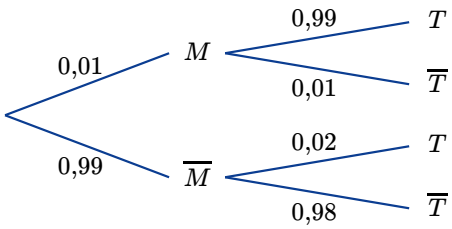
Corrigé – Probabilités conditionnelles : problèmes difficiles

Mathématiques – Première spécialité

Probabilités conditionnelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Le test de dépistage ★★



1. Premier niveau : $P(M) = 0{,}01$ et $P(\overline{M}) = 0{,}99$.
   Second niveau : $P_M(T) = 0{,}99$; le test est négatif chez 98 % des sains, donc $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$.
   M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$
   $P(T) = 0{,}01 \times 0{,}99 + 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0099 + 0{,}0198 = 0{,}0297$.

2. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0099}{0{,}0297} = \dfrac{99}{297} = \dfrac{1}{3}$.
   Une chance sur trois seulement, avec un test fiable à 99 % : la maladie est rare.
   Les faux positifs (0,0198) sont deux fois plus nombreux que les vrais positifs (0,0099).

3. On note D « les deux tests sont positifs » : $P_M(D) = 0{,}9801$ et $P_{\overline{M}}(D) = 0{,}0004$.
   Chemins : $P(M \cap D) = 0{,}01 \times 0{,}9801 = 0{,}009801$ et $P(\overline{M} \cap D) = 0{,}99 \times 0{,}0004 = 0{,}000396$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = 0{,}009801 + 0{,}000396 = 0{,}010197$.
   $P_D(M) = \dfrac{0{,}009801}{0{,}010197} = \dfrac{9\,801}{10\,197} = \dfrac{99}{103} \approx 0{,}961$.
   Avec deux tests positifs, la personne est malade dans 96 % des cas environ : le second test élimine presque tous les faux positifs.

Exercice 2 – Trois machines ★★

1. M_1, M_2 et M_3 forment une partition de l'univers : chaque pièce vient d'une seule machine.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D)$
   $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}2 \times 0{,}05$
   $P(D) = 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}01 = 0{,}029$.

2. $P_D(M_3) = \dfrac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}029} = \dfrac{10}{29} \approx 0{,}345$.
   M_3 ne fait que 20 % des pièces mais plus d'un tiers des défauts.

3. Avec la nouvelle machine : $P(D) = 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}2x = 0{,}019 + 0{,}2x$.
   $0{,}019 + 0{,}2x \leqslant 0{,}02$
   $\iff 0{,}2x \leqslant 0{,}001$ *(on retranche* $0{,}019$*)*
   $\iff x \leqslant 0{,}005$ *(on divise par* $0{,}2 > 0$*)*

   La valeur maximale est $x = 0{,}005$: un taux de défaut d'au plus $0{,}5\ \%$.

Exercice 3 – Le jeu télévisé à deux tours ★★

1. $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(\overline{A}) = \dfrac{2}{3}$ (deux thèmes faciles sur trois) ; $P_{\overline{A}}(R) = 0{,}8$ et $P_A(R) = 0{,}5$.
   A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R) = \dfrac{2}{3} \times 0{,}8 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}5 = \dfrac{8}{15} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{16}{30} + \dfrac{5}{30} = \dfrac{7}{10}$.

2. Pour gagner, il faut réussir le premier tour puis la finale : G est inclus dans R, donc $P(G) = P(R \cap G)$.
   $P(G) = P(R) \times P_R(G) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$.

3. Chemin « difficile, réussi, gagné » : $P(A \cap G) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \dfrac{1}{12}$.
   $P_G(A) = \dfrac{P(A \cap G)}{P(G)} = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{20}{7} = \dfrac{5}{21} \approx 0{,}24$.
   C'est moins que $\dfrac{1}{3}$: savoir qu'il a gagné rend le thème difficile moins probable.

4. Perdre, c'est échouer au premier tour ou perdre la finale : $P(\overline{G}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
   Échouer au premier tour fait perdre : $P(\overline{R} \cap \overline{G}) = P(\overline{R}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
   $P_{\overline{G}}(\overline{R}) = \dfrac{0{,}3}{0{,}65} = \dfrac{6}{13} \approx 0{,}46$.

Exercice 4 – Le témoin du taxi ★★★

1. On note B « le taxi est bleu » et D « le témoin dit bleu » : $P(B) = 0{,}15$, $P_B(D) = 0{,}8$, $P_{\overline{B}}(D) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ (il se trompe).
   B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = 0{,}15 \times 0{,}8 + 0{,}85 \times 0{,}2 = 0{,}12 + 0{,}17 = 0{,}29$.

2. $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}29} = \dfrac{12}{29} \approx 0{,}414$.
   Moins d'une chance sur deux, malgré un témoin fiable à $80\ \%$: les taxis verts sont si nombreux que ses erreurs sur eux pèsent plus que ses bonnes réponses sur les bleus.

3. Même calcul avec p : $P_D(B) = \dfrac{0{,}15p}{0{,}15p + 0{,}85(1-p)}$.
   On veut $\dfrac{0{,}15p}{0{,}15p + 0{,}85(1-p)} > \dfrac{1}{2}$; le dénominateur est positif, on multiplie par lui puis par 2 :
   $0{,}3p > 0{,}15p + 0{,}85(1-p) \iff 0{,}15p > 0{,}85(1-p)$.
   $0{,}15p > 0{,}85\,(1-p)$
   $\iff 0{,}15p > 0{,}85 - 0{,}85p$ *(on développe)*
   $\iff p > 0{,}85$ *(on ajoute* $0{,}85p$*)*

   Comme $p \leqslant 1$: $p \in \,]0{,}85\,;\,1]$.
   Il faut un témoin fiable à plus de 85 %, c'est-à-dire plus fiable que la proportion de taxis verts.

Exercice 5 – Le contrôle antidopage à deux étapes ★★★

1. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T_1) = P(D) \times P_D(T_1) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T_1) = 0{,}05 \times 0{,}96 + 0{,}95 \times 0{,}03$
   $P(T_1) = 0{,}048 + 0{,}0285 = 0{,}0765$.

2. $P_{T_1}(D) = \dfrac{P(D \cap T_1)}{P(T_1)} = \dfrac{0{,}048}{0{,}0765} = \dfrac{32}{51} \approx 0{,}63$.
   Plus d'un positif sur trois n'est pas dopé : le premier test seul ne suffit pas pour sanctionner.

3. Deux chemins mènent à Z : « dopé, T_1, T_2 » et « non dopé, T_1, T_2 ».
   Le long d'un chemin, on multiplie.
   Dopé : $0{,}048 \times 0{,}99 = 0{,}04752$.
   Non dopé : $0{,}0285 \times 0{,}02 = 0{,}00057$.
   $P(Z) = 0{,}04752 + 0{,}00057 = 0{,}04809$.

4. $P_Z(\overline{D}) = \dfrac{0{,}00057}{0{,}04809} = \dfrac{57}{4\,809} = \dfrac{19}{1603} \approx 0{,}012$.
   Environ un sanctionné sur cent est innocent : la contre-expertise rend la sanction bien plus sûre que le premier test seul.

Exercice 6 – Monty Hall et sa variante piège ★★★

1. $P(V_1) = \dfrac{1}{3}$: le premier choix est fait au hasard.
   L'animateur peut toujours ouvrir une porte à chèvre : son geste ne change pas $P(V_1)$.
   Sans changer, le candidat gagne si V_1 est réalisé : probabilité $\dfrac{1}{3}$.
   En changeant, il gagne si V_1 n'est pas réalisé : la voiture est alors derrière l'autre porte encore fermée, car l'animateur a ouvert la seule porte à chèvre restante.
   Probabilité de gagner en changeant : $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
   Il faut changer de porte : on double ses chances.

2. On note G « la porte ouverte cache une chèvre ».
   Si V_1 est réalisé, les deux autres portes cachent des chèvres : $P_{V_1}(G) = 1$.
   Sinon, une des deux autres portes cache la voiture : $P_{\overline{V_1}}(G) = \dfrac{1}{2}$.
   V_1 et $\overline{V_1}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(G) = \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$.
   $P_G(V_1) = \dfrac{P(V_1 \cap G)}{P(G)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$.
   Une chance sur deux de chaque côté : changer ne change rien.
   L'information donnée au hasard n'est pas la même que celle de l'animateur qui sait.

Exercice 7 – Les coffrets de Bertrand ★★★

1. On note C_1, C_2, C_3 les coffrets choisis et O « la pièce tirée est en or » : $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \dfrac{1}{3}$.
   $P_{C_1}(O) = 1$, $P_{C_2}(O) = 0$, $P_{C_3}(O) = \dfrac{1}{2}$.
   C_1, C_2, C_3 forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(O) = \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times 0 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. L'autre pièce est en or si et seulement si on a choisi le premier coffret : on cherche $P_O(C_1)$.
   $P_O(C_1) = \dfrac{P(C_1 \cap O)}{P(O)} = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.
   Ce n'est pas $\dfrac{1}{2}$, comme le suggère l'intuition « il reste deux coffrets possibles » : le premier coffret donne de l'or à coup sûr, le troisième une fois sur deux.

Exercice 8 – Le paradoxe des deux enfants ★★★

1. Quatre issues : GG, GF, FG, FF.
   Elles sont équiprobables : chacune a la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

2. On note A « au moins un garçon » $= \{GG, GF, FG\}$: $P(A) = \dfrac{3}{4}$.
   « Deux garçons » est l'issue GG, contenue dans A.
   $P_A(GG) = \dfrac{P(GG)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

3. On note B « l'aîné est un garçon » $= \{GG, GF\}$: $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
   $P_B(GG) = \dfrac{P(GG)}{P(B)} = \dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

4. Les deux informations n'éliminent pas les mêmes issues.
   « Au moins un garçon » n'élimine que FF : il reste trois issues, dont une seule avec deux garçons.
   « L'aîné est un garçon » élimine FG et FF : il reste deux issues, dont une avec deux garçons.

Exercice 9 – L'urne de Pólya ★★★

1. $P(R_1) = \dfrac{2}{5}$.
   Après une rouge, l'urne contient 3 rouges et 3 blanches : $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{3}{6}$.
   Après une blanche, 2 rouges et 4 blanches : $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \dfrac{2}{6}$.
   R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{6}{30} + \dfrac{6}{30} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$.
   C'est la même valeur que $P(R_1)$.

2. $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{6/30}{12/30} = \dfrac{1}{2}$.

3. Après une rouge : $r+1$ rouges sur $r+b+1$ boules ; après une blanche : r rouges sur $r+b+1$ boules.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R_2) = \dfrac{r}{r+b} \times \dfrac{r+1}{r+b+1} + \dfrac{b}{r+b} \times \dfrac{r}{r+b+1}$
   $P(R_2) = \dfrac{r(r+1)+br}{(r+b)(r+b+1)} = \dfrac{r(r+1+b)}{(r+b)(r+b+1)}$ (on factorise r)
   $P(R_2) = \dfrac{r}{r+b} = P(R_1)$ (on simplifie par $r+b+1$).

Exercice 10 – Une série d'exercices ★★★

1. R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $p_2 = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$.
   Même raisonnement avec la partition R_2, $\overline{R_2}$:
   $p_3 = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}48 + 0{,}16 = 0{,}64$.

2. $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} = \dfrac{2}{3}$.

3. R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, avec $P(R_n) = p_n$ et $P(\overline{R_n}) = 1 - p_n$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $p_{n+1} = p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}4$
   $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}4 - 0{,}4p_n = 0{,}4\,p_n + 0{,}4$.
   Si $p_n = \dfrac{2}{3}$: $p_{n+1} = 0{,}4 \times \dfrac{2}{3} + 0{,}4 = \dfrac{4}{15} + \dfrac{6}{15} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.
   La probabilité reste ensuite toujours égale à $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève est faux : explique l'erreur, puis corrige.

a) *Les trois portes restantes ne sont pas équiprobables : l'animateur a choisi sa porte en sachant.*

Sans changer, on gagne avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$ du premier choix.

En changeant pour l'une des deux autres portes au hasard : la voiture y est avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$, puis on prend la bonne une fois sur deux.

$\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} > \dfrac{1}{4}$: il vaut mieux changer.

b) *Confusion entre $P_{\overline{M}}(T)$ et $P_T(\overline{M})$.*
$P(T) = 0{,}005 \times 1 + 0{,}995 \times 0{,}01 = 0{,}005 + 0{,}00995 = 0{,}01495$.
$P_T(M) = \dfrac{0{,}005}{0{,}01495} = \dfrac{100}{299} \approx 0{,}33$: un positif sur trois seulement est malade.

c) *Moyenne simple au lieu de la moyenne pondérée.*
Les deux ateliers forment une partition ; formule des probabilités totales :
$P(D) = 0{,}7 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}007 + 0{,}015 = 0{,}022$, soit 2,2 %.

d) *$P_B(A)$ se divise par $P(B)$, pas par $P(A)$.*
$P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$.
$P_B(A) = \dfrac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3$.

e) *$P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$ ne partent pas du même nœud.*
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}42 - 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}42 - 0{,}12 = 0{,}3$.
$P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$.

f) *$\dfrac{3}{9}$ est $P_{R_1}(R_2)$: on a oublié le cas où la première boule est blanche.*
R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition ; formule des probabilités totales :
$P(R_2) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} + \dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{90} + \dfrac{24}{90} = \dfrac{36}{90} = \dfrac{2}{5}$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. A_1, A_2, A_3 forment une partition, avec $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}5$, $P(A_3) = 0{,}3$, et $P_{A_1}(B) = 0{,}5$, $P_{A_2}(B) = 0{,}2$, $P_{A_3}(B) = 0{,}1$. Alors $P(B)$ vaut :

Réponse B : 0,23
$0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}03 = 0{,}23$.

2. Avec les mêmes données, $P_B(A_1)$ vaut :

Réponse D : $\dfrac{10}{23}$
$P_B(A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}23} = \dfrac{10}{23}$.

3. Une maladie touche 10 % des gens. Un test est positif chez 90 % des malades et chez 10 % des sains. Un test est positif : la personne est malade avec la probabilité :

Réponse A : 0,5
Vrais positifs : $0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09$; faux positifs : $0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$.
$P_T(M) = \dfrac{0{,}09}{0{,}18} = 0{,}5$.

4. $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}38$. Alors $P_{\overline{A}}(B)$ vaut :

Réponse C : 0,2
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}38 - 0{,}3 = 0{,}08$, puis on divise par $P(\overline{A}) = 0{,}4$: 0,2.

5. Une urne contient 3 rouges et 1 blanche. On tire deux boules sans remise ; la deuxième est rouge. La première était rouge avec la probabilité :

Réponse A : $\dfrac{2}{3}$
$P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $P(R_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times 1 = \dfrac{3}{4}$, donc $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$.

6. S'il pleut un jour, il pleut le lendemain avec la probabilité 0,6 ; s'il ne pleut pas, avec la probabilité 0,1. On note p_n la probabilité qu'il pleuve le n-ième jour. Alors :

Réponse D : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$

Partition : il pleut ou non le jour n. $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}1(1 - p_n) = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).