Probabilités conditionnelles : problèmes difficiles – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Probabilités conditionnelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Avant la formule des probabilités totales, on nomme la partition de l'univers : M et $\overline{M}$, ou M_1, M_2, M_3.
- « Sachant que » : on divise par la probabilité de ce qu'on sait, calculée avec **tous** les chemins qui y mènent.
- $P_T(M)$ n'est pas $P_M(T)$: un test fiable peut donner beaucoup de faux positifs si la maladie est rare.
- Une information « au hasard » et une information choisie ne conditionnent pas de la même façon (Monty Hall).
- « Il reste deux cas, donc une chance sur deux » est faux dès que les cas ne sont pas équiprobables.
- Une probabilité trouvée par une équation ou une inéquation doit rester entre 0 et 1.

Exercice 1 – Le test de dépistage ★★

Une maladie touche 1 % de la population. Le test est positif chez 99 % des malades et négatif chez 98 % des personnes saines. On note M « la personne est malade » et T « le test est positif ».

1. Construis l'arbre pondéré, puis calcule $P(T)$.
2. Une personne a un test positif. Calcule $P_T(M)$. Commente.
3. On fait passer deux tests. On admet qu'un malade a deux tests positifs avec une probabilité de 0,9801, et une personne saine avec une probabilité de 0,0004. Les deux tests d'une personne sont positifs : quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

Exercice 2 – Trois machines ★★

Une usine fabrique des pièces sur trois machines : M_1 produit 50 % des pièces, M_2 30 % et M_3 20 %. Leurs taux de pièces défectueuses sont respectivement 2 %, 3 % et 5 %. On note D « la pièce est défectueuse ».

1. Calcule $P(D)$.
2. Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_3 ?
3. On remplace M_3 par une machine de taux de défaut x. Quelle valeur maximale de x permet d'avoir $P(D) \leqslant 0{,}02$?

Exercice 3 – Le jeu télévisé à deux tours ★★

Au premier tour d'un jeu, le candidat tire au hasard un thème parmi trois : deux thèmes faciles, qu'il réussit avec une probabilité de 0,8, et un thème difficile, qu'il réussit avec une probabilité de 0,5. S'il réussit le premier tour, il joue la finale, qu'il gagne avec une probabilité de 0,5 ; sinon, il est éliminé. A : « le thème est difficile », R : « il réussit le premier tour », G : « il gagne la finale ».

1. Calcule $P(R)$.
2. Calcule $P(G)$.
3. Le candidat a gagné. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré le thème difficile ? Arrondis au centième.
4. Le candidat a perdu. Quelle est la probabilité qu'il ait échoué dès le premier tour ? Arrondis au centième.

Exercice 4 – Le témoin du taxi ★★★

Dans une ville, 85 % des taxis sont verts et 15 % sont bleus. Un taxi provoque un accident de nuit. Un témoin affirme qu'il était bleu. Des tests montrent que, dans ces conditions, le témoin reconnaît la bonne couleur dans 80 % des cas.

1. Calcule la probabilité que le témoin dise « bleu ».
2. Sachant qu'il dit « bleu », quelle est la probabilité que le taxi soit vraiment bleu ?
3. On note p la fiabilité du témoin. Pour quelles valeurs de p cette probabilité dépasse-t-elle $\frac{1}{2}$?

Exercice 5 – Le contrôle antidopage à deux étapes ★★★

Dans une compétition, 5 % des sportifs sont dopés (D). Un premier test est positif (T_1) chez 96 % des dopés et chez 3 % des non-dopés. Seuls les sportifs positifs au premier test passent une contre-expertise (T_2), positive chez 99 % des dopés et chez 2 % des non-dopés qui la passent. Un sportif est sanctionné (Z) si ses deux tests sont positifs.

1. Calcule $P(T_1)$.
2. Un sportif est positif au premier test. Quelle est la probabilité qu'il soit dopé ? Arrondis au centième.
3. Calcule la probabilité qu'un sportif soit sanctionné.
4. Un sportif est sanctionné. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ? Arrondis au millième et commente.

Exercice 6 – Monty Hall et sa variante piège ★★★

Un candidat choisit une porte parmi trois. Derrière l'une se trouve une voiture, derrière les deux autres une chèvre. On note V_1 « la voiture est derrière la porte choisie ».

1. L'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre toujours une autre porte cachant une chèvre. Le candidat a-t-il intérêt à changer de porte ?
2. Cette fois, l'animateur ne sait pas où est la voiture : il ouvre au hasard l'une des deux autres portes, et il se trouve qu'elle cache une chèvre. Faut-il changer ?

Exercice 7 – Les coffrets de Bertrand ★★★

Trois coffrets contiennent chacun deux pièces : le premier deux pièces d'or, le deuxième deux pièces d'argent, le troisième une pièce d'or et une d'argent. On choisit un coffret au hasard, puis une pièce au hasard dans ce coffret.

1. Calcule la probabilité que la pièce tirée soit en or.
2. La pièce tirée est en or. Quelle est la probabilité que l'autre pièce du coffret soit aussi en or ?

Exercice 8 – Le paradoxe des deux enfants ★★★

Une famille a deux enfants. On admet que chaque enfant est un garçon ou une fille avec la même probabilité, indépendamment de l'autre. On note par exemple GF « l'aîné est un garçon, le cadet une fille ».

1. Écris les issues possibles et donne la probabilité de chacune.
2. On sait que la famille a au moins un garçon. Quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?
3. On sait cette fois que l'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité que la famille ait deux garçons ?
4. Explique pourquoi les deux réponses sont différentes.

Exercice 9 – L'urne de Pólya ★★★

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire une boule, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur, puis on tire une deuxième boule. On note R_1 : « la première boule est rouge » et R_2 : « la

deuxième boule est rouge ».

1. Calcule $P(R_2)$. Que remarques-tu ?
2. Sachant que la deuxième boule est rouge, quelle est la probabilité que la première l'ait été aussi ?
3. Démontre le résultat de la question 1 dans le cas général, avec r boules rouges et b boules blanches.

Exercice 10 – Une série d'exercices ★★★

Un élève enchaîne des exercices. S'il réussit un exercice, il réussit le suivant avec une probabilité de 0,8 ; s'il échoue, il réussit le suivant avec une probabilité de 0,4. Il réussit le premier avec une probabilité de 0,5. On note R_n « il réussit le n-ième exercice » et $p_n = P(R_n)$.

1. Calcule p_2 puis p_3.
2. Sachant qu'il a réussi le deuxième exercice, quelle est la probabilité qu'il ait réussi le premier ?
3. Montre que $p_{n+1} = 0{,}4\,p_n + 0{,}4$. Que se passe-t-il si, pour un certain n, $p_n = \dfrac{2}{3}$?

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève est faux : explique l'erreur, puis corrige.

a) Jeu à quatre portes, une voiture. Le candidat choisit une porte ; l'animateur, qui sait, ouvre une autre porte à chèvre. « Il reste trois portes fermées : chacune a une chance sur trois. Changer ne sert à rien. »

b) Une maladie touche 0,5 % des gens ; le test est positif chez tous les malades et chez 1 % des personnes saines. « Le test ne se trompe que dans 1 % des cas, donc un positif est malade à 99 %. »

c) Deux ateliers font 70 % et 30 % des pièces, avec 1 % et 5 % de défauts. « Le taux de défaut global est $\dfrac{1+5}{2} = 3\,\%$. »

d) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$ et $P_A(B) = 0{,}75$. « Donc $P_B(A) = 0{,}75$. »

e) $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}42$. « $P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. »

f) Une urne contient 4 rouges et 6 blanches ; on tire deux boules sans remise. « La deuxième dépend de la première : comme une rouge est peut-être partie, $P(R_2) = \dfrac{3}{9}$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. A_1, A_2, A_3 forment une partition, avec $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}5$, $P(A_3) = 0{,}3$, et $P_{A_1}(B) = 0{,}5$, $P_{A_2}(B) = 0{,}2$, $P_{A_3}(B) = 0{,}1$. Alors $P(B)$ vaut :

   A 0,8 **B** 0,23 **C** 0,03 **D** 0,1

2. Avec les mêmes données, $P_B(A_1)$ vaut :

   A 0,5 **B** 0,1 **C** 0,2 **D** $\dfrac{10}{23}$

3. Une maladie touche 10 % des gens. Un test est positif chez 90 % des malades et chez 10 % des sains. Un test est positif : la personne est malade avec la probabilité :

   A 0,5 **B** 0,9 **C** 0,09 **D** 0,1

4. $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}38$. Alors $P_{\overline{A}}(B)$ vaut :

   A 0,08 **B** 0,62 **C** 0,2 **D** 0,5

5. Une urne contient 3 rouges et 1 blanche. On tire deux boules sans remise ; la deuxième est rouge. La première était rouge avec la probabilité :

   A $\dfrac{2}{3}$ **B** $\dfrac{3}{4}$ **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** $\dfrac{1}{3}$

6. S'il pleut un jour, il pleut le lendemain avec la probabilité 0,6 ; s'il ne pleut pas, avec la probabilité 0,1. On note p_n la probabilité qu'il pleuve le n-ième jour. Alors :

A $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}1$ **B** $p_{n+1} = 0{,}7p_n$ **C** $p_{n+1} = 0{,}5p_n$ **D** $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).