2nde / Probabilités conditionnelles

48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Modèle probabiliste et équiprobabilité

À retenir : Issues équiprobables (« au hasard », « équilibré ») : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. Sinon, on additionne les probabilités des issues. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, par exemple $0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$. Le contraire de « au moins un » est « aucun ».

Ex. 1 ★☆☆ **Tombola du lycée** — Pour la tombola du lycée, on tire au hasard un ticket parmi 30 tickets numérotés de 1 à 30. On note A : « le numéro est un multiple de 4 », B : « le numéro se termine par 5 » et C : « le numéro est un multiple de 3 ». Donne les résultats sous forme de fractions irréductibles.

(a) Justifie que les issues sont équiprobables et donne $\text{Card}(\Omega)$.

(b) Écris A en extension et calcule $P(A)$.

(c) Écris B en extension et calcule $P(B)$.

(d) Calcule $P(\overline{A})$.

(e) Détermine $A \cap B$ et calcule $P(A \cap B)$. Que peux-tu dire de A et B ?

(f) Calcule $P(B \cup C)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Comment viens-tu au lycée ?** — On choisit au hasard un élève d'un lycée. Son mode de transport principal suit la loi suivante :

Mode	Bus	Vélo	Voiture	Train	Marche
Probabilité	38 %	12 %	27 %	9 %	?

(a) Écris les pourcentages en nombres décimaux, puis calcule la probabilité qu'il vienne à pied.

(b) Calcule la probabilité qu'il ne vienne pas en bus.

(c) Calcule la probabilité qu'il vienne à vélo ou à pied.

(d) Calcule la probabilité qu'il ne vienne ni en bus ni en voiture.

(e) Un autre lycée annonce : bus 0,55 ; voiture 0,35 ; vélo 0,2, et aucun autre mode. Cette loi est-elle possible ? Justifie.

Ex. 3 ★★☆ **Deux dés sur le plateau** — Dans un jeu de plateau, on lance deux dés équilibrés à 6 faces, un rouge et un vert, et on note S la somme des deux faces. On note A : « $S = 8$ » et B : « au moins un dé affiche 6 ». Donne les fractions irréductibles.

(a) Mathis dit : « S prend 11 valeurs, de 2 à 12, donc $P(A) = \frac{1}{11}$. » A-t-il raison ? Justifie et calcule $P(A)$.

Ex. 3 (suite)

(b) Calcule la probabilité que S soit supérieure ou égale à 10.

(c) Décris $\overline{B}$ par une phrase, puis calcule $P(B)$.

(d) A et B sont-ils incompatibles ? Justifie, puis calcule $P(A \cup B)$.

Ex. 4 ★★☆ **Les lancers francs de Lina** — Lina, basketteuse, a réussi 185 lancers francs sur 250 à l'entraînement. Pour modéliser un lancer, on choisit de prendre comme probabilité de réussite (événement R) la fréquence observée.

(a) Calcule cette fréquence, puis $P(\overline{R})$.

(b) Ce modèle est-il démontré ? Explique d'où vient ce choix.

(c) En match, elle réussit 4 lancers sur 5 et dit : « Ma probabilité de réussite est passée à 0,8. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Sur 200 actions, elle a marqué 0, 1, 2 ou 3 points respectivement 90, 10, 76 et 24 fois. Avec les fréquences, donne la loi des points, puis la probabilité de marquer au moins 1 point.

Ex. 5 ★★☆ **Abonnements en ligne** — On choisit au hasard un habitant d'une ville. On note A : « il a un abonnement de musique en ligne » et B : « il a un abonnement de vidéo en ligne ». D'après un sondage, $P(A) = 0{,}48$, $P(B) = 0{,}61$ et $P(A \cap B) = 0{,}32$.

(a) Traduis $A \cap B$ et $\overline{B}$ par une phrase.

(b) Noé écrit $P(A \cup B) = 0{,}48 + 0{,}61 = 1{,}09$. Explique pourquoi c'est faux, puis calcule $P(A \cup B)$.

(c) Calcule la probabilité que l'habitant n'ait aucun des deux abonnements.

(d) Vrai ou faux ? « A et B sont incompatibles. » Justifie.

(e) Vrai ou faux ? « C : "aucun des deux abonnements" et D : "les deux abonnements" sont incompatibles, donc contraires. » Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Une carte dans un jeu de 32** — On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Il y a 4 couleurs : cœur et carreau sont rouges, pique et trèfle sont noirs. Chaque couleur compte 8 cartes : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as. On note R : « la carte est rouge » et F : « la carte est une figure (valet, dame ou roi) ». Donne les résultats sous forme décimale.

(a) Justifie que les issues sont équiprobables, puis calcule $P(R)$ et $P(F)$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Décris l'événement $R \cap F$ par une phrase, donne $\text{Card}(R \cap F)$, puis calcule $P(R \cap F)$.

(c) Inès écrit : « $R \cup F$ compte $16 + 12 = 28$ cartes, donc $P(R \cup F) = \frac{28}{32}$. » Explique son erreur, puis calcule $P(R \cup F)$ de deux façons.

(d) Écris l'événement « la carte n'est ni rouge ni une figure » à l'aide de R et F, puis calcule sa probabilité.

(e) On note N : « la carte est un as noir ». Vrai ou faux : « $\overline{R}$ et N sont incompatibles, donc $P(\overline{R} \cup N) = P(\overline{R}) + P(N)$. » Justifie, puis calcule $P(\overline{R} \cup N)$.

Ex. 7 ★★★ **La roue du magasin** — Pour son anniversaire, un magasin fait tourner une roue à chaque passage en caisse. Les secteurs n'ont pas tous la même taille. La loi de probabilité est donnée ci-dessous.

Secteur	Perdu	Bon 5 €	Bon 10 €	Bon 20 €
Probabilité	0,5	0,25	?	0,07

(a) Complète la loi de probabilité en justifiant ton calcul.

(b) Calcule la probabilité de gagner un bon d'au moins 10 €.

(c) On note E : « gagner un bon » et F : « ne pas gagner le bon de 20 € ». Calcule $P(E)$ et $P(F)$ en utilisant des événements contraires.

(d) Décris $E \cap F$ par une phrase, puis calcule $P(E \cup F)$. Que représente l'événement $E \cup F$?

(e) Le magasin double la probabilité du bon de 5 € ; seule celle de « Perdu » change pour compenser. Donne la nouvelle loi, puis la nouvelle valeur de $P(E)$.

Ex. 8 ★★★ **Le dossard gagnant du cross** — Au cross du lycée, 50 coureurs portent des dossards numérotés de 1 à 50. À l'arrivée, on tire au hasard un dossard pour gagner des chaussures de course. On note A : « le numéro est un nombre premier » (un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même) et C : « le numéro s'écrit avec au moins un chiffre 3 ». Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Écris A en extension, puis calcule $P(A)$.

(b) Noé dit : « Le contraire de C est "le numéro s'écrit avec au plus un chiffre 3". » A-t-il raison ? Justifie et calcule la probabilité de l'événement cité par Noé.

(c) En passant par l'événement contraire de C, calcule $P(C)$.

(d) Détermine $A \cap C$, puis calcule la probabilité que le numéro soit premier sans contenir de chiffre 3.

(e) L'an prochain, il y aura 60 coureurs, numérotés de 1 à 60. La probabilité de tirer un numéro premier sera-t-elle plus grande ? Justifie.

2. *Probabilité conditionnelle avec un tableau croisé*

À retenir : « Parmi qui ? » : ce groupe est la condition, il va en indice et son effectif au dénominateur : $P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$. « À la fois » donne $P(A \cap B)$: on divise par le total. Exemple : $P_A(B) = \frac{30}{120}$, mais $P(A \cap B) = \frac{30}{400}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — lire un tableau croisé** — Une entreprise interroge ses 500 salariés. On note T : « le salarié télétravaille au moins un jour par semaine » et V : « il vient au travail en vélo ». On choisit un salarié au hasard.

	V	$\overline{\text{V}}$	Total
T	72	168	240
$\overline{\text{T}}$	48	212	260
Total	120	380	500

(a) Calcule la probabilité que le salarié télétravaille.

(b) Calcule la probabilité que le salarié soit à la fois en télétravail et cycliste.

(c) Calcule $P_T(V)$, puis traduis ce résultat par une phrase.

(d) Parmi les cyclistes, quelle proportion télétravaille ? Écris-la d'abord en notation.

(e) Sachant que le salarié télétravaille, calcule la probabilité qu'il ne vienne pas en vélo, en utilisant le contraire.

(f) Calcule $P_{\overline{T}}(V)$, arrondie au centième.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes — traduire et utiliser la formule** — Dans une ville, 40 % des habitants sont vaccinés contre la grippe, 15 % ont eu la grippe cet hiver et 3 % sont à la fois vaccinés et grippés. On choisit un habitant au hasard. On note V : « il est vacciné » et G : « il a eu la grippe ».

(a) Traduis chacune des trois données de l'énoncé en notation.

(b) Léa affirme : « 3 % des vaccinés ont eu la grippe. » Traduis sa phrase en notation. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Traduis $P_G(V)$ par une phrase, puis calcule-la.

(d) Calcule la probabilité qu'un habitant vacciné n'ait pas eu la grippe.

Ex. 11 ★★☆ **Compléter le tableau avant de calculer** — Un supermarché étudie 600 passages en caisse. C : « le client a la carte de fidélité » ; B : « il a acheté un produit bio ». On choisit un client au hasard. Arrondis au centième si nécessaire.

	B	$\bar{B}$	Total
C	135	?	360
$\bar{C}$	?	?	?
Total	180	?	600

(a) Complète le tableau par différences, puis vérifie les totaux.

(b) Calcule $P_C(B)$ et traduis le résultat par une phrase commençant par « parmi ».

(c) Calcule $P_{\overline{C}}(B)$. Compare avec la question précédente.

(d) Tom affirme : « La plupart des acheteurs de bio n'ont pas la carte de fidélité. » Vrai ou faux ? Justifie par une probabilité.

Ex. 12 ★★☆ **Un tableau construit à partir de pourcentages** — Un lycée compte $1\,200$ élèves, dont $25\,\%$ d'internes. $40\,\%$ des internes sont inscrits à l'association sportive, contre $15\,\%$ des non-internes. On note I : « l'élève est interne » et S : « il est inscrit à l'association sportive ». On choisit un élève au hasard. Arrondis au centième.

(a) Construis le tableau croisé des effectifs, avec I, $\overline{I}$ en lignes et S, $\overline{S}$ en colonnes.

(b) Traduis « $40\,\%$ des internes sont inscrits » en notation, puis calcule $P(I \cap S)$.

(c) Inès affirme : « $P(S) = \frac{40+15}{2}\,\% = 27{,}5\,\%$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Calcule la probabilité qu'un élève inscrit à l'association sportive soit interne. Traduis par une phrase.

Ex. 13 ★★☆ **Filles qui nagent ou nageurs qui sont des filles ?** — Un club multisport compte 250 licenciés. On note F : « le licencié est une fille » et N : « il pratique la natation ». On choisit un licencié au hasard. Donne les résultats sous forme de fraction irréductible ou de nombre décimal.

	N	$\bar{N}$	Total
F	54	66	120
$\bar{F}$	39	91	130
Total	93	157	250

(a) « La probabilité que le licencié soit une fille qui nage vaut 0,45. » Vrai ou faux ? Justifie.

(b) Écris en notation « parmi les nageurs, la proportion de filles », puis calcule-la.

(c) Calcule la probabilité qu'une fille choisie au hasard ne nage pas.

Ex. 13 (suite)

(d) « $P_{\overline{F}}(\overline{N}) = 0{,}7$, donc $70\,\%$ des licenciés sont des garçons qui ne nagent pas. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Corriger la copie de Lina** — Un institut interroge 800 personnes. On note S : « la personne est abonnée à une plateforme de streaming » et C : « elle est allée au cinéma ce mois-ci ». On choisit une personne au hasard. Arrondis au centième si besoin.

	C	$\bar{C}$	Total
S	210	270	480
$\bar{S}$	130	190	320
Total	340	460	800

(a) Lina écrit : « $P_S(C) = \frac{210}{800} = 0{,}2625$ ». Explique son erreur, puis donne la bonne valeur sous forme de fraction simplifiée.

(b) Lina note $P_S(C)$ la probabilité qu'une personne allée au cinéma ce mois-ci soit abonnée. Corrige la notation, puis calcule cette probabilité.

(c) Lina écrit : « $P_S(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0{,}575$ ». Corrige ce calcul, puis traduis le résultat par une phrase « parmi les … ».

(d) Écris en notation, puis calcule en fraction simplifiée : la probabilité qu'un non-abonné ne soit pas allé au cinéma, puis la part des non-abonnés parmi ceux qui n'y sont pas allés.

Ex. 15 ★★★ **Trois transporteurs, un seul responsable ?** — Une boutique en ligne a expédié $2\,000$ colis grâce à trois transporteurs X, Y et Z. On note R : « le colis est arrivé en retard ». On choisit un colis au hasard. Arrondis au centième si besoin.

	R	$\bar{R}$	Total
X	36	1164	1200
Y	40	460	500
Z	39	261	300
Total	115	1885	2000

(a) Calcule $P_X(R)$, $P_Y(R)$ et $P_Z(R)$. Quel transporteur a le taux de retard le plus élevé ?

(b) Un colis est arrivé en retard. Quel transporteur est le plus probablement responsable ? Justifie avec trois probabilités.

(c) Calcule la probabilité qu'un colis soit à la fois confié à Z et en retard, puis la probabilité qu'il soit confié à Z ou en retard.

(d) Le gérant confie désormais à X les 300 colis de Z, avec le taux de retard de X. Calcule la nouvelle valeur de $P(R)$ et compare-la à l'ancienne.

Ex. 16 ★★★ **Le casque protège-t-il les skieurs ?** — Une station de ski a suivi 4\,000 skieurs pendant une saison : 3\,200 portaient un casque, 104 se sont blessés, et 64 des blessés portaient un casque. On note K : « le skieur porte un casque » et B : « il s'est blessé ». On choisit un skieur au hasard.

(a) Construis le tableau croisé des effectifs, avec K, $\overline{K}$ en lignes et B, $\overline{B}$ en colonnes. Vérifie les totaux.

(b) Traduis $P_B(K)$ et $P_K(B)$ par une phrase « parmi les … », puis calcule chacune sous forme de fraction simplifiée.

(c) Un article affirme : « La majorité des skieurs blessés portaient un casque, donc le casque ne protège pas. » Explique pourquoi ce raisonnement est faux, à l'aide de $P_K(B)$ et $P_{\overline{K}}(B)$.

(d) Calcule la probabilité qu'un skieur soit à la fois sans casque et blessé. Explique pourquoi elle diffère de $P_{\overline{K}}(B)$.

3. *Construire un arbre pondéré*

À retenir : Niveau 1 : probabilités sur l'ensemble ($P(A)$, $P(\overline{A})$). Niveau 2 : les « parmi » ($P_A(B)$, jamais $P(B)$). Les branches d'un nœud ont une somme de 1. Un chemin est un produit : $0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$. Sans remise, l'urne a un objet de moins au second tirage.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : compléter les branches d'un arbre** — Dans un club omnisports, 35 % des adhérents sont mineurs (M). Parmi les mineurs, 80 % pratiquent la natation (N) ; parmi les majeurs, 45 %. On choisit un adhérent au hasard.

(a) Quelle probabilité porte la branche du premier niveau qui mène à $\overline{M}$?

(b) Traduis « 80 % des mineurs pratiquent la natation » en notation. Donne ensuite la probabilité de la branche de M vers $\overline{N}$.

(c) Écris les probabilités des deux branches qui partent du nœud $\overline{M}$.

(d) Calcule $P(M \cap N)$ avec la règle du chemin.

(e) Calcule la probabilité que l'adhérent soit majeur et ne pratique pas la natation.

(f) Vrai ou faux : « $P(N) = 0{,}8$ ». Justifie.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : branches, chemins et tirages** — Calcule directement, sans arbre complet.

(a) Une urne contient 4 boules rouges et 6 vertes. On tire deux boules sans remise (R_1, R_2 : rouge au 1er, au 2e tirage). Calcule $P_{R_1}(R_2)$.

(b) Avec la même urne, on tire cette fois avec remise. Calcule $P_{R_1}(R_2)$.

Ex. 18 **(suite)**

(c) Un client vient du rayon A avec une probabilité de 0,25, du rayon B avec 0,4, sinon du rayon C. Quelle probabilité porte la branche C ?

(d) Dans un arbre, $P(A) = 0{,}7$ et $P_A(B) = 0{,}05$. Calcule $P(A \cap B)$.

(e) Trois des quatre chemins d'un arbre valent 0,12 ; 0,28 et 0,18. Combien vaut le quatrième ?

(f) On a $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$. Léo écrit 0,12 sur la branche de A vers B. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 19 ★★☆ **Festival : choisir l'ordre des niveaux** — Sondage auprès des spectateurs d'un festival. Parmi les spectateurs venus en train (T), 15 % ont acheté un pass 3 jours (J) ; parmi les autres, 40 %. Par ailleurs, 22 % des spectateurs sont venus en train. On interroge un spectateur au hasard.

(a) Quel événement places-tu au premier niveau de l'arbre ? Justifie avec le texte.

(b) Construis l'arbre pondéré complet sur ta copie.

(c) Calcule la probabilité que le spectateur soit venu en train et n'ait pas acheté de pass 3 jours.

(d) Calcule la probabilité que le spectateur ait acheté un pass 3 jours.

(e) Vérifie que la somme des quatre chemins vaut 1.

Ex. 20 ★★☆ **Trois lignes de bus** — Dans une ville, 40 % des trajets en bus se font sur la ligne 1 (L_1), 35 % sur la ligne 2 (L_2) et les autres sur la ligne 3 (L_3). Le bus est en retard (R) sur 10 % des trajets de la ligne 1, 6 % de la ligne 2 et 20 % de la ligne 3. On choisit un trajet au hasard.

(a) Calcule $P(L_3)$.

(b) Construis l'arbre pondéré sur ta copie : trois branches au premier niveau, puis deux branches par nœud.

(c) Calcule la probabilité que le trajet se fasse sur la ligne 3 avec du retard.

(d) Calcule $P(L_2 \cap \overline{R})$.

(e) Sam dit : « Le taux de retard vaut $\frac{10+6+20}{3} = 12\,\%$. » A-t-il raison ? Justifie et corrige.

Ex. 21 ★★☆ **Jeu de jetons : tirage sans remise** — Un sac contient 10 jetons : 6 gagnants et 4 perdants. Yanis tire un jeton au hasard, le garde, puis en tire un second. G_1 : « le 1er jeton est gagnant », G_2 : « le 2e jeton est gagnant ». Donne les résultats sous forme de fractions irréductibles.

(a) Donne $P(G_1)$ et $P_{G_1}(G_2)$.

(b) Écris les probabilités des deux branches qui partent du nœud $\overline{G_1}$.

(c) Calcule la probabilité que les deux jetons soient gagnants.

(d) Calcule la probabilité que Yanis tire exactement un jeton gagnant.

Ex. 21 (suite)

(e) Si Yanis remettait le premier jeton dans le sac, quelle serait la probabilité de tirer deux jetons gagnants ?

Ex. 22 ★★★ **Dépistage d'une maladie rare** — Une maladie touche 2 % de la population. Son test de dépistage est positif chez 95 % des malades. Il est négatif chez 90 % des personnes non malades. On choisit une personne au hasard. M : « la personne est malade », T : « le test est positif ». Arrondis au centième si nécessaire.

(a) Traduis les trois données de l'énoncé en notation. Construis ensuite l'arbre pondéré sur ta copie et complète chaque nœud.

(b) Un faux positif est une personne non malade dont le test est positif. Calcule la probabilité que la personne soit un faux positif, puis calcule $P(T)$.

(c) Complète le tableau croisé pour 10\,000 personnes :

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
M	?	?	?
$\bar{\text{M}}$	?	?	?
Total	?	?	10 000

(d) Calcule $P_T(M)$ puis traduis-la par une phrase « parmi les . . . ».

(e) Un journaliste écrit : « Ce test est fiable à 95 %, donc un test positif signifie 95 % de risque d'être malade. » Explique son erreur et pourquoi l'écart est si grand.

Ex. 23 ★★★ **Car scolaire et retards : retrouver une branche** — Dans un lycée, 40 % des élèves prennent le car scolaire (C). R : « l'élève arrive en retard au moins une fois par mois ». 14 % des élèves sont à la fois usagers du car et en retard au moins une fois par mois. Parmi les élèves qui ne prennent pas le car, 5 % sont en retard au moins une fois par mois. On choisit un élève au hasard. Arrondis au centième si nécessaire.

(a) Peut-on placer le nombre 0,14 sur une branche de l'arbre ? Traduis-le en notation et justifie.

(b) Calcule la probabilité qu'un élève qui prend le car soit en retard au moins une fois par mois. Construis ensuite l'arbre complet en le décrivant nœud par nœud.

(c) Calcule $P(R)$.

(d) Calcule $P(\overline{R})$ de deux façons : avec deux chemins de l'arbre, puis avec l'événement contraire de R.

(e) Calcule la probabilité qu'un élève en retard au moins une fois par mois prenne le car. Explique en une phrase pourquoi ce résultat est différent de $P_C(R)$.

Ex. 24 ★★★ **Cartes bonus : avec ou sans remise ?** — Un jeu de société contient un paquet de 8 cartes : 5 cartes « bonus » et 3 cartes « malus ». Nina tire une carte au hasard, puis une seconde. B_1 : « la 1re carte est bonus », B_2 : « la 2e carte est bonus ». Donne les résultats sous forme de fractions irréductibles.

(a) Nina ne remet pas la 1re carte dans le paquet. Construis l'arbre pondéré en le décrivant niveau par niveau, et justifie les probabilités du second niveau.

(b) Sans remise, calcule la probabilité que les deux cartes soient du même type.

(c) Tom affirme : « Sans remise, la 2e carte a moins de chances d'être bonus que la 1re, car un bonus a pu partir. » Vrai ou faux ? Justifie par un calcul.

(d) Nina remet maintenant la 1re carte dans le paquet avant le second tirage. Calcule la probabilité que les deux cartes soient du même type.

(e) Nina gagne si ses deux cartes sont de types différents. A-t-elle intérêt à jouer avec ou sans remise ? Justifie.

4. *Lire et calculer sur un arbre*

À retenir : Nœuds : somme 1. Chemin = produit : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, ex. $0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$. Une branche du 2e niveau est $P_A(B)$, jamais $P(B)$; $P(B)$ est la somme de deux chemins, pas la moyenne des taux.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes — Compléter et lire les branches** — On choisit un élève au hasard dans un lycée. L : « l'élève est demi-pensionnaire », S : « l'élève pratique un sport en club ». L'arbre pondéré donne : $P(L) = 0{,}65$; $P_L(S) = 0{,}4$; $P_{\overline{L}}(S) = 0{,}3$.

(a) Complète le premier niveau : calcule $P(\overline{L})$.

(b) Calcule $P_L(\overline{S})$.

(c) Lucas affirme : « $P_L(S) + P_{\overline{L}}(S) = 0{,}7$, pas 1 : l'arbre est faux. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Traduis en symboles, sans calculer : « la probabilité qu'un élève inscrit en club soit demi-pensionnaire ».

(e) Traduis par une phrase l'égalité $P_{\overline{L}}(S) = 0{,}3$.

(f) Kenza affirme : « 40 % des élèves du lycée sont à la fois demi-pensionnaires et en club. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes — Règle du chemin** — Dans une boulangerie, on choisit un client au hasard. C : « il paie par carte », V : « il achète une viennoiserie ». L'arbre donne : $P(C) = 0{,}7$; $P_C(V) = 0{,}45$; $P_{\overline{C}}(V) = 0{,}2$.

(a) Calcule $P(C \cap V)$.

(b) Calcule $P(\overline{C} \cap V)$, puis traduis ce résultat par une phrase, en pourcentage.

(c) Calcule la probabilité que le client paie par carte et n'achète pas de viennoiserie.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Sans multiplier, déduis $P(\overline{C} \cap \overline{V})$ de la somme des quatre chemins.

(e) Vérifie ce dernier résultat par la règle du chemin.

(f) Léo affirme : « $P(V) = 0{,}45$, on le lit sur l'arbre. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 27 ★★☆ **Retards dans les transports** — Dans une ville, 55 % des trajets domicile-travail se font en bus (B), les autres en tram. Un trajet est en retard (R) dans 18 % des trajets en bus et dans 6 % des trajets en tram. On choisit un trajet au hasard.

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré de la situation, en complétant chaque nœud.

(b) Calcule la probabilité que le trajet soit fait en bus et soit en retard.

(c) Calcule $P(R)$. Explique pourquoi le résultat de la question précédente ne suffit pas.

(d) Tom affirme : « $P(R) = \frac{18\,\% + 6\,\%}{2} = 12\,\%$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(e) Sur 2 000 trajets, combien environ sont en retard ? Combien de ces retards ont lieu en tram ?

Ex. 28 ★★☆ **Deux jetons sans remise** — Un sac contient 10 jetons : 6 rouges et 4 verts. Noé tire un jeton au hasard, le garde, puis tire un second jeton. R_1 : « le premier jeton est rouge », R_2 : « le second jeton est rouge ». Donne les résultats sous forme de fractions irréductibles.

(a) Donne $P(R_1)$ et $P_{R_1}(R_2)$, puis calcule $P(R_1 \cap R_2)$.

(b) Calcule la probabilité que les deux jetons soient verts.

(c) Déduis-en la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur.

(d) En passant par l'événement contraire, calcule la probabilité d'obtenir au moins un jeton vert.

(e) Sami trouve 0,36 pour la probabilité de tirer deux jetons rouges. Explique son erreur.

Ex. 29 ★★☆ **Retrouver une branche au club d'escalade** — Dans un club d'escalade, 70 % des adhérents sont adultes (A). 20 % des adhérents sont des adultes qui font de la compétition (C). Parmi les mineurs, 40 % font de la compétition. On choisit un adhérent au hasard. Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Traduis les trois données de l'énoncé en notation.

(b) Calcule $P_A(C)$ en valeur exacte, puis arrondie.

(c) Déduis-en $P_A(\overline{C})$ en valeur exacte, puis arrondie.

(d) Calcule la probabilité que l'adhérent fasse de la compétition. Conclus par une phrase.

(e) Inès arrondit $P_A(C)$ à 0,3, puis calcule $P(A \cap \overline{C}) = 0{,}7 \times 0{,}7$. Explique son erreur et donne la valeur exacte.

Ex. 30 ★★★ **Deux lancers francs** — Au basket, Maëlle tire deux lancers francs. R_1 : « elle réussit le premier », R_2 : « elle réussit le second ». Elle réussit le premier dans 80 % des cas. Après une réussite, elle réussit le second dans 85 % des cas. Après un échec, elle le réussit dans 60 % des cas.

(a) Construis l'arbre pondéré sur ta copie en complétant chaque nœud. Calcule les probabilités des quatre chemins, puis contrôle leur somme.

(b) Calcule la probabilité que Maëlle réussisse exactement un des deux lancers.

(c) Léa affirme : « $P(R_2) = \frac{0{,}85 + 0{,}6}{2} = 0{,}725$ ». A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule $P(R_2)$.

(d) Donne $P_{\overline{R_1}}(R_2)$ et $P(\overline{R_1} \cap R_2)$. Explique par une phrase ce que représente chacun de ces deux nombres.

Ex. 31 ★★★ **Colis en retard** — Un site de vente en ligne livre 35 % de ses commandes en point relais (R), les autres à domicile. T : « la commande arrive en retard ». 4,2 % des commandes sont livrées en point relais et arrivent en retard. Parmi les commandes livrées à domicile, 8 % arrivent en retard. On choisit une commande au hasard.

(a) Calcule la probabilité portée par la branche qui va de R à T. Interprète-la par une phrase.

(b) Hugo affirme : « une commande arrive en retard avec une probabilité de 0,042 ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $P(T)$.

(c) Complète le tableau sur 10 000 commandes :

	T	**$\bar{\text{T}}$**	**Total**
R	?	?	?
$\bar{\text{R}}$	?	?	?
Total	?	?	10 000

(d) Une commande arrive en retard. Calcule la probabilité qu'elle ait été livrée en point relais, arrondie au centième. Compare-la avec $P_R(T)$.

Ex. 32 ★★★ **Deux billets de tombola** — À la tombola du club de foot, l'urne contient 25 billets, dont 5 gagnants. Yanis tire un billet au hasard et le garde, puis il en tire un second. G_1 : « le premier billet est gagnant », G_2 : « le second billet est gagnant ».

(a) Construis l'arbre pondéré sur ta copie. Calcule les probabilités des quatre chemins en fractions irréductibles, puis contrôle leur somme.

(b) Calcule la probabilité que Yanis gagne au moins un lot.

(c) Yanis a gagné au moins un lot. Calcule la probabilité qu'il ait gagné deux lots, arrondie au centième.

(d) On remet maintenant le premier billet dans l'urne avant le second tirage. Calcule la probabilité de gagner au moins un lot.

(e) Pour gagner au moins un lot, Yanis a-t-il intérêt à ce que l'on remette le premier billet ? Justifie.

5. Passer d'un arbre à un tableau et inversement

À retenir : Arbre → tableau : case $A \cap B$ = $N \times P(A) \times P_A(B)$, avec N choisi pour avoir des entiers ($1\,000 \times 0{,}3 \times 0{,}4 = 120$). Tableau → arbre : $P_A(B)$ = case ÷ total de la ligne A. $P(B)$ = total de la colonne B ÷ N : il ne se lit sur aucune branche.

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : de l'arbre au tableau** — Dans un lycée, 45 % des élèves sont demi-pensionnaires (D). Parmi eux, 60 % font partie de l'association sportive (S), contre 20 % chez les autres élèves. On choisit un élève au hasard et on imagine un effectif de 1 000 élèves.

(a) Calcule l'effectif des élèves demi-pensionnaires.

(b) Calcule l'effectif des élèves qui sont à la fois demi-pensionnaires et membres de l'association.

(c) Calcule l'effectif de $\overline{D} \cap S$.

(d) Déduis par différence l'effectif de $D \cap \overline{S}$.

(e) Combien d'élèves font partie de l'association sportive ?

(f) Calcule $P(S)$.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : du tableau à l'arbre** — On a interrogé 400 personnes. A : « est abonné à une plateforme de streaming », F : « a vu le film de l'été ». On choisit une personne au hasard.

	F	F̄	Total
A	96	144	240
Ā	32	128	160
Total	128	272	400

(a) Calcule la probabilité que la personne soit abonnée.

(b) Donne la branche $P_A(F)$ de l'arbre dont le premier niveau est A.

(c) Parmi les personnes non abonnées, quelle proportion a vu le film ?

(d) Déduis-en $P_{\overline{A}}(\overline{F})$ avec la règle du nœud.

(e) Léo affirme que $P(F)$ se lit sur une branche de cet arbre. Calcule $P(F)$ et corrige-le.

(f) La personne a vu le film. Calcule la probabilité qu'elle soit abonnée.

Ex. 35 ★☆☆ **Choisir le bon effectif fictif** — Pour chaque situation, donne le plus petit effectif N parmi 100, 1 000 et 10 000 qui rend entiers les effectifs de A et de $A \cap B$. Donne ensuite l'effectif de $A \cap B$.

(a) $P(A) = 0{,}8$ et $P_A(B) = 0{,}35$.

(b) 75 % des clients n'ont pas de bon de réduction. Parmi ceux qui en ont un (A), 60 % l'utilisent (B).

Ex. 35 (suite)

(c) 15 % des trains sont en retard (A). Parmi eux, 70 % ont moins de 10 minutes de retard (B).

(d) $P(A) = 0{,}12$ et $P_A(\overline{B}) = 0{,}65$.

(e) Dans un jeu à gratter, 0,5 % des tickets sont gagnants (A). Parmi eux, 90 % sont réclamés par leur acheteur (B).

(f) Lina prend $N = 100$ avec $P(A) = 0{,}03$ et $P_A(B) = 0{,}9$. Elle trouve 2,7 personnes. Corrige son choix.

Ex. 36 ★★☆ **Club de tennis : tableau et inversion** — Dans un club de tennis, 25 % des joueurs font de la compétition (C). Parmi eux, 60 % s'entraînent plus de deux fois par semaine (E), contre 12 % chez les autres joueurs. On choisit un joueur au hasard.

(a) Complète ce tableau pour 1 000 joueurs et vérifie les totaux :

	E	Ē	Total
C	?	?	?
C̄	?	?	?
Total	?	?	1 000

(b) Calcule la probabilité que le joueur s'entraîne plus de deux fois par semaine.

(c) Le joueur s'entraîne plus de deux fois par semaine. Calcule la probabilité qu'il fasse de la compétition.

(d) Sami dit : « Parmi les joueurs qui s'entraînent plus de deux fois par semaine, 60 % font de la compétition. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 37 ★★☆ **Magasin : du tableau à l'arbre inversé** — Un magasin a interrogé 800 clients. F : « a la carte de fidélité », L : « a déjà acheté en ligne ». On choisit un client au hasard. Arrondis au millième si besoin.

	L	L̄	Total
F	180	?	480
F̄	?	260	?
Total	240	?	800

(a) Complète le tableau par différence, puis vérifie tous les totaux.

(b) Construis sur ta copie l'arbre pondéré dont le premier niveau est L, $\overline{L}$.

(c) Hugo écrit : « $P(F \cap L) = \frac{180}{240} = 0{,}75$ ». Trouve son erreur et corrige-la.

(d) Calcule $P_F(L)$, puis compare cette probabilité à $P_L(F)$.

Ex. 38 ★★★ **Dépistage d'une maladie rare : choisir N et inverser** — Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif chez 95 % des malades et chez 3 % des non-malades. On choisit une personne au hasard. M : « la personne est malade », T : « son test est positif ». Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Lina prend $N = 1\,000$ personnes. Calcule l'effectif de M, celui de $M \cap T$ et celui de $\overline{M} \cap T$. Explique pourquoi ce choix de N ne convient pas.

(b) Complète ce tableau pour 10 000 personnes, puis vérifie tous les totaux :

	T	$\bar{T}$	Total
M	?	?	?
$\bar{M}$	?	?	?
Total	?	?	10 000

(c) Calcule $P(T)$. Explique pourquoi cette probabilité ne se lit sur aucune branche de l'arbre.

(d) Léo dit : « Mon test est positif, donc j'ai 95 % de risques d'être malade. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

(e) Calcule la probabilité qu'une personne dont le test est négatif ne soit pas malade. Interprète ce résultat.

Ex. 39 ★★★ **Gare : retourner l'arbre et corriger deux erreurs** — Dans une gare, 35 % des voyageurs ont un abonnement (A). Parmi les abonnés, 80 % voyagent aux heures de pointe (H), contre 40 % des non-abonnés. On choisit un voyageur au hasard. Donne les fractions irréductibles, puis leurs arrondis au millième.

(a) Complète ce tableau pour 1 000 voyageurs, puis vérifie les totaux :

	H	$\bar{H}$	Total
A	?	?	?
$\bar{A}$	?	?	?
Total	?	?	1000

(b) Calcule $P(H)$ de deux façons : avec le tableau, puis comme somme de deux chemins de l'arbre de départ.

(c) Inès cherche la probabilité qu'un voyageur des heures de pointe soit abonné. Elle divise la case $A \cap H$ par le total de la ligne A. Explique son erreur et corrige-la.

(d) Construis l'arbre « dans l'autre sens », avec H et $\overline{H}$ au premier niveau. Donne les six probabilités des branches.

(e) Sur ce nouvel arbre, applique la règle du chemin pour retrouver $P(A \cap H)$, puis vérifie que la somme des quatre chemins vaut 1.

Ex. 40 ★★★ **Cinéma : trois séances, un tarif réduit** — Dans un cinéma, 20 % des spectateurs viennent à une séance du matin (M), 50 % l'après-midi (A) et les autres le soir (S). Le tarif réduit (R) concerne 70 % des spectateurs du matin, 40 % de ceux de l'après-midi et 10 % de ceux du soir. On choisit un spectateur au hasard. Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Pour 1 000 spectateurs, Théo remplit la case $M \cap R$ avec $1\,000 \times 0{,}7 = 700$. Explique son erreur et donne la bonne valeur.

(b) Complète ce tableau pour 1 000 spectateurs, puis vérifie les totaux :

	R	$\bar{R}$	Total
M	?	?	?
A	?	?	?
S	?	?	?
Total	?	?	1000

(c) Calcule $P(R)$, puis la probabilité que le spectateur vienne le soir ou paie le tarif réduit.

(d) Vrai ou faux : « La plupart des tarifs réduits sont vendus le matin. » Justifie par un calcul de probabilité.

(e) Ben place R et $\overline{R}$ au premier niveau de l'arbre. Donne $P(\overline{R})$ et les trois branches qui partent du nœud $\overline{R}$.

6. *P(B sachant A) ou P(A sachant B) ? Tests et faux positifs*

À retenir : Même numérateur, pas le même dénominateur : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Sensibilité : $P_M(T)$; spécificité : $P_{\overline{M}}(\overline{T})$. Un positif est malade avec $P_T(M)$ = vrais positifs ÷ total des positifs (tableau sur 10\,000).

Ex. 41 ★★★ **Automatismes : filtre anti-spam, dans un sens puis dans l'autre** — Un filtre anti-spam a trié 2\,000 courriels. On choisit un courriel au hasard. On note S : « c'est un spam » et B : « le filtre l'a bloqué ».

	B	$\bar{B}$	Total
S	380	20	400
$\bar{S}$	48	1 552	1 600
Total	428	1 572	2 000

Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Calcule $P_S(B)$.

(b) Parmi les courriels bloqués, quelle est la proportion de spams ? Écris-la en notation, puis calcule-la.

(c) Traduis en notation, puis calcule : la probabilité qu'un courriel qui n'est pas un spam soit bloqué.

(d) Calcule $P_B(\overline{S})$.

(e) Calcule $P(S \cap B)$.

Ex. 41 **(suite)**

(f) Vrai ou faux : « deux probabilités conditionnelles qui ont le même numérateur sont égales ». Justifie avec ce tableau.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : contrôle antidopage** — Lors d'une compétition, 2 % des athlètes sont dopés. Le contrôle antidopage a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 94 %. On choisit un athlète au hasard. On note D : « l'athlète est dopé » et T : « le contrôle est positif ».

(a) Calcule la probabilité qu'un athlète dopé ait un contrôle négatif (faux négatif). Écris-la en notation.

(b) Un élève écrit : « la spécificité donne $P_{\overline{D}}(T) = 0{,}94$ ». Corrige son erreur.

(c) Calcule la probabilité qu'un athlète soit dopé et contrôlé positif.

(d) Calcule $P(\overline{D} \cap T)$, la probabilité d'un faux positif.

(e) Déduis-en $P(T)$.

(f) Calcule la probabilité qu'un athlète soit dopé ou contrôlé positif.

Ex. 43 ★★☆ **Maladie rare : la question du patient** — Une maladie du sang touche 1 % des adultes. Un test a une sensibilité de 98 % et une spécificité de 95 %. On choisit un adulte au hasard. On note M : « il est malade » et T : « son test est positif ».

(a) Complète le tableau croisé sur 10\,000 adultes.

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
M	?	?	?
$\bar{\text{M}}$	?	?	?
Total	?	?	10 000

(b) Combien y a-t-il de faux positifs ? Combien de fois plus que de vrais positifs (arrondi à l'unité) ?

(c) Un adulte a un test positif. Calcule la probabilité qu'il soit malade, arrondie au centième.

(d) Ben affirme : « le test détecte 98 % des malades, donc un positif est malade à 98 % ». Explique son erreur.

(e) Calcule $P_{\overline{T}}(M)$, arrondie au dix-millième, puis interprète un test négatif.

Ex. 44 ★★☆ **Contrôle qualité : les téléphones rejetés** — Dans une usine, 4 % des téléphones sont défectueux. Un appareil de contrôle rejette 95 % des téléphones défectueux et rejette à tort 2 % des téléphones conformes. On choisit un téléphone au hasard. On note D : « il est défectueux » et R : « il est rejeté ».

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré, avec D et $\overline{D}$ au premier niveau.

(b) Complète le tableau des chemins.

Chemin	D∩R	D∩$\bar{\text{R}}$	$\bar{\text{D}}$∩R	$\bar{\text{D}}$∩$\bar{\text{R}}$
Probabilité	?	?	?	?

Ex. 44 **(suite)**

(c) Calcule $P(R)$.

(d) Parmi les téléphones rejetés, quelle proportion est vraiment défectueuse ? Arrondis au centième.

(e) Un technicien affirme : « 95 % des téléphones rejetés sont défectueux ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Alarme de magasin : « fiable à 99 % » ?** — Une société de surveillance a relevé 20\,000 nuits dans des magasins. On choisit une nuit au hasard. On note I : « il y a eu une intrusion » et D : « l'alarme s'est déclenchée ».

	D	$\bar{\text{D}}$	Total
I	38	2	40
$\bar{\text{I}}$	200	19 760	19 960
Total	238	19 762	20 000

(a) Calcule la sensibilité $P_I(D)$ de l'alarme.

(b) Calcule $P_{\overline{I}}(\overline{D})$, arrondie au millième. Comment s'appelle cette probabilité ?

(c) L'installateur annonce une alarme « fiable à 99 % ». Explique pourquoi cette phrase est ambiguë.

(d) L'alarme sonne. Calcule la probabilité qu'il y ait vraiment une intrusion, arrondie au centième.

(e) Vrai ou faux : plus de 4 déclenchements sur 5 sont de fausses alertes. Justifie.

Ex. 46 ★★★ **Le même test dans deux populations** — Un test détecte un virus respiratoire : sensibilité 99 %, spécificité 97 %. Le virus touche 0,5 % de la population générale et 30 % des patients hospitalisés avec des symptômes. On choisit une personne au hasard dans le groupe étudié. On note M : « elle a le virus » et T : « son test est positif ». Arrondis au millième.

(a) Donne $P_{\overline{M}}(T)$. Explique en une phrase ce que représente cette probabilité.

(b) Pour la population générale, complète le tableau sur 100\,000 personnes.

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
M	?	?	?
$\bar{\text{M}}$	?	?	?
Total	?	?	100000

(c) Une personne de la population générale est positive. Calcule la probabilité qu'elle ait le virus. Compare le nombre de faux positifs et de vrais positifs.

(d) Un patient hospitalisé avec des symptômes est positif. Calcule la probabilité qu'il ait le virus. Utilise un tableau sur 10\,000 patients.

(e) Un médecin affirme : « Un test positif n'a pas la même valeur selon la personne testée. » Justifie cette phrase avec tes résultats et explique le rôle de $P(M)$.

Ex. 47 ★★★ **Car scolaire : qui sont les usagers ?** — Dans un lycée, 40 % des élèves sont en 2nde, 35 % en 1re et 25 % en terminale. Prennent le car : 60 % des élèves de 2nde, 50 % de ceux de 1re et 30 % de ceux de terminale. On choisit un élève au hasard. On note S, R, T : « il est en 2nde », « en 1re », « en terminale », et C : « il prend le car ». Arrondis au millième.

(a) Construis l'arbre pondéré sur ta copie. Calcule ensuite $P(S \cap C)$, $P(R \cap C)$ et $P(T \cap C)$.

(b) Déduis-en la probabilité que l'élève prenne le car.

(c) Léa affirme : « 60 % des usagers du car sont en 2nde. » Vrai ou faux ? Justifie en écrivant en notation la probabilité donnée par l'énoncé et celle dont parle Léa.

(d) Calcule la proportion d'élèves de terminale parmi les élèves qui ne prennent pas le car.

(e) On suppose $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ non nuls. Justifie que $P_A(B) = P_B(A)$ seulement si $P(A) = P(B)$. Est-ce le cas pour S et C ?

Ex. 48 ★★★ **Deux scanners de bagages « fiables à 99 % »** — Dans un aéroport, 2 % des bagages contiennent un objet interdit. Le scanner A sonne pour 99 % des bagages avec objet interdit et laisse passer 90 % des autres ; le scanner B sonne pour 90 % des premiers et laisse passer 99 % des autres. On choisit un bagage au hasard. On note O : « il contient un objet interdit » et D : « le scanner sonne ». Arrondis au millième.

(a) Les deux fabricants annoncent « fiable à 99 % ». Pour chaque scanner, écris en notation la probabilité qui vaut 0,99 et donne son nom.

(b) Pour le scanner A, complète le tableau sur 10\,000 bagages.

	D	**$\bar{\text{D}}$**	**Total**
O	?	?	?
$\bar{\text{O}}$	?	?	?
Total	?	?	10000

(c) Pour le scanner B, calcule le nombre de faux positifs et le nombre de faux négatifs sur 10\,000 bagages.

(d) Pour chaque scanner, calcule la probabilité qu'un bagage qui a fait sonner le scanner contienne un objet interdit.

(e) L'aéroport veut d'abord laisser passer le moins possible d'objets interdits, puis éviter les fouilles inutiles. Quel scanner doit-il choisir ? Justifie avec tes résultats.