a tort.

(d) Nombre attendu : $600 \times 0{,}3 = 180$. Elle peut s'attendre à obtenir le 8 environ 180 fois. Ce n'est pas certain : c'est un ordre de grandeur, le résultat réel fluctue (par exemple 173 ou 188 fois).

Ex. 23 ★★★ **Malik simule un dé à 12 faces**

(a) Les bornes sont comprises : (0;12) donne un entier de 0 à 12, soit $12 - 0 + 1 = 13$ résultats possibles, dont le 0 qui n'est pas une face. La bonne formule est =ALEA.ENTRE.BORNES(1;12).

(b) Le dé est équilibré : il y a équiprobabilité. Issues favorables : 4, 8 et 12, soit 3 issues sur 12. $P(M) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

(c) Fréquence : $\frac{12}{30} = 0{,}4$, alors que $P(M) = 0{,}25$. Léa a tort : 30 lancers, c'est trop peu. Sur peu d'essais, la fréquence fluctue beaucoup et n'est pas la probabilité ; cela ne prouve pas que la formule est fausse.

(d) Fréquence : $\frac{7\,479}{30\,000} = 0{,}249\,3$, très proche de 0,25. Sur un grand nombre d'essais, la fréquence se stabilise autour de la probabilité (loi des grands nombres).

(e) Pas forcément. D'une série à l'autre, les résultats fluctuent : il obtiendra un nombre proche de $300 \times \frac{1}{4} = 75$, mais sans doute différent de 68 (par exemple 71 ou 79).

Ex. 24 ★★★ **La roue aux angles cachés**

(a) La probabilité d'un secteur est angle $\div 360^\circ$: $P(\text{rouge}) = \frac{126}{360} = \frac{7}{20} = 0{,}35$, soit 35 %.

(b) Fréquence : $\frac{994}{4\,000} = 0{,}248\,5$. Avec 4 000 tours, le nombre d'essais est grand : la fréquence est stabilisée près de la probabilité, donc $P(\text{vert}) \approx 0{,}248\,5$.

(c) Angle vert $\approx 0{,}248\,5 \times 360 = 89{,}46^\circ$. Le multiple de 18° le plus proche est 90° ($72^\circ = 4 \times 18^\circ$ est trop loin). Le secteur vert mesure 90°, donc le bleu mesure $360 - 126 - 90 = 144^\circ$.

(d) $P(\text{bleu}) = \frac{144}{360} = \frac{2}{5}$. Contrôle : $\frac{7}{20} + \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = 1$. Les trois secteurs ne valent pas $\frac{1}{3}$ chacun.

(e) Chloé a tort : le hasard n'a pas de mémoire. La roue ne « se souvient » pas des tours précédents ; au cinquième tour, la probabilité d'obtenir bleu est toujours $\frac{2}{5}$.

4. *Deux épreuves : tableau à double entrée*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : compter les cases**

(a) Il y a 2 lignes (P, F) et 6 colonnes : $2 \times 6 = 12$ cases, pas $2 + 6 = 8$.

(b) Une seule case sur toutes est favorable, donc le tableau a 144 cases. Il faut un nombre n tel que $n \times n = 144$: $12 \times 12 = 144$. Le dé a 12 faces.

Ex. 25 (suite)

(c) Le tableau a $20 \times 4 = 80$ cases, qui ont toutes la même probabilité, et une seule est favorable : $P = \frac{1}{80} = 1{,}25\,\%$.

(d) La ligne 3 et la colonne 3 font $3 + 3 - 1 = 5$ cases, car la case (3; 3) n'est comptée qu'une fois. Le tableau a $3 \times 3 = 9$ cases : $P = \frac{5}{9}$.

(e) Lucie a regroupé (1; 2) et (2; 1) : ses 6 cas n'ont donc pas la même probabilité. Le tableau a 9 cases, et 3 sont sur la diagonale : $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(f) Les cases favorables sont $(F; 2)$, $(F; 4)$ et $(F; 6)$, soit 3 cases sur 12 : $P = \frac{3}{12} = 0{,}25$.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : somme de deux dés à 4 faces**

(a) Ligne 1 : 2, 3, 4, 5 ; ligne 2 : 3, 4, 5, 6 ; ligne 3 : 4, 5, 6, 7 ; ligne 4 : 5, 6, 7, 8.

(b) Les cases (1; 4), (2; 3), (3; 2) et (4; 1) sont toutes différentes, ce qui fait 4 cases sur 16 : $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

(c) Somme 7 : (3; 4) et (4; 3) ; somme 8 : (4; 4). Cela fait 3 cases : $P = \frac{3}{16} = 18{,}75\,\%$.

(d) Yanis oublie que (1; 2) (vert 1, jaune 2) et (2; 1) (vert 2, jaune 1) sont deux cases différentes. Il y a 2 cases favorables sur 16 : $P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

(e) Les sommes premières sont 2 (1 case), 3 (2 cases), 5 (4 cases) et 7 (2 cases), soit 9 cases : $P = \frac{9}{16} = 0{,}5625$.

Ex. 27 ★★☆ **Pièce puis dé : le jeu du produit**

(a) Il y a $2 \times 4 = 8$ issues (et non $2 + 4 = 6$). Ligne P : 1, 2, 3, 4 ; ligne F : 2, 4, 6, 8.

(b) Les cases favorables sont $(P; 4)$, $(F; 2)$, $(F; 3)$ et $(F; 4)$, soit 4 cases sur 8 : $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Un score d'au moins 4 a une chance sur deux.

(c) Il y a 6 scores pairs (2 et 4 sur la ligne P, et toute la ligne F) et 2 scores impairs. Rayan gagne avec la probabilité $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ et Lina avec $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$: le jeu n'est pas équitable, il avantage Rayan.

(d) $P(1) = \frac{1}{8}$, $P(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(3) = \frac{1}{8}$, $P(4) = \frac{1}{4}$, $P(6) = \frac{1}{8}$ et $P(8) = \frac{1}{8}$. Somme : $\frac{1+2+1+2+1+1}{8} = \frac{8}{8} = 1$. Le total vaut bien 1.

Ex. 28 ★★☆ **Numéroter les boules de même couleur**

(a) Chaque case contient un couple : ligne R1 : $(R1; R1)$, $(R1; R2)$, $(R1; R3)$, $(R1; V)$, et ainsi de suite jusqu'à la ligne V. Cela fait $4 \times 4 = 16$ cases, toutes de même probabilité.

Ex. 28 **(suite)**

(b) Les 3 issues d'Adam n'ont pas la même probabilité. Une seule case sur 16, $(V;V)$, donne deux vertes : $P = \frac{1}{16}$.

(c) Deux rouges : carré de $3 \times 3 = 9$ cases ; deux vertes : 1 case. Cela fait 10 cases sur 16 : $P = \frac{10}{16} = 0{,}625$.

(d) Le contraire est « aucune verte », c'est-à-dire deux rouges : 9 cases. $P = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. La probabilité de tirer au moins une verte est $\frac{7}{16}$.

Ex. 29 ★★☆ **L'écart entre deux dés**

(a) $6 \times 6 = 36$ cases (et non $6 + 6 = 12$).

(b) Ce sont les deux diagonales voisines de la diagonale principale : $(1;2)$, $(2;3)$, …, $(5;6)$ et leurs inverses $(2;1)$, …, $(6;5)$, qui sont des cases différentes. Cela fait $5 + 5 = 10$ cases : $P = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

(c) Écart 4 : $(1;5)$, $(5;1)$, $(2;6)$, $(6;2)$; écart 5 : $(1;6)$, $(6;1)$. Cela fait 6 cases : $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(d) Au plus 1 : la diagonale (6 cases) plus 10 cases, soit 16 cases, donc $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. Au moins 2 : $36 - 16 = 20$ cases, donc $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. Le jeu n'est pas équitable : il avantage Sacha.

Ex. 30 ★★★ **Deux dés à 8 faces : le défi de Lille**

(a) Non. Une issue est un couple (dé orange ; dé violet). Le tableau a 8 lignes de 8 cases, donc $8 \times 8 = 64$ cases. Il y a 64 issues équiprobables, et non 16 : le nombre d'issues est un produit, pas une somme.

(b) La dernière ligne compte 8 cases et la dernière colonne aussi. La case $(8;8)$ appartient aux deux : on ne la compte qu'une fois. Cela donne $8 + 8 - 1 = 15$ cases favorables, donc $P(A) = \frac{15}{64}$.

(c) $\overline{A}$ = « aucun 8 » : les deux dés donnent un nombre de 1 à 7. Cela forme un carré de $7 \times 7 = 49$ cases. $P(A) = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}$, on retrouve le même résultat. En pourcentage : $\frac{15}{64} = 0{,}234375$, soit environ 23,4 %.

(d) Non. « Un 3 et un 5 » correspond à deux cases différentes : $(3;5)$ et $(5;3)$.
Donc $P = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$. Malo a regroupé deux issues en une seule.

(e) Somme au moins 13 : 4 cases donnent 13 [$(5;8)$, $(6;7)$, $(7;6)$, $(8;5)$], 3 cases donnent 14, 2 cases donnent 15 et 1 case donne 16. Au total, $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ cases, donc $P = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$. Plus grand nombre au plus 3 : c'est le carré 3×3 en haut à gauche, soit 9 cases, donc $P = \frac{9}{64}$. Comme $\frac{10}{64} > \frac{9}{64}$, le jeu n'est pas équitable : il avantage Inès.

Ex. 31 ★★★ **La tombola de Brest : sans remise**

(a) On ne peut pas tirer deux fois le même ticket : on barre les 4 cases de la diagonale, de $(G_1;G_1)$ à $(P_2;P_2)$. Les autres cases contiennent les couples, par exemple $(G_1;G_2)$ ou $(P_2;G_1)$. Il reste $4 \times 4 - 4 = 12$ cases, donc 12 issues équiprobables
(c'est aussi 4×3).

(b) Non. Zoé gagne sur les lignes G_1 et G_2 : $3 + 3 = 6$ cases, donc $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Hugo gagne sur les colonnes G_1 et G_2 : $3 + 3 = 6$ cases non barrées, donc $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Hugo a autant de chances que Zoé.

(c) Non. Deux gagnants : $(G_1;G_2)$ et $(G_2;G_1)$, donc $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Aucun gagnant : $(P_1;P_2)$ et $(P_2;P_1)$, donc $\frac{1}{6}$. Un seul gagnant : les $12 - 4 = 8$ autres cases, donc $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Vérification : $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1$. En regroupant les cases, Léa obtient trois résultats qui n'ont pas la même probabilité.

(d) Avec remise, le tableau garde ses $4 \times 4 = 16$ cases, donc 16 issues équiprobables. Deux gagnants : $(G_1;G_1)$, $(G_1;G_2)$, $(G_2;G_1)$ et $(G_2;G_2)$. Cela fait 4 cases, donc $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\,\%$.

(e) Le contraire est « aucun gagnant » : c'est le carré formé par les lignes P_1, P_2 et les colonnes P_1, P_2, soit 4 cases. Avec remise, $P = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$. Sans remise, $P = 1 - \frac{2}{12} = \frac{5}{6}$. Comme $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ et $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, la probabilité est plus petite avec remise.

Ex. 32 ★★★ **Le nombre mystère de la kermesse**

(a) Ligne 1 : 11, 12, 13, 14. Ligne 2 : 21, 22, 23, 24. Ligne 3 : 31, 32, 33, 34. Il y a $3 \times 4 = 12$ issues, et non $3 + 4 = 7$. Les deux épreuves sont équilibrées, donc les 12 cases sont équiprobables.

(b) Pair : le dé donne 2 ou 4, ce sont les colonnes 2 et 4. Cela fait 6 cases, donc $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\,\%$. Multiple de 3 : 12, 21, 24 et 33, soit 4 cases, donc $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

(c) Non. Les événements ne sont pas incompatibles : 12 et 24 sont à la fois pairs et multiples de 3. On compte chaque case une seule fois : 12, 14, 21, 22, 24, 32, 33, 34. Cela fait $6 + 4 - 2 = 8$ cases, donc $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, et non $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

(d) Faux. 23 correspond à une seule case, la case $(2;3)$, donc $P = \frac{1}{12}$. Les chiffres 2 et 3 donnent 23 ou 32, soit les cases $(2;3)$ et $(3;2)$, qui sont deux issues différentes. Donc $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Ex. 32 **(suite)**

(e) Supérieur ou égal à 22 : 22, 23 et 24 sur la ligne 2, puis toute la ligne 3 (31, 32, 33, 34). Cela fait 7 cases, donc $P = \frac{7}{12}$. Le nombre attendu de lots est $600 \times \frac{7}{12} = 350$. Le forain doit prévoir environ 350 lots.

5. *Deux épreuves : arbre, avec ou sans remise (complément)*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : branches et chemins**

(a) Les branches qui partent d'un même point ont une somme de 1 : $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

(b) $1 - 0{,}3 - 0{,}45 = 0{,}25$.

(c) On multiplie le long du chemin : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

(d) $0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$, soit 30 %.

(e) On additionne les deux chemins, on ne les multiplie pas : $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.

(f) La somme de tous les chemins vaut 1 : $1 - \frac{9+3+3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : avec ou sans remise, la seconde branche**

(a) Avec remise, la seconde épreuve est identique à la première : $\frac{3}{7}$.

(b) Il reste un jeton de moins : 6 jetons, dont 2 verts.

(c) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (et non $\frac{3}{7}$).

(d) Il reste 6 jetons : 3 verts et 3 jaunes. On a donc V avec $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et J avec $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Leur somme vaut bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

(e) $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$.

(f) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

Ex. 35 ★★☆ **Un arbre décrit en texte, sans remise**

(a) De la racine partent C avec $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et P avec $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Il reste ensuite 5 cartes. Après C (il reste 1 cœur et 4 piques) : C avec $\frac{1}{5}$ et P avec $\frac{4}{5}$. Après P (il reste 2 cœurs et 3 piques) : C avec $\frac{2}{5}$ et P avec $\frac{3}{5}$. À chaque point, la somme des branches vaut 1.

(b) C puis C : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$; C puis P : $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$; P puis C : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$; P puis P : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

(c) $\frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} = \frac{15}{15} = 1$: le contrôle est bon.

(d) Le contraire de « au moins un cœur » est « deux piques ». Donc $P = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. La probabilité que Lucas obtienne au moins un cœur est $\frac{3}{5}$.

Ex. 36 ★★☆ **Erreurs d'élèves : un bonbon de chaque parfum**

(a) Le tirage se fait sans remise : après une fraise, il reste 7 bonbons, dont 3 au citron. La seconde branche vaut donc $\frac{3}{7}$ et non $\frac{3}{8}$. On obtient $P(\text{F puis C}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$.

(b) Après un citron, il reste 7 bonbons, dont 5 à la fraise : $P(\text{C puis F}) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$. La probabilité que Noé prenne un citron puis une fraise est $\frac{15}{56}$.

(c) Non, Hugo a tort. L'événement est formé de deux chemins, F puis C et C puis F, et on additionne leurs probabilités : $\frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$. La probabilité d'avoir un bonbon de chaque parfum est $\frac{15}{28}$.

(d) Sans remise, un bonbon ne sort pas deux fois : il y a $8 \times 7 = 56$ couples. Couples de parfums différents : $5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$. On retrouve bien $\frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

Ex. 37 ★★☆ **Retrouver le contenu d'une urne**

(a) $0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$, donc $p = 0{,}7$. Le nombre de boules noires est $10 \times 0{,}7 = 7$. L'urne contient 7 boules noires et 3 blanches.

(b) $P(\text{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, donc $P(\text{B puis B}) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$, soit 9 %. La probabilité d'obtenir deux boules blanches est de 9 %.

(c) Il y a deux chemins, N puis B et B puis N : $0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$. Contrôle : $0{,}49 + 0{,}09 + 0{,}42 = 1$. La probabilité d'avoir une boule de chaque couleur est 0,42.

(d) Faux. Sans remise, après une noire, il reste 9 boules, dont 6 noires : $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$, soit environ 0,47 et non 0,49. Sans remise, la probabilité d'obtenir deux noires est $\frac{7}{15}$.

Ex. 38 ★★★ **Avec ou sans remise : le jeu du forain**

(a) Avec remise, la seconde épreuve est identique à la première. Deux chemins réalisent l'événement. Chemin O puis O : $\frac{6}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$. Chemin G puis G : $\frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$. On additionne les deux chemins : $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$. Avec remise, Mathis gagne avec une probabilité de $\frac{5}{9}$.

(b) Jade n'a compté qu'un seul chemin, O puis G. Or « une boule de chaque couleur » est formé de deux chemins : O puis G, et G puis O. On a donc $\frac{6}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$. Contrôle : $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$. Ces deux événements sont contraires, le contrôle est donc bon.

Ex. 38 **(suite)**

(c) Sans remise, il reste 8 boules. Si la première boule est O, il reste 5 O et 3 G : les branches portent O avec $\frac{5}{8}$ et G avec $\frac{3}{8}$ (somme : 1). Si la première boule est G, il reste 6 O et 2 G : les branches portent O avec $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ et G avec $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Chemin O puis O : $\frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$. Chemin G puis G : $\frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{12}$. Total : $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$. Sans remise, Mathis gagne avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

(d) Faux. Avec remise, Mathis gagne avec une probabilité de $\frac{5}{9}$ et le forain avec $\frac{4}{9}$. Le jeu favorise donc Mathis : il n'est pas équitable. Sans remise, le forain gagne avec $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, comme Mathis. Le jeu n'est donc équitable que sans remise.

(e) Sans remise, une boule ne peut pas sortir deux fois : il y a $9 \times 8 = 72$ couples possibles. Couples de deux orange : $6 \times 5 = 30$. Couples de deux grises : $3 \times 2 = 6$. Cela fait $30 + 6 = 36$ couples favorables. On trouve $\frac{36}{72} = \frac{1}{2}$, le même résultat qu'avec l'arbre.

Ex. 39 ★★★ **Une roue, puis une urne**

(a) La roue mesure 360°, donc le secteur bleu mesure $360° - 144° = 216°$. $P(\text{bleu}) = \frac{216}{360} = 0{,}6$. La probabilité d'obtenir le bleu est de 0,6, soit 60 %.

(b) De la racine partent deux branches : jaune avec $\frac{144}{360} = 0{,}4$ et bleu avec 0,6 (somme : 1). Du jaune partent G avec $\frac{3}{5} = 0{,}6$ et P avec 0,4 (somme : 1). Du bleu partent G avec $\frac{1}{5} = 0{,}2$ et P avec 0,8 (somme : 1). À chaque point, la somme des branches vaut bien 1.

(c) Les produits 0,24 et 0,12 sont justes : ce sont les probabilités des chemins jaune puis G ($0{,}4 \times 0{,}6$) et bleu puis G ($0{,}6 \times 0{,}2$). Mais on ne multiplie jamais deux chemins entre eux : on additionne leurs probabilités. $P(\text{gagner}) = 0{,}24 + 0{,}12 = 0{,}36$. Yanis a donc 36 % de chances de gagner.

(d) Le chemin jaune puis G vaut toujours 0,24. Le chemin bleu puis G doit donc valoir $0{,}44 - 0{,}24 = 0{,}2$. Or $0{,}6 \times \frac{1}{3} = 0{,}2$: dans l'urne K, il faut une boule gagnante sur trois. Si on ajoute 1 gagnante, on a 2 gagnantes sur 6 boules, et $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. On vérifie : $0{,}24 + 0{,}6 \times \frac{2}{6} = 0{,}24 + 0{,}2 = 0{,}44$. Il faut ajouter 1 boule gagnante dans l'urne K.

(e) Le nombre attendu est $250 \times 0{,}36 = 90$. Sur 250 parties, on peut s'attendre à environ 90 parties gagnées.

Ex. 40 ★★★ **Un code à deux chiffres, avec ou sans remise**

(a) Sans remise, il y a 6 choix pour le premier jeton, puis 5 pour le second : $6 \times 5 = 30$ nombres. Avec remise, il y a encore 6 choix pour le second jeton : $6 \times 6 = 36$ nombres. La différence vient des 6 nombres à deux chiffres égaux (11, 22, …, 66), impossibles sans remise.

(b) Sans remise, il reste 5 jetons, dont les 3 pairs. La bonne probabilité est donc $\frac{3}{5}$, et non $\frac{3}{6}$. Si le premier jeton est pair, il reste 2 pairs sur 5. On additionne les deux chemins : $\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{30} + \frac{6}{30} = \frac{1}{2}$. La probabilité que le nombre soit pair est $\frac{1}{2}$.

(c) Les chiffres supérieurs à 4 sont 5 et 6. Sans remise : $\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, car il ne reste qu'un jeton favorable sur 5. Avec remise : $\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$, car la seconde épreuve est identique à la première. Comme $\frac{1}{15} \neq \frac{1}{9}$, l'affirmation de Sam est fausse.

(d) Le contraire de « au moins un 6 » est « aucun 6 ». Sans remise, $P(\text{aucun 6}) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$, donc $P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Vérification par les couples : il y en a 5 de la forme $(6; x)$ et 5 de la forme $(x; 6)$, soit 10 sur 30. On retrouve $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

(e) Avec remise, $P(\text{aucun 6}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, donc $P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Sans remise, on a trouvé $\frac{1}{3} = \frac{12}{36}$. Or $\frac{12}{36} > \frac{11}{36}$. Lou a donc intérêt à jouer sans remise.

6. *Exercices type brevet*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : une urne qui change**

(a) Il y a $7 + 5 + 8 = 20$ boules, dont 5 jaunes : $P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

(b) 7 boules vertes sur 20 : $P = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

(c) Les boules non noires sont $7 + 5 = 12$: $P = \frac{12}{20} = 0{,}6 = 60\,\%$ (ou $1 - \frac{8}{20}$).

(d) Aucune boule n'est bleue : $P = 0$. C'est un événement impossible.

(e) Il y a maintenant $20 + 4 = 24$ boules, dont $5 + 4 = 9$ jaunes : $P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. Attention : le total change aussi.

(f) Il reste $20 - 3 = 17$ boules, toujours 7 vertes : $P = \frac{7}{17}$.

Ex. 42 ★☆☆ Automatismes : vrai ou faux ?

(a) Vrai : les nombres premiers sont 2, 3, 5 et 7, soit 4 issues sur 8 : $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

(b) Vrai : $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72 = 72\,\%$.

(c) Faux : les 4 issues sont (pile ; pile), (pile ; face), (face ; pile) et (face ; face) ; deux d'entre elles conviennent : $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(d) Faux : le tableau a 4 lignes et 4 colonnes, donc $4 \times 4 = 16$ issues.

(e) Faux : le hasard n'a pas de mémoire, la probabilité d'obtenir pile reste $\frac{1}{2}$.

(f) Vrai : les doubles forment la diagonale du tableau, 4 cases sur 16 : $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Ex. 43 ★★☆ Un dé, une urne, deux joueurs

(a) Ligne 1 : 2, 3, 4 ; ligne 2 : 3, 4, 5 ; ligne 3 : 4, 5, 6 ; ligne 4 : 5, 6, 7.

(b) 4 résultats pour le dé et 3 pour l'urne : $4 \times 3 = 12$ issues équiprobables.

(c) Les cases $(2;3)$, $(3;2)$ et $(4;1)$ donnent 5 : $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. La probabilité d'obtenir 5 est $\frac{1}{4}$.

(d) Contraire : « somme inférieure à 3 », qui correspond à la seule case $(1;1)$. $P = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. La probabilité que la somme soit au moins égale à 3 est $\frac{11}{12}$.

(e) Multiples de 3 (3 ou 6) : 4 cases, $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Sommes paires : 6 cases, $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, Malo a plus de chances de gagner : le jeu n'est pas équitable.

Ex. 44 ★★☆ La roue de la kermesse de Vannes

(a) Roue : $P(\text{rouge}) = \frac{150}{360} = \frac{5}{12}$, $P(\text{bleu}) = \frac{90}{360} = \frac{3}{12}$, $P(\text{vert}) = \frac{120}{360} = \frac{4}{12}$. Tableur : 12 nombres équiprobables, dont 5, 3 et 4 par couleur. Les probabilités sont les mêmes : la formule convient.

(b) $f = \frac{268}{800} = 0{,}335$, proche de $P(\text{vert}) = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$: l'écart est dû à la fluctuation.

(c) $P(\text{bleu}) = \frac{90}{360} = 0{,}25 = 25\,\%$. Nombre attendu : $800 \times 0{,}25 = 200$ bleus
(Zoé en a obtenu 188, c'est proche).

(d) Non : $\frac{344}{800} = 0{,}43$ est une fréquence, qui fluctue d'une simulation à l'autre. La probabilité est $\frac{5}{12} \approx 0{,}417$. Zoé confond fréquence et probabilité.

Ex. 45 ★★☆ Le sac de billes de Théo

(a) $8 \times \frac{1}{4} = 2$: le sac contient 2 billes vertes (et 6 rouges).

(b) Contraire de « verte » : $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%$. La probabilité de tirer une bille rouge est de 75 %.

(c) Avec remise, il y a 8 billes au premier tirage et 8 au second : $8 \times 8 = 64$ cases équiprobables. Le tableau a 64 cases.

(d) Les cases favorables croisent les 2 lignes vertes V_1, V_2 et les 2 colonnes vertes : $2 \times 2 = 4$ cases. $P = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$. La probabilité de tirer deux billes vertes est $\frac{1}{16}$.

(e) Contraire de « au moins une rouge » : « deux vertes ». $P = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. La probabilité de tirer au moins une bille rouge est $\frac{15}{16}$.

Ex. 46 ★★★ Deux tirages avec remise chez Elsa

(a) Les 4 boules ont la même probabilité d'être tirées, et 2 sont rouges : $P(R) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Une seule boule est verte, donc $P(V) = \frac{1}{4}$ et $P(\overline{V}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

(b) Ligne R1 : 2, 2, 1, 1. Ligne R2 : 2, 2, 1, 1. Ligne V : 1, 1, 0, 0. Ligne B : 1, 1, 0, 0. Le tableau compte $4 \times 4 = 16$ cases, qui ont toutes la même probabilité.

(c) Cases favorables : (R1 ; R1), (R1 ; R2), (R2 ; R1), (R2 ; R2), (V ; V) et (B ; B), soit 6 cases sur 16. $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$. Elsa a 37,5 % de chances de tirer deux boules de la même couleur.

(d) Les cases « 1 » sont au nombre de 8 sur 16 : $P = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, et non $\frac{1}{3}$. Kenza a tort : les résultats 0, 1 et 2 n'ont pas la même probabilité (4, 8 et 4 cases). C'est l'erreur de d'Alembert.

(e) Le contraire de « au moins une rouge » est « aucune rouge », c'est-à-dire les cases « 0 » : 4 cases sur 16. $P = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Elsa a une probabilité de 0,75 d'obtenir au moins une boule rouge.

Ex. 47 ★★★ La tombola du club de handball de Colmar

(a) Rouges : $40 \times 0{,}3 = 12$. Blanches : $40 \times \frac{1}{8} = 5$. Jaunes : $40 - 12 - 5 = 23$. L'urne contient 12 boules rouges, 5 blanches et 23 jaunes.

(b) $P(\text{rouge}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ et $P(\text{jaune}) = \frac{23}{40}$. Comme $\frac{23}{40} > \frac{12}{40}$, ils n'ont pas autant de chances : Maëlys a plus de chances de gagner que Hugo.

Ex. 47 **(suite)**

(c) Il faut autant de jaunes que de rouges, soit 12 : on retire $23 - 12 = 11$ boules jaunes. L'urne contient alors 29 boules, et chacun gagne avec la probabilité $\frac{12}{29}$. Le jeu est alors équitable.

(d) Si l'on ajoute x boules rouges, il faut $\frac{12+x}{40+x} = \frac{1}{2}$, donc $2(12 + x) = 40 + x$, soit $24 + 2x = 40 + x$ et $x = 16$. Vérification : $\frac{28}{56} = \frac{1}{2}$. Il faut ajouter 16 boules rouges.

(e) Faux. Il y a toujours 5 boules blanches, mais le total passe à 56 boules : $P(\text{blanche}) = \frac{5}{56} \approx 0{,}09$, ce qui est moins que $\frac{1}{8} = 0{,}125$. Changer le nombre total de boules change toutes les probabilités.

Ex. 48 ★★★ **Le jeu de l'écart**

(a) $f = \frac{212}{500} = 0{,}424$. Sacha a gagné 42,4 % des parties simulées.

(b) Le tableau a $6 \times 6 = 36$ cases équiprobables. Écart 0 : la diagonale, 6 cases. Écart 1 : les deux diagonales voisines, $5 + 5 = 10$ cases ($(1\,;2)$ et $(2\,;1)$ sont deux cases différentes). $P = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$. La fréquence 0,424 est proche de cette probabilité : l'écart vient de la fluctuation sur 500 parties.

(c) Non. Les dés n'ont pas de mémoire : à chaque partie, Sacha gagne toujours avec la probabilité $\frac{4}{9}$, quels que soient les résultats précédents. Le hasard ne « rattrape » rien.

(d) Romane gagne avec la probabilité $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Nombre attendu : $9\,000 \times \frac{5}{9} = 5\,000$. Romane peut s'attendre à gagner environ 5 000 parties.

(e) Écart 5 : les cases $(1\,;6)$ et $(6\,;1)$, soit 2 cases. Sacha aurait alors $16 + 2 = 18$ cases sur 36 : $P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, et Romane aussi $\frac{1}{2}$. Oui, le jeu devient équitable.