benprof
particulier.fr

1. Modèle probabiliste et équiprobabilité

Ex. 1 ★☆☆ Tombola du lycée

(a) Le ticket est tiré au hasard, donc les 30 issues ont la même probabilité. $\Omega = \{1\,;2\,;\ldots\,;30\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 30$.

(b) $A = \{4\,;8\,;12\,;16\,;20\,;24\,;28\}$, donc $\text{Card}(A) = 7$ et $P(A) = \frac{7}{30}$.

(c) $B = \{5\,;15\,;25\}$, donc $\text{Card}(B) = 3$ et $P(B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

(d) $P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$.

(e) Un multiple de 4 est pair, alors qu'un numéro qui se termine par 5 est impair. Ainsi $A \cap B = \varnothing$ et $P(A \cap B) = 0$: A et B sont incompatibles.

(f) $C = \{3\,;6\,;\ldots\,;30\}$ contient 10 numéros et $B \cap C = \{15\}$. Le 15 ne se compte qu'une fois : $P(B \cup C) = \frac{3}{30} + \frac{10}{30} - \frac{1}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

Ex. 2 ★☆☆ Comment viens-tu au lycée ?

(a) $38\,\% = 0{,}38$; $12\,\% = 0{,}12$; $27\,\% = 0{,}27$; $9\,\% = 0{,}09$. La somme des probabilités vaut 1, donc $P(\text{marche}) = 1 - (0{,}38 + 0{,}12 + 0{,}27 + 0{,}09) = 0{,}14$.

(b) « Pas en bus » est le contraire de « bus » : $1 - 0{,}38 = 0{,}62$.

(c) On additionne les probabilités des deux issues : $0{,}12 + 0{,}14 = 0{,}26$.

(d) « Ni bus ni voiture » est le contraire de « bus ou voiture » : $1 - (0{,}38 + 0{,}27) = 0{,}35$.

(e) Non : $0{,}55 + 0{,}35 + 0{,}2 = 1{,}1$, alors que la somme doit valoir 1. Pour compléter la loi, il faudrait une probabilité de $-0{,}1$, ce qui est impossible.

Ex. 3 ★★☆ Deux dés sur le plateau

(a) Non. Les dés sont équilibrés, donc ce sont les $6 \times 6 = 36$ couples (rouge ; vert) qui sont équiprobables, pas les 11 sommes. $A = \{(2;6)\,;(3;5)\,;(4;4)\,;(5;3)\,;(6;2)\}$, donc $P(A) = \frac{5}{36}$, et non $\frac{1}{11}$.

(b) Somme 10 : (4; 6), (5; 5), (6; 4) ; somme 11 : (5; 6), (6; 5) ; somme 12 : (6; 6). Cela fait 6 couples, donc $P(S \geqslant 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(c) $\overline{B}$: « aucun dé n'affiche 6 ». Chaque dé a 5 faces possibles, donc $5 \times 5 = 25$ couples et $P(\overline{B}) = \frac{25}{36}$. On en déduit $P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Ex. 3 (suite)

(d) Non : $A \cap B = \{(2;6)\,;(6;2)\} \neq \varnothing$. Ces deux couples ne se comptent qu'une fois : $P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$. La somme vaut 8 ou il y a au moins un 6 dans 14 couples sur 36.

Ex. 4 ★★☆ Les lancers francs de Lina

(a) $f = \frac{185}{250} = 0{,}74$, donc $P(R) = 0{,}74$ et $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}74 = 0{,}26$.

(b) Non : c'est une hypothèse du modèle, qui ne se démontre pas. Elle s'appuie sur une fréquence observée sur un grand nombre d'essais (250). Le modèle reste une approximation de la situation réelle.

(c) Non : $\frac{4}{5} = 0{,}8$ est une fréquence observée sur seulement 5 essais. Elle varie beaucoup d'une série à l'autre et ne change pas la probabilité du modèle, qui reste 0,74.

(d) On divise chaque effectif par 200 : $P(0) = \frac{90}{200} = 0{,}45$; $P(1) = \frac{10}{200} = 0{,}05$; $P(2) = \frac{76}{200} = 0{,}38$; $P(3) = \frac{24}{200} = 0{,}12$. La somme vaut bien 1. « Au moins 1 point » est le contraire de « 0 point » : $1 - 0{,}45 = 0{,}55$. Lina marque au moins 1 point avec la probabilité 0,55.

Ex. 5 ★★☆ Abonnements en ligne

(a) $A \cap B$: « l'habitant a à la fois un abonnement de musique et un abonnement de vidéo ». $\overline{B}$: « l'habitant n'a pas d'abonnement de vidéo ».

(b) Une probabilité ne dépasse jamais 1, donc 1,09 signale une erreur : Noé a compté deux fois les habitants qui ont les deux abonnements. $P(A \cup B) = 0{,}48 + 0{,}61 - 0{,}32 = 0{,}77$.

(c) « Aucun des deux » est le contraire de « A ou B » : $1 - 0{,}77 = 0{,}23$. Parmi les habitants, 23 % n'ont aucun des deux abonnements.

(d) Faux : $P(A \cap B) = 0{,}32 \neq 0$, donc $A \cap B \neq \varnothing$. Certains habitants ont les deux abonnements.

(e) Faux. C et D sont bien incompatibles : on ne peut pas avoir à la fois aucun abonnement et les deux. Mais ils ne sont pas contraires, car $P(C) + P(D) = 0{,}23 + 0{,}32 = 0{,}55 \neq 1$. Un habitant qui n'a que la musique n'appartient ni à C ni à D.

Ex. 6 ★★★ **Une carte dans un jeu de 32**

(a) La carte est tirée « au hasard » : les 32 cartes ont la même chance d'être tirées, donc les issues sont équiprobables et $\text{Card}(\Omega) = 32$. R contient $2 \times 8 = 16$ cartes : $P(R) = \frac{16}{32} = 0{,}5$. F contient $4 \times 3 = 12$ cartes : $P(F) = \frac{12}{32} = 0{,}375$.

(b) $R \cap F$: « la carte est une figure rouge ». Il y a 2 couleurs rouges $\times$ 3 figures, donc $\text{Card}(R \cap F) = 6$ et $P(R \cap F) = \frac{6}{32} = 0{,}1875$.

(c) Inès compte deux fois les 6 figures rouges, qui sont à la fois dans R et dans F. Par le dénombrement : $\text{Card}(R \cup F) = 16 + 12 - 6 = 22$, donc $P(R \cup F) = \frac{22}{32} = 0{,}6875$. Par la formule : $P(R \cup F) = P(R) + P(F) - P(R \cap F) = 0{,}5 + 0{,}375 - 0{,}1875 = 0{,}6875$.

(d) « Ni rouge ni figure » est le contraire de « rouge ou figure » : c'est $\overline{R \cup F}$.
Donc $P(\overline{R \cup F}) = 1 - 0{,}6875 = 0{,}3125$. Vérification : il s'agit des cartes noires qui ne sont pas des figures, $2 \times 5 = 10$ cartes, et $\frac{10}{32} = 0{,}3125$.

(e) Faux. Un as noir est une carte noire : $\overline{R} \cap N = N \neq \varnothing$, donc $\overline{R}$ et N ne sont pas incompatibles. $P(N) = \frac{2}{32} = 0{,}0625$ et $P(\overline{R} \cup N) = 0{,}5 + 0{,}0625 - 0{,}0625 = 0{,}5$.
C'est logique : tous les as noirs sont déjà dans $\overline{R}$, donc $\overline{R} \cup N = \overline{R}$.

Ex. 7 ★★★ **La roue du magasin**

(a) La somme des probabilités des issues vaut 1, donc $P(\text{Bon 10 €}) = 1 - (0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}07) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$.

(b) « Au moins 10 € » regroupe les issues « Bon 10 € » et « Bon 20 € » : $0{,}18 + 0{,}07 = 0{,}25$. Un passage en caisse sur quatre donne un bon d'au moins 10 €.

(c) $\overline{E}$ est « perdre » : $P(E) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. $\overline{F}$ est « gagner le bon de 20 € » : $P(F) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$.

(d) $E \cap F$: « gagner un bon de 5 € ou de 10 € », donc $P(E \cap F) = 0{,}25 + 0{,}18 = 0{,}43$. $P(E \cup F) = 0{,}5 + 0{,}93 - 0{,}43 = 1$. Sans retirer 0,43, on trouverait $1{,}43 > 1$, ce qui est impossible. Chaque secteur est dans E ou dans F (perdre, c'est ne pas gagner le bon de 20 €) : $E \cup F = \Omega$ est l'événement certain.

(e) Bon 5 € : $2 \times 0{,}25 = 0{,}5$; Bon 10 € : 0,18 ; Bon 20 € : 0,07. La somme vaut 1, donc $P(\text{Perdu}) = 1 - (0{,}5 + 0{,}18 + 0{,}07) = 0{,}25$. Alors $P(E) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$: parmi les passages en caisse, trois sur quatre donnent désormais un bon.

Ex. 8 ★★★ **Le dossard gagnant du cross**

(a) 1 n'est pas premier et 2 l'est. $A = \{2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19\,;23\,;29\,;31\,;37\,;41\,;43\,;47\}$, donc $\text{Card}(A) = 15$. Le tirage se fait au hasard, donc les 50 issues sont équiprobables : $P(A) = \frac{15}{50} = 0{,}3$.

(b) Non. Le contraire de « au moins un chiffre 3 » est « aucun chiffre 3 ». « Au plus un chiffre 3 » contient aussi 3, 13, 23… Parmi les numéros de 1 à 50, seul 33 a deux chiffres 3, donc l'événement de Noé a pour probabilité $\frac{49}{50} = 0{,}98$.

(c) $\overline{C}$: « aucun chiffre 3 ». On compte : de 1 à 9, 8 numéros ; de 10 à 19, 9 ; de 20 à 29, 9 ; de 30 à 39, aucun ; de 40 à 49, 9 ; enfin 50.
Donc $\text{Card}(\overline{C}) = 36$ et $P(C) = 1 - \frac{36}{50} = \frac{14}{50} = 0{,}28$.

(d) $A \cap C = \{3\,;13\,;23\,;31\,;37\,;43\}$, soit 6 numéros. « Premier sans chiffre 3 » est $A \cap \overline{C}$: on retire ces 6 numéros des 15 nombres premiers. $\text{Card}(A \cap \overline{C}) = 15 - 6 = 9$ (ce sont 2, 5, 7, 11, 17, 19, 29, 41 et 47), donc la probabilité vaut $\frac{9}{50} = 0{,}18$.

(e) De 51 à 60, les seuls nombres premiers sont 53 et 59 : il y en aura 17 sur 60. $P = \frac{17}{60} \approx 0{,}283$, ce qui est plus petit que 0,3. La probabilité ne sera donc pas plus grande : elle diminuera légèrement.

2. *Probabilité conditionnelle avec un tableau croisé*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — lire un tableau croisé**

(a) $P(T) = \frac{240}{500} = 0{,}48$: on divise le total de la ligne T par le total général.

(b) « À la fois » : c'est une intersection, sans condition. $P(T \cap V) = \frac{72}{500} = 0{,}144$.

(c) $P_T(V) = \frac{72}{240} = 0{,}3$: parmi les salariés en télétravail, 30 % viennent en vélo.

(d) La condition est « être cycliste », donc V va en indice. $P_V(T) = \frac{72}{120} = 0{,}6$: 60 % des cyclistes télétravaillent.

(e) $P_T(\overline{V}) = 1 - P_T(V) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. On vérifie dans le tableau : $\frac{168}{240} = 0{,}7$.

(f) $P_{\overline{T}}(V) = \frac{48}{260} = \frac{12}{65} \approx 0{,}18$: parmi les salariés qui ne télétravaillent pas, environ 18 % viennent en vélo.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes — traduire et utiliser la formule**

(a) $P(V) = 0{,}4$; $P(G) = 0{,}15$; $P(V \cap G) = 0{,}03$ (« à la fois » : c'est une intersection, sans condition).

(b) « Parmi les vaccinés » : la condition est V, donc on cherche $P_V(G) = \frac{P(V \cap G)}{P(V)} = \frac{0{,}03}{0{,}4} = 0{,}075$. Léa a tort : 7,5 % des vaccinés ont eu la grippe. Les 3 % sont une proportion de toute la population, c'est-à-dire $P(V \cap G)$.

(c) $P_G(V)$ est la probabilité que l'habitant soit vacciné sachant qu'il a eu la grippe. $P_G(V) = \frac{0{,}03}{0{,}15} = 0{,}2$: parmi les personnes grippées, 20 % étaient vaccinées.

(d) $P_V(\overline{G}) = 1 - P_V(G) = 1 - 0{,}075 = 0{,}925$: parmi les vaccinés, 92,5 % n'ont pas eu la grippe.

Ex. 11 ★★☆ **Compléter le tableau avant de calculer**

(a) Ligne C : $360 - 135 = 225$. Ligne $\overline{C}$: total $600 - 360 = 240$, puis $180 - 135 = 45$ et $240 - 45 = 195$. Colonne $\overline{B}$: $600 - 180 = 420$, et on vérifie que $225 + 195 = 420$.

	B	$\overline{B}$	Total
C	135	225	360
$\overline{C}$	45	195	240
Total	180	420	600

(b) $P_C(B) = \frac{135}{360} = 0{,}375 \approx 0{,}38$: parmi les clients qui ont la carte, 37,5 % ont acheté du bio.

(c) $P_{\overline{C}}(B) = \frac{45}{240} = 0{,}1875 \approx 0{,}19$: parmi les clients sans carte, environ 19 % achètent du bio. Comme $0{,}375 = 2 \times 0{,}1875$, les clients qui ont la carte achètent exactement deux fois plus souvent du bio.

(d) Faux. « Parmi les acheteurs de bio » : la condition est B, donc on se restreint à la colonne B (180 clients). $P_B(\overline{C}) = \frac{45}{180} = 0{,}25$. Parmi les acheteurs de bio, seulement 25 % n'ont pas la carte. Donc $P_B(C) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$: les trois quarts des acheteurs de bio ont la carte.

Ex. 12 ★★☆ **Un tableau construit à partir de pourcentages**

(a) Internes : $1\,200 \times 0{,}25 = 300$. On en déduit $300 \times 0{,}4 = 120$ inscrits et 180 non inscrits. Non-internes : 900, dont $900 \times 0{,}15 = 135$ inscrits et 765 non inscrits. Les 15 % se calculent sur les 900 non-internes, pas sur les 1 200 élèves.

	S	$\overline{S}$	Total
I	120	180	300
$\overline{I}$	135	765	900
Total	255	945	1200

(b) Cette phrase traduit $P_I(S) = 0{,}4$. Pour l'intersection, on divise par le total général : $P(I \cap S) = \frac{120}{1\,200} = 0{,}1$.

(c) Inès a tort : $P(S) = \frac{255}{1\,200} = 0{,}2125 \approx 0{,}21$. On ne peut pas faire la moyenne simple des deux taux, car les deux groupes n'ont pas le même effectif (300 internes et 900 non-internes).

(d) La condition est S : $P_S(I) = \frac{120}{255} = \frac{8}{17} \approx 0{,}47$. Parmi les inscrits à l'association sportive, environ 47 % sont internes. Ce n'est pas la même chose que « parmi les internes, 40 % sont inscrits ».

Ex. 13 ★★☆ **Filles qui nagent ou nageurs qui sont des filles ?**

(a) Faux. « Une fille qui nage » : c'est une intersection, sans condition. $P(F \cap N) = \frac{54}{250} = 0{,}216$. La valeur $0{,}45 = \frac{54}{120}$ est $P_F(N)$: parmi les filles, 45 % nagent.

(b) La condition est N : $P_N(F) = \frac{54}{93} = \frac{18}{31}$. Parmi les nageurs, environ 58 % sont des filles. Ce n'est pas $P_F(N) = 0{,}45$ (parmi les filles, celles qui nagent).

(c) $P_F(\overline{N}) = \frac{66}{120} = \frac{11}{20} = 0{,}55$. On peut aussi écrire $1 - P_F(N) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

(d) Faux. On a bien $P_{\overline{F}}(\overline{N}) = \frac{91}{130} = 0{,}7$: cela veut dire que parmi les garçons, 70 % ne nagent pas. Pour tous les licenciés, on calcule $P(\overline{F} \cap \overline{N}) = \frac{91}{250} = 0{,}364$, soit 36,4 %.

Ex. 14 ★★★ **Corriger la copie de Lina**

(a) Lina a divisé par le total général : $\frac{210}{800}$, c'est $P(S \cap C)$. Pour $P_S(C)$, on se restreint à la ligne S (480 abonnés) : $P_S(C) = \frac{210}{480} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$. Parmi les abonnés, 43,75 % sont allés au cinéma ce mois-ci.

Ex. 14 **(suite)**

(b) La condition est « la personne est allée au cinéma » : c'est C qui va en indice. On cherche donc $P_C(S)$ et on se restreint à la colonne C : $P_C(S) = \frac{210}{340} = \frac{21}{34} \approx 0{,}62$. Parmi les personnes allées au cinéma, environ 62 % sont abonnées.

(c) Le contraire doit rester dans la même condition : $P_S(\overline{C}) = 1 - P_S(C) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} = 0{,}5625 \approx 0{,}56$ (on vérifie aussi que $\frac{270}{480} = \frac{9}{16}$). Parmi les abonnés, environ 56 % ne sont pas allés au cinéma ce mois-ci. Le calcul de Lina, $1 - P(C)$, donne $P(\overline{C})$, qui concerne toutes les personnes interrogées.

(d) Première phrase : la condition est « non abonné », donc $\overline{S}$ va en indice. $P_{\overline{S}}(\overline{C}) = \frac{190}{320} = \frac{19}{32} \approx 0{,}59$: parmi les non-abonnés, environ 59 % ne sont pas allés au cinéma. Seconde phrase : la condition est $\overline{C}$. $P_{\overline{C}}(\overline{S}) = \frac{190}{460} = \frac{19}{46} \approx 0{,}41$: parmi les personnes qui ne sont pas allées au cinéma, environ 41 % ne sont pas abonnées. La case est la même (190), mais on divise par le total de la ligne $\overline{S}$ dans un cas et par celui de la colonne $\overline{C}$ dans l'autre.

Ex. 15 ★★★ **Trois transporteurs, un seul responsable ?**

(a) On se restreint à chaque ligne. $P_X(R) = \frac{36}{1\,200} = 0{,}03$; $P_Y(R) = \frac{40}{500} = 0{,}08$; $P_Z(R) = \frac{39}{300} = 0{,}13$. Parmi les colis confiés à Z, 13 % arrivent en retard : Z a le taux de retard le plus élevé.

(b) Cette fois, la condition est R : on se restreint à la colonne R, soit 115 colis. $P_R(X) = \frac{36}{115} \approx 0{,}31$; $P_R(Y) = \frac{40}{115} = \frac{8}{23} \approx 0{,}35$; $P_R(Z) = \frac{39}{115} \approx 0{,}34$. Parmi les colis en retard, la plus grande part vient de Y : c'est le plus probablement responsable, même si Z a le pire taux. $P_R(Z)$ et $P_Z(R)$ sont deux nombres différents.

(c) « À la fois » : c'est une intersection, sans condition. $P(Z \cap R) = \frac{39}{2\,000} = 0{,}0195 \approx 0{,}02$. Pour « ou », on applique la formule de la réunion : $P(Z \cup R) = P(Z) + P(R) - P(Z \cap R) = \frac{300}{2\,000} + \frac{115}{2\,000} - \frac{39}{2\,000} = \frac{376}{2\,000} = 0{,}188 \approx 0{,}19$. Les 39 colis communs ne sont comptés qu'une fois.

(d) Avant : $P(R) = \frac{115}{2\,000} = \frac{23}{400} = 0{,}0575 \approx 0{,}06$. Après : X livre $1\,200 + 300 = 1\,500$ colis, dont $1\,500 \times 0{,}03 = 45$ en retard ; Y a toujours 40 colis en retard. Il y a donc $45 + 40 = 85$ retards, et $P(R) = \frac{85}{2\,000} = 0{,}0425 \approx 0{,}04$. On a 30 retards de moins : la part des colis en retard passe d'environ 6 % à environ 4 %.

Ex. 16 ★★★ **Le casque protège-t-il les skieurs ?**

(a) Par différences : $\text{Card}(K \cap \overline{B}) = 3\,200 - 64 = 3\,136$; $\text{Card}(\overline{K}) = 4\,000 - 3\,200 = 800$; $\text{Card}(\overline{K} \cap B) = 104 - 64 = 40$; $\text{Card}(\overline{K} \cap \overline{B}) = 800 - 40 = 760$; $\text{Card}(\overline{B}) = 4\,000 - 104 = 3\,896$.

	B	$\overline{\text{B}}$	Total
K	64	3136	3200
$\overline{\text{K}}$	40	760	800
Total	104	3896	4000

Vérification : $3\,136 + 760 = 3\,896$ et $104 + 3\,896 = 4\,000$.

(b) $P_B(K)$: parmi les skieurs blessés, la probabilité que le skieur porte un casque. On se restreint à la colonne B : $P_B(K) = \frac{64}{104} = \frac{8}{13} \approx 0{,}62$. $P_K(B)$: parmi les skieurs qui portent un casque, la probabilité qu'il se soit blessé. On se restreint à la ligne K : $P_K(B) = \frac{64}{3\,200} = \frac{1}{50} = 0{,}02$.

(c) L'article utilise $P_B(K) \approx 0{,}62$ alors qu'il faudrait comparer les risques dans chaque groupe. $P_K(B) = 0{,}02$ et $P_{\overline{K}}(B) = \frac{40}{800} = \frac{1}{20} = 0{,}05$. Parmi les skieurs avec casque, 2 % se sont blessés, contre 5 % parmi les skieurs sans casque : le risque est plus de deux fois plus faible avec un casque. Les blessés portent surtout un casque parce que 80 % des skieurs en portent un ($\frac{3\,200}{4\,000} = 0{,}8$).

(d) « À la fois » : c'est une intersection, donc on divise par le total général : $P(\overline{K} \cap B) = \frac{40}{4\,000} = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Pour $P_{\overline{K}}(B) = 0{,}05$, on a le même numérateur, 40, mais on divise seulement par les 800 skieurs sans casque. Ce sont deux nombres différents.

3. *Construire un arbre pondéré*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : compléter les branches d'un arbre**

(a) Règle du nœud au départ : $P(\overline{M}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

(b) $P_M(N) = 0{,}8$. Règle du nœud en M : $P_M(\overline{N}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

(c) $P_{\overline{M}}(N) = 0{,}45$ et $P_{\overline{M}}(\overline{N}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

(d) $P(M \cap N) = P(M) \times P_M(N) = 0{,}35 \times 0{,}8 = 0{,}28$.

(e) $P(\overline{M} \cap \overline{N}) = 0{,}65 \times 0{,}55 = 0{,}3575$.

(f) Faux : 0,8 est sur le second niveau, c'est $P_M(N)$ (la proportion parmi les mineurs seulement). En réalité, $P(N) = 0{,}28 + 0{,}65 \times 0{,}45 = 0{,}28 + 0{,}2925 = 0{,}5725$.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : branches, chemins et tirages**

(a) Après une rouge, il reste 3 rouges sur 9 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(b) Avec remise, l'urne n'a pas changé : $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

(c) Règle du nœud avec trois branches : $1 - 0{,}25 - 0{,}4 = 0{,}35$.

(d) Règle du chemin : $P(A \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}035$.

(e) La somme des quatre chemins vaut $1 : 1 - 0{,}12 - 0{,}28 - 0{,}18 = 0{,}42$.

(f) Non. $P(A \cap B)$ est la probabilité au bout du chemin, pas sur une branche. La branche porte $P_A(B) = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$.

Ex. 19 ★★☆ **Festival : choisir l'ordre des niveaux**

(a) On place T au premier niveau : 22 % est donné sur l'ensemble des spectateurs, alors que 15 % et 40 % sont donnés « parmi » ceux qui sont venus en train ou non.

(b) Niveau 1 : T avec 0,22 et $\overline{T}$ avec $1 - 0{,}22 = 0{,}78$. Niveau 2, nœud T : J avec 0,15 et $\overline{J}$ avec 0,85. Nœud $\overline{T}$: J avec 0,4 et $\overline{J}$ avec 0,6.

(c) $P(T \cap \overline{J}) = 0{,}22 \times 0{,}85 = 0{,}187$: 18,7 % des spectateurs sont venus en train sans prendre de pass.

(d) Deux chemins mènent à J : $P(J) = 0{,}22 \times 0{,}15 + 0{,}78 \times 0{,}4 = 0{,}033 + 0{,}312 = 0{,}345$. Au total, 34,5 % des spectateurs ont acheté un pass 3 jours.

(e) Les quatre chemins valent 0,033 ; 0,187 ; 0,312 et $0{,}78 \times 0{,}6 = 0{,}468$. Leur somme : $0{,}033 + 0{,}187 + 0{,}312 + 0{,}468 = 1$.

Ex. 20 ★★☆ **Trois lignes de bus**

(a) Règle du nœud : $P(L_3) = 1 - 0{,}4 - 0{,}35 = 0{,}25$.

(b) Niveau 1 : L_1 avec 0,4, L_2 avec 0,35, L_3 avec 0,25. Niveau 2, nœud L_1 : R avec 0,1 et $\overline{R}$ avec 0,9. Nœud L_2 : R avec 0,06 et $\overline{R}$ avec 0,94. Nœud L_3 : R avec 0,2 et $\overline{R}$ avec 0,8.

(c) $P(L_3 \cap R) = 0{,}25 \times 0{,}2 = 0{,}05$: 5 % des trajets se font sur la ligne 3 avec du retard.

(d) $P(L_2 \cap \overline{R}) = 0{,}35 \times 0{,}94 = 0{,}329$: 32,9 % des trajets se font sur la ligne 2 sans retard.

Ex. 20 (suite)

(e) Non : les lignes n'ont pas le même poids, on ne fait pas la moyenne simple des taux. On additionne les trois chemins qui mènent à R : $P(R) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}35 \times 0{,}06 + 0{,}25 \times 0{,}2 = 0{,}04 + 0{,}021 + 0{,}05 = 0{,}111$, soit 11,1 %.

Ex. 21 ★★☆ **Jeu de jetons : tirage sans remise**

(a) $P(G_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Après un gagnant, il reste 5 gagnants sur 9 jetons : $P_{G_1}(G_2) = \frac{5}{9}$.

(b) Après un perdant, il reste 6 gagnants et 3 perdants sur 9 jetons : $P_{\overline{G_1}}(G_2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(c) $P(G_1 \cap G_2) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$.

(d) Deux chemins : $P(G_1 \cap \overline{G_2}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$ et $P(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$. Leur somme vaut $\frac{8}{15}$.

(e) Avec remise, le sac contient toujours 6 gagnants sur 10 jetons : $\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$, soit 0,36.

Ex. 22 ★★★ **Dépistage d'une maladie rare**

(a) « 2 % de la population » : $P(M) = 0{,}02$. C'est une probabilité sur l'ensemble, elle va au premier niveau. « Positif chez 95 % des malades » : $P_M(T) = 0{,}95$, c'est la sensibilité. « Négatif chez 90 % des non-malades » : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}9$, c'est la spécificité. Arbre : au premier niveau, M avec 0,02 et $\overline{M}$ avec $1 - 0{,}02 = 0{,}98$. Depuis M : T avec 0,95 et $\overline{T}$ avec $1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Depuis $\overline{M}$: T avec $1 - 0{,}9 = 0{,}1$ et $\overline{T}$ avec 0,9. Attention : 0,95 est $P_M(T)$, ce n'est pas $P(T)$.

(b) Un faux positif est une personne non malade avec un test positif : $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}98 \times 0{,}1 = 0{,}098$. Ensuite, $P(T)$ est la somme des deux chemins qui mènent à T : $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}098 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$.

(c) Malades : $10\,000 \times 0{,}02 = 200$, dont $200 \times 0{,}95 = 190$ positifs et $200 - 190 = 10$ négatifs. Non-malades : 9 800, dont $9\,800 \times 0{,}1 = 980$ positifs et $9\,800 - 980 = 8\,820$ négatifs.

	T	T̄	Total
M	190	10	200
M̄	980	8 820	9 800
Total	1 170	8 830	10 000

(d) Pour $P_T(M)$, on se place dans la colonne de T : $P_T(M) = \frac{190}{1\,170} = \frac{19}{117} \approx 0{,}16$. Parmi les personnes dont le test est positif, environ 16 % seulement sont malades.

Ex. 22 **(suite)**

(e) Le journaliste confond $P_M(T) = 0{,}95$ (parmi les malades, la part de tests positifs) et $P_T(M) \approx 0{,}16$ (parmi les tests positifs, la part de malades). Il inverse le conditionnement. L'écart vient de la rareté de la maladie : sur $10\,000$ personnes, il y a 980 faux positifs pour seulement 190 vrais positifs. La grande majorité des tests positifs concerne donc des personnes saines.

Ex. 23 ★★★ **Car scolaire et retards : retrouver une branche**

(a) Non. « À la fois usagers du car et en retard » se traduit par $P(C \cap R) = 0{,}14$. Cette probabilité est calculée sur l'ensemble des élèves, ce n'est pas un « parmi ». C'est une intersection : elle se lit au bout du chemin $C \to R$, jamais sur une branche.

(b) On retrouve la branche avec $P_C(R) = \frac{P(C \cap R)}{P(C)} = \frac{0{,}14}{0{,}4} = 0{,}35$. Parmi les élèves qui prennent le car, 35 % sont en retard au moins une fois par mois. Arbre : au premier niveau, C avec 0,4 et $\overline{C}$ avec $1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Depuis C : R avec 0,35 et $\overline{R}$ avec $1 - 0{,}35 = 0{,}65$. Depuis $\overline{C}$: R avec 0,05 et $\overline{R}$ avec $1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

(c) Deux chemins mènent à R : $P(R) = P(C \cap R) + P(\overline{C} \cap R) = 0{,}14 + 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}14 + 0{,}03 = 0{,}17$. Au total, 17 % des élèves sont en retard au moins une fois par mois.

(d) Par les chemins : $P(\overline{R}) = P(C \cap \overline{R}) + P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}95 = 0{,}26 + 0{,}57 = 0{,}83$. Par le contraire : $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$. Les deux méthodes donnent le même résultat : 83 % des élèves sont en retard moins d'une fois par mois.

(e) On cherche $P_R(C) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}14}{0{,}17} = \frac{14}{17} \approx 0{,}82$. Parmi les élèves souvent en retard, environ 82 % prennent le car. Ce résultat est différent de $P_C(R) = 0{,}35$, car on ne divise pas par le même groupe : ici on divise par les élèves en retard, et non par les élèves qui prennent le car.

Ex. 24 ★★★ **Cartes bonus : avec ou sans remise ?**

(a) Premier niveau : B_1 avec $\frac{5}{8}$ et $\overline{B_1}$ avec $\frac{3}{8}$. Au second tirage, le paquet n'a plus que 7 cartes. Depuis B_1, il reste 4 bonus et 3 malus : $P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{7}$ et $P_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{3}{7}$. Depuis $\overline{B_1}$, il reste 5 bonus et 2 malus : $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{5}{7}$ et $P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{2}{7}$. Chaque nœud a bien pour somme 1.

(b) Les deux cartes sont du même type si elles sont toutes deux bonus ou toutes deux malus. $P(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$ et $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$. La probabilité cherchée vaut $\frac{20}{56} + \frac{6}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Faux. Deux chemins mènent à B_2 : $P(B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$. On trouve donc $P(B_2) = P(B_1)$. Un bonus a pu partir, mais un malus aussi : les deux cas se compensent.

(d) Avec remise, le paquet est le même aux deux tirages, donc chaque branche porte $\frac{5}{8}$ vers bonus et $\frac{3}{8}$ vers malus. $P(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$ et $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$. La probabilité cherchée vaut $\frac{34}{64} = \frac{17}{32}$.

(e) « Types différents » est l'événement contraire de « même type ». Sans remise : $1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28} \approx 0{,}54$. Avec remise : $1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32} \approx 0{,}47$. Comme $\frac{15}{28} > \frac{15}{32}$, Nina a intérêt à jouer sans remise.

4. *Lire et calculer sur un arbre*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes — Compléter et lire les branches**

(a) Règle du nœud au départ de l'arbre : $P(\overline{L}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

(b) Règle du nœud en L : $P_L(\overline{S}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

(c) Faux. La règle du nœud porte sur les branches issues d'un même nœud : $P_{\overline{L}}(S) + P_{\overline{L}}(\overline{S}) = 0{,}3 + 0{,}7 = 1$. $P_L(S)$ et $P_{\overline{L}}(S)$ partent de deux nœuds différents : leur somme n'a aucune raison de valoir 1.

(d) « Un élève inscrit en club » : on sait que S est réalisé. C'est donc $P_S(L)$, à ne pas confondre avec $P_L(S) = 0{,}4$, donnée par l'arbre.

(e) Parmi les élèves qui ne sont pas demi-pensionnaires, 30 % pratiquent un sport en club.

(f) Faux. 0,4 se lit sur une branche du second niveau : c'est $P_L(S)$. « À la fois » demande le bout du chemin : $P(L \cap S) = 0{,}65 \times 0{,}4 = 0{,}26$, soit 26 % des élèves.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes — Règle du chemin**

(a) Règle du chemin : $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0{,}7 \times 0{,}45 = 0{,}315$.

(b) $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, donc $P(\overline{C} \cap V) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$, soit 6 % : 6 % des clients ne paient pas par carte et achètent une viennoiserie.

(c) On cherche $P(C \cap \overline{V})$. Nœud en C : $P_C(\overline{V}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.
Donc $P(C \cap \overline{V}) = 0{,}7 \times 0{,}55 = 0{,}385$.

(d) La somme des quatre chemins vaut 1 : $P(\overline{C} \cap \overline{V}) = 1 - 0{,}315 - 0{,}06 - 0{,}385 = 0{,}24$.

Ex. 26 (suite)

(e) $P_{\overline{C}}(\overline{V}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, donc $P(\overline{C} \cap \overline{V}) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$: on retrouve bien le même résultat.

(f) Faux. 0,45 est sur une branche du second niveau : c'est $P_C(V)$, la proportion d'acheteurs de viennoiserie parmi les clients qui paient par carte. V est au bout de deux chemins : $P(V) = 0{,}315 + 0{,}06 = 0{,}375$.

Ex. 27 ★★☆ Retards dans les transports

(a) Premier niveau : $P(B) = 0{,}55$ et $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$. Depuis B : $P_B(R) = 0{,}18$ et $P_B(\overline{R}) = 0{,}82$. Depuis $\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(R) = 0{,}06$ et $P_{\overline{B}}(\overline{R}) = 0{,}94$.

(b) $P(B \cap R) = 0{,}55 \times 0{,}18 = 0{,}099$: 9,9 % des trajets se font en bus et sont en retard.

(c) 0,099 est le bout du seul chemin $B \cap R$: il ne compte que les retards en bus. R se réalise par deux chemins : $P(R) = P(B \cap R) + P(\overline{B} \cap R) = 0{,}099 + 0{,}45 \times 0{,}06 = 0{,}099 + 0{,}027 = 0{,}126$. 12,6 % des trajets sont en retard.

(d) Non. La moyenne simple donne 12 %, mais les deux groupes n'ont pas la même taille : il y a plus de trajets en bus (55 %), qui pèsent davantage. La bonne valeur est 12,6 %.

(e) $2\,000 \times 0{,}126 = 252$: environ 252 trajets sont en retard. En tram : $2\,000 \times 0{,}45 \times 0{,}06 = 54$ retards (les 198 autres ont lieu en bus).

Ex. 28 ★★☆ Deux jetons sans remise

(a) $P(R_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Si le premier est rouge, il reste 5 rouges sur 9 jetons : $P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{9}$. Donc $P(R_1 \cap R_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

(b) $P(\overline{R_1}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; s'il est vert, il reste 3 verts sur 9 : $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

(c) « Même couleur » se réalise de deux façons : deux rouges ou deux verts. On additionne les deux chemins : $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$.

(d) Le contraire de « au moins un vert » est « deux rouges ». Donc $P = 1 - P(R_1 \cap R_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

(e) Sami a calculé $\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = 0{,}36$, comme s'il remettait le jeton. Le tirage est sans remise : la composition du sac change, et la seconde branche vaut $\frac{5}{9}$, pas $\frac{6}{10}$.

Ex. 29 ★★☆ Retrouver une branche au club d'escalade

(a) $P(A) = 0{,}7$; « adultes et compétition » : $P(A \cap C) = 0{,}2$; « parmi les mineurs » : $P_{\overline{A}}(C) = 0{,}4$.

(b) On retrouve la branche : $P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$.

(c) Règle du nœud en A : $P_A(\overline{C}) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \approx 0{,}714$.

(d) $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. C se réalise par deux chemins : $P(C) = 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}2 + 0{,}12 = 0{,}32$. 32 % des adhérents font de la compétition.

(e) Inès arrondit trop tôt : elle obtient 0,49. Il faut garder la valeur exacte $\frac{5}{7}$ et n'arrondir qu'à la fin : $P(A \cap \overline{C}) = 0{,}7 \times \frac{5}{7} = 0{,}5$ (c'est aussi $0{,}7 - 0{,}2$).

Ex. 30 ★★★ Deux lancers francs

(a) Premier niveau : $P(R_1) = 0{,}8$ et $P(\overline{R_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Après R_1 : $P_{R_1}(R_2) = 0{,}85$ et $P_{R_1}(\overline{R_2}) = 0{,}15$. Après $\overline{R_1}$: $P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0{,}6$ et $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = 0{,}4$. Chemins (règle du chemin) : $P(R_1 \cap R_2) = 0{,}8 \times 0{,}85 = 0{,}68$; $P(R_1 \cap \overline{R_2}) = 0{,}8 \times 0{,}15 = 0{,}12$; $P(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$; $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$. Contrôle : $0{,}68 + 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}08 = 1$.

(b) « Exactement un lancer réussi » se réalise de deux façons : réussir le premier puis rater le second, ou rater le premier puis réussir le second. On additionne les deux chemins : $P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}24$. Maëlle réussit exactement un lancer dans 24 % des cas.

(c) Non. La moyenne simple compte les deux situations comme si elles avaient le même poids, alors que Maëlle réussit le premier lancer bien plus souvent (0,8) qu'elle ne le rate (0,2). R_2 est au bout de deux chemins : $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}8 \times 0{,}85 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}68 + 0{,}12 = 0{,}8$. Elle réussit le second lancer dans 80 % des cas, pas 72,5 %.

(d) $P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0{,}6$ se lit sur la branche qui va de $\overline{R_1}$ à R_2 : parmi les fois où Maëlle rate le premier lancer, elle réussit le second dans 60 % des cas. $P(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$ se lit au bout du chemin : sur l'ensemble des séries de deux lancers, 12 % sont un échec suivi d'une réussite.

Ex. 31 ★★★ **Colis en retard**

(a) La branche de R à T porte $P_R(T)$. On connaît $P(R) = 0{,}35$ et $P(R \cap T) = 0{,}042$.
Donc $P_R(T) = \frac{P(R\cap T)}{P(R)} = \frac{0{,}042}{0{,}35} = 0{,}12$. Parmi les commandes livrées en point relais, 12 % arrivent en retard.

(b) Non. $0{,}042 = P(R \cap T)$ est la probabilité d'un seul chemin : livrée en point relais ET en retard. Une commande peut aussi être en retard en étant livrée à domicile. $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$ et $P(\overline{R} \cap T) = 0{,}65 \times 0{,}08 = 0{,}052$.
Donc $P(T) = P(R \cap T) + P(\overline{R} \cap T) = 0{,}042 + 0{,}052 = 0{,}094$. 9,4 % des commandes arrivent en retard.

(c) $R \cap T$: $10\,000 \times 0{,}042 = 420$; total R : 3 500, donc $R \cap \overline{T}$: $3\,500 - 420 = 3\,080$. $\overline{R} \cap T$: $6\,500 \times 0{,}08 = 520$; $\overline{R} \cap \overline{T}$: $6\,500 - 520 = 5\,980$.

	T	T̄	Total
R	420	3 080	3 500
R̄	520	5 980	6 500
Total	940	9 060	10 000

(d) On cherche $P_T(R)$. Dans le tableau, on divise par le total de la colonne T : $P_T(R) = \frac{420}{940} = \frac{21}{47} \approx 0{,}45$. Parmi les commandes en retard, environ 45 % ont été livrées en point relais. Ce n'est pas la même chose que $P_R(T) = 0{,}12$: parmi les commandes livrées en point relais, seulement 12 % sont en retard. Inverser le conditionnement change complètement le résultat.

Ex. 32 ★★★ **Deux billets de tombola**

(a) Premier niveau : $P(G_1) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ et $P(\overline{G_1}) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. Après G_1 (il reste 4 gagnants et 20 perdants) : $P_{G_1}(G_2) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ et $P_{G_1}(\overline{G_2}) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$. Après $\overline{G_1}$ (il reste 5 gagnants et 19 perdants) : $P_{\overline{G_1}}(G_2) = \frac{5}{24}$ et $P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) = \frac{19}{24}$. Chemins : $P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$; $P(G_1 \cap \overline{G_2}) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$; $P(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{24} = \frac{1}{6}$; $P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = \frac{4}{5} \times \frac{19}{24} = \frac{19}{30}$. Contrôle : $\frac{1}{30} + \frac{5}{30} + \frac{5}{30} + \frac{19}{30} = 1$.

(b) Le contraire de « au moins un billet gagnant » est « deux billets perdants », c'est-à-dire $\overline{G_1} \cap \overline{G_2}$.
Donc $P = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$. Yanis gagne au moins un lot avec une probabilité de $\frac{11}{30}$, soit environ 37 %.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Notons U : « au moins un billet gagnant ». « Deux gagnants », c'est $G_1 \cap G_2$, qui est contenu dans U : Donc $U \cap (G_1 \cap G_2) = G_1 \cap G_2$. $P_U(G_1 \cap G_2) = \frac{P(G_1\cap G_2)}{P(U)} = \frac{1}{30} \times \frac{30}{11} = \frac{1}{11} \approx 0{,}09$. Parmi les tirages où Yanis gagne au moins un lot, environ 9 % lui en rapportent deux.

(d) Avec remise, l'urne est la même au second tirage : $P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. Deux billets perdants : $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$. Donc au moins un lot : $1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} = 0{,}36$.

(e) Non. Sans remise : $\frac{11}{30} = \frac{55}{150}$; avec remise : $\frac{9}{25} = \frac{54}{150}$. Le tirage sans remise est un peu plus favorable : après un billet perdant, il reste 5 gagnants sur 24 billets, et $\frac{5}{24} > \frac{5}{25}$. Yanis a intérêt à garder son premier billet.

5. *Passer d'un arbre à un tableau et inversement*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : de l'arbre au tableau**

(a) $\text{Card}(D) = 1\,000 \times 0{,}45 = 450$ élèves.

(b) Règle du chemin : $\text{Card}(D \cap S) = 1\,000 \times 0{,}45 \times 0{,}6 = 270$ élèves.

(c) Il y a $1\,000 - 450 = 550$ élèves non demi-pensionnaires, donc $\text{Card}(\overline{D} \cap S) = 1\,000 \times 0{,}55 \times 0{,}2 = 110$.

(d) $\text{Card}(D \cap \overline{S}) = 450 - 270 = 180$. Vérification : $270 + 180 = 450$.

(e) S est le total de sa colonne : $\text{Card}(S) = 270 + 110 = 380$ élèves.

(f) $P(S) = \frac{380}{1\,000} = 0{,}38$. Cette probabilité ne se lit sur aucune branche de l'arbre.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : du tableau à l'arbre**

(a) $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{400} = \frac{240}{400} = 0{,}6$.

(b) On divise par le total de la ligne A, pas par 400 : $P_A(F) = \frac{96}{240} = 0{,}4$.

(c) $P_{\overline{A}}(F) = \frac{32}{160} = 0{,}2$: parmi les non-abonnés, 20 % ont vu le film.

(d) $P_{\overline{A}}(\overline{F}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Vérification dans le tableau : $\frac{128}{160} = 0{,}8$.

(e) $P(F) = \frac{128}{400} = 0{,}32$. Léo a tort : F apparaît sur deux branches, il faut additionner les cases de la colonne F : $96 + 32 = 128$.

(f) $P_F(A) = \frac{\text{Card}(A\cap F)}{\text{Card}(F)} = \frac{96}{128} = 0{,}75$. Cette probabilité ne se lit pas sur l'arbre de départ.

Ex. 35 ★☆☆ Choisir le bon effectif fictif

(a) $N = 100 : 100 \times 0{,}8 = 80$ et $\text{Card}(A \cap B) = 100 \times 0{,}8 \times 0{,}35 = 28$.

(b) $P(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$. $N = 100 : 100 \times 0{,}25 = 25$ et $\text{Card}(A \cap B) = 100 \times 0{,}25 \times 0{,}6 = 15$.

(c) Avec $N = 100$, on obtient $100 \times 0{,}15 \times 0{,}7 = 10{,}5$: ce n'est pas un entier. $N = 1\,000 : 150$, puis $\text{Card}(A \cap B) = 1\,000 \times 0{,}15 \times 0{,}7 = 105$.

(d) Règle du nœud : $P_A(B) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$. Avec $N = 100 : 100 \times 0{,}12 \times 0{,}35 = 4{,}2$, ce n'est pas un entier. $N = 1\,000 : 120$, puis $\text{Card}(A \cap B) = 1\,000 \times 0{,}12 \times 0{,}35 = 42$.

(e) Avec $N = 1\,000 : 1\,000 \times 0{,}005 \times 0{,}9 = 4{,}5$, ce n'est pas un entier. $N = 10\,000 : 50$ tickets gagnants, puis $\text{Card}(A \cap B) = 10\,000 \times 0{,}005 \times 0{,}9 = 45$.

(f) Un effectif non entier signale un N mal choisi. Avec $N = 1\,000 : 1\,000 \times 0{,}03 = 30$ et $\text{Card}(A \cap B) = 1\,000 \times 0{,}03 \times 0{,}9 = 27$.

Ex. 36 ★★☆ Club de tennis : tableau et inversion

(a) $\text{Card}(C) = 1\,000 \times 0{,}25 = 250$ et $\text{Card}(C \cap E) = 1\,000 \times 0{,}25 \times 0{,}6 = 150$, donc $\text{Card}(C \cap \overline{E}) = 250 - 150 = 100$. $\text{Card}(\overline{C}) = 750$ et $\text{Card}(\overline{C} \cap E) = 750 \times 0{,}12 = 90$, donc $\text{Card}(\overline{C} \cap \overline{E}) = 750 - 90 = 660$.

	E	**Ē**	**Total**
C	150	100	250
C̄	90	660	750
Total	240	760	1 000

Vérification : $240 + 760 = 1\,000$.

(b) $P(E)$ est le total de la colonne E divisé par $1\,000$: $P(E) = \frac{150+90}{1\,000} = \frac{240}{1\,000} = 0{,}24$.

(c) $P_E(C) = \frac{\text{Card}(C \cap E)}{\text{Card}(E)} = \frac{150}{240} = 0{,}625$. Parmi les joueurs qui s'entraînent plus de deux fois par semaine, 62,5 % font de la compétition.

(d) Faux. Le nombre 60 % est $P_C(E)$: c'est la proportion des compétiteurs qui s'entraînent plus de deux fois par semaine. La proportion demandée est $P_E(C) = 0{,}625$, soit 62,5 %. Sami a confondu $P_C(E)$ et $P_E(C)$.

Ex. 37 ★★☆ Magasin : du tableau à l'arbre inversé

(a) $\text{Card}(F \cap \overline{L}) = 480 - 180 = 300$, $\text{Card}(\overline{F} \cap L) = 240 - 180 = 60$, $\text{Card}(\overline{F}) = 800 - 480 = 320$, $\text{Card}(\overline{L}) = 800 - 240 = 560$.

	L	**L̄**	**Total**
F	180	300	480
F̄	60	260	320
Total	240	560	800

Vérifications : $60 + 260 = 320$, $300 + 260 = 560$ et $240 + 560 = 800$.

(b) Premier niveau : $P(L) = \frac{240}{800} = 0{,}3$ et $P(\overline{L}) = 0{,}7$. Depuis L, on divise par le total de la colonne L : $P_L(F) = \frac{180}{240} = 0{,}75$ et $P_L(\overline{F}) = 0{,}25$. Depuis $\overline{L}$: $P_{\overline{L}}(F) = \frac{300}{560} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$ et $P_{\overline{L}}(\overline{F}) = \frac{260}{560} = \frac{13}{28} \approx 0{,}464$.

(c) Hugo a divisé par le total de la colonne L : il a calculé $P_L(F)$. Pour l'intersection, on divise par l'effectif total : $P(F \cap L) = \frac{180}{800} = 0{,}225$.

(d) $P_F(L) = \frac{180}{480} = 0{,}375$, alors que $P_L(F) = 0{,}75$. Parmi les clients qui ont la carte, 37,5 % achètent en ligne. Parmi les acheteurs en ligne, 75 % ont la carte. Les deux probabilités sont différentes : on ne peut pas inverser le conditionnement.

Ex. 38 ★★★ Dépistage d'une maladie rare : choisir N et inverser

(a) Effectif de M : $1\,000 \times 0{,}02 = 20$. Effectif de $M \cap T$: $20 \times 0{,}95 = 19$. Effectif de $\overline{M} \cap T$: $980 \times 0{,}03 = 29{,}4$. Ce n'est pas un nombre entier de personnes, donc $N = 1\,000$ est mal choisi : il faut prendre $N = 10\,000$.

(b) Il y a $10\,000 \times 0{,}02 = 200$ malades, dont $200 \times 0{,}95 = 190$ avec un test positif. Il y a 9 800 non-malades, dont $9\,800 \times 0{,}03 = 294$ avec un test positif. Par différence :

	T	**T̄**	**Total**
M	190	10	200
M̄	294	9506	9800
Total	484	9516	10 000

Vérification : $200 + 9\,800 = 10\,000$ et $484 + 9\,516 = 10\,000$.

(c) $P(T) = \frac{484}{10\,000} = 0{,}0484 \approx 0{,}048$. L'événement T regroupe deux chemins, $M \cap T$ et $\overline{M} \cap T$: on additionne les cases de la colonne T, $190 + 294 = 484$. Aucune branche de l'arbre ne donne cette somme.

Ex. 38 **(suite)**

(d) Non. On cherche $P_T(M) = \frac{\text{Card}(M \cap T)}{\text{Card}(T)} = \frac{190}{484} = \frac{95}{242} \approx 0{,}393$. Parmi les personnes testées positives, environ 39 % seulement sont malades. Comme la maladie est rare, les 294 faux positifs sont plus nombreux que les 190 vrais positifs. Les 95 % correspondent à $P_M(T)$, la sensibilité.

(e) $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{9\,506}{9\,516} \approx 0{,}999$. Parmi les personnes testées négatives, environ 99,9 % ne sont pas malades : un test négatif est très rassurant.

Ex. 39 ★★★ **Gare : retourner l'arbre et corriger deux erreurs**

(a) Abonnés : $1\,000 \times 0{,}35 = 350$, dont $350 \times 0{,}8 = 280$ aux heures de pointe. Non-abonnés : 650, dont $650 \times 0{,}4 = 260$ aux heures de pointe. Par différence :

	H	$\bar{\text{H}}$	Total
A	280	70	350
$\bar{\text{A}}$	260	390	650
Total	540	460	1000

Vérification : $350 + 650 = 1\,000$ et $540 + 460 = 1\,000$.

(b) Avec le tableau : $P(H) = \frac{280+260}{1\,000} = 0{,}54$ (total de la colonne H divisé par N). Avec l'arbre de départ : H est au bout de deux chemins, $A \cap H$ et $\overline{A} \cap H$, donc $P(H) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}65 \times 0{,}4 = 0{,}28 + 0{,}26 = 0{,}54$. Aucune branche ne donne seule $P(H)$.

(c) Inès a calculé $\frac{280}{350} = 0{,}8$, c'est-à-dire $P_A(H)$. Ici, la condition est H : on divise par le total de la colonne H. $P_H(A) = \frac{280}{540} = \frac{14}{27} \approx 0{,}519$. Parmi les voyageurs des heures de pointe, environ 52 % sont abonnés.

(d) Premier niveau : $P(H) = 0{,}54$ et $P(\overline{H}) = 0{,}46$. Depuis le nœud H : $P_H(A) = \frac{280}{540} = \frac{14}{27} \approx 0{,}519$ et $P_H(\overline{A}) = \frac{260}{540} = \frac{13}{27} \approx 0{,}481$. Depuis le nœud $\overline{H}$: $P_{\overline{H}}(A) = \frac{70}{460} = \frac{7}{46} \approx 0{,}152$ et $P_{\overline{H}}(\overline{A}) = \frac{390}{460} = \frac{39}{46} \approx 0{,}848$. Règle du nœud : $\frac{14}{27} + \frac{13}{27} = 1$ et $\frac{7}{46} + \frac{39}{46} = 1$.

(e) $P(A \cap H) = P(H) \times P_H(A) = 0{,}54 \times \frac{14}{27} = 0{,}28$. C'est bien $\frac{280}{1\,000}$. Les quatre chemins valent 0,28 ; $0{,}54 \times \frac{13}{27} = 0{,}26$; $0{,}46 \times \frac{7}{46} = 0{,}07$; $0{,}46 \times \frac{39}{46} = 0{,}39$. Leur somme vaut $0{,}28 + 0{,}26 + 0{,}07 + 0{,}39 = 1$.

Ex. 40 ★★★ **Cinéma : trois séances, un tarif réduit**

(a) 0,7 est $P_M(R)$: cette proportion ne s'applique qu'aux spectateurs du matin, pas aux 1 000 spectateurs. Une case vaut $N\times$ la probabilité du chemin : $1\,000 \times 0{,}2 \times 0{,}7 = 140$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) $P(S) = 1 - 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}3$. Matin : 200 spectateurs, dont $200 \times 0{,}7 = 140$ au tarif réduit. Après-midi : 500, dont $500 \times 0{,}4 = 200$. Soir : 300, dont $300 \times 0{,}1 = 30$. Par différence :

	R	$\bar{\text{R}}$	Total
M	140	60	200
A	200	300	500
S	30	270	300
Total	370	630	1000

Vérification : $200 + 500 + 300 = 1\,000$ et $370 + 630 = 1\,000$.

(c) $P(R) = \frac{140+200+30}{1\,000} = 0{,}37$ (total de la colonne R). On cherche $P(S \cup R) = P(S) + P(R) - P(S \cap R) = 0{,}3 + 0{,}37 - 0{,}03 = 0{,}64$. On retire $S \cap R$ pour ne pas compter deux fois les 30 spectateurs du soir au tarif réduit.

(d) Faux. $P_R(M) = \frac{140}{370} = \frac{14}{37} \approx 0{,}378$ et $P_R(A) = \frac{200}{370} = \frac{20}{37} \approx 0{,}541$. Parmi les tarifs réduits, environ 38 % sont vendus le matin et 54 % l'après-midi. La plupart sont donc vendus l'après-midi, même si le taux de tarif réduit est plus fort le matin.

(e) $P(\overline{R}) = \frac{630}{1\,000} = 0{,}63$. Depuis le nœud $\overline{R}$, on divise par le total de la colonne $\overline{R}$: $P_{\overline{R}}(M) = \frac{60}{630} = \frac{2}{21} \approx 0{,}095$; $P_{\overline{R}}(A) = \frac{300}{630} = \frac{10}{21} \approx 0{,}476$; $P_{\overline{R}}(S) = \frac{270}{630} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$. Règle du nœud : $\frac{2}{21} + \frac{10}{21} + \frac{9}{21} = 1$.

6. *P(B sachant A) ou P(A sachant B) ? Tests et faux positifs*

Ex. 41 ★★☆ **Automatismes : filtre anti-spam, dans un sens puis dans l'autre**

(a) $P_S(B) = \frac{380}{400} = 0{,}95$: parmi les spams, 95 % sont bloqués.

(b) C'est $P_B(S) = \frac{380}{428} = \frac{95}{107} \approx 0{,}888$: on divise par le total de la colonne B, et non par celui de la ligne S.

(c) C'est $P_{\overline{S}}(B) = \frac{48}{1\,600} = 0{,}03$: 3 % des courriels légitimes sont bloqués à tort.

(d) $P_B(\overline{S}) = \frac{48}{428} = \frac{12}{107} \approx 0{,}112$: parmi les courriels bloqués, environ 11 % ne sont pas des spams.

(e) $P(S \cap B) = \frac{380}{2\,000} = 0{,}19$: ici, on divise par le total général.

Ex. 41 **(suite)**

(f) Faux. $P_S(B) = \frac{380}{400}$ et $P_B(S) = \frac{380}{428}$ ont le même numérateur 380. Mais on divise par 400 (les spams) dans un cas et par 428 (les courriels bloqués) dans l'autre : $0{,}95 \neq \frac{95}{107} \approx 0{,}888$.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : contrôle antidopage**

(a) $P_D(\overline{T}) = 1 - P_D(T) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$: 10 % des athlètes dopés ne sont pas détectés.

(b) La spécificité est $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0{,}94$. On en déduit $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$: 6 % des athlètes non dopés sont contrôlés positifs.

(c) $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0{,}02 \times 0{,}9 = 0{,}018$.

(d) $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$, donc $P(\overline{D} \cap T) = 0{,}98 \times 0{,}06 = 0{,}0588$.

(e) $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0{,}018 + 0{,}0588 = 0{,}0768$.

(f) $P(D \cup T) = P(D) + P(T) - P(D \cap T) = 0{,}02 + 0{,}0768 - 0{,}018 = 0{,}0788$.

Ex. 43 ★★☆ **Maladie rare : la question du patient**

(a) Malades : $10\,000 \times 0{,}01 = 100$, dont $100 \times 0{,}98 = 98$ positifs et 2 négatifs. Sains : 9 900, dont $9\,900 \times 0{,}05 = 495$ positifs et 9 405 négatifs.

	T	T̄	Total
M	98	2	100
M̄	495	9 405	9 900
Total	593	9 407	10 000

(b) Les faux positifs sont les sains testés positifs : 495. Comme $\frac{495}{98} \approx 5$, il y a environ 5 fois plus de faux positifs que de vrais positifs.

(c) $P_T(M) = \frac{\text{vrais positifs}}{\text{total des positifs}} = \frac{98}{593} \approx 0{,}17$: parmi les adultes positifs, environ 17 % sont malades.

(d) Ben confond $P_M(T) = 0{,}98$ (la sensibilité) et $P_T(M) \approx 0{,}17$. Comme la maladie est rare, les 495 faux positifs sont bien plus nombreux que les 98 vrais positifs.

(e) $P_{\overline{T}}(M) = \frac{2}{9\,407} \approx 0{,}0002$: parmi les adultes négatifs, à peu près 2 sur 10 000 sont malades. Un test négatif est donc très rassurant.

Ex. 44 ★★☆ **Contrôle qualité : les téléphones rejetés**

(a) Premier niveau : $P(D) = 0{,}04$ et $P(\overline{D}) = 0{,}96$. Depuis le nœud D : $P_D(R) = 0{,}95$ et $P_D(\overline{R}) = 0{,}05$. Depuis le nœud $\overline{D}$: $P_{\overline{D}}(R) = 0{,}02$ et $P_{\overline{D}}(\overline{R}) = 0{,}98$.

(b) Règle du chemin : $0{,}04 \times 0{,}95 = 0{,}038$; $0{,}04 \times 0{,}05 = 0{,}002$; $0{,}96 \times 0{,}02 = 0{,}0192$; $0{,}96 \times 0{,}98 = 0{,}9408$.

Chemin	D∩R	D∩R̄	D̄∩R	D̄∩R̄
Probabilité	0,038	0,002	0,0192	0,9408

La somme des chemins vaut bien 1.

(c) $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0{,}038 + 0{,}0192 = 0{,}0572$.

(d) $P_R(D) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}038}{0{,}0572} = \frac{95}{143} \approx 0{,}66$: parmi les téléphones rejetés, environ 66 % sont défectueux.

(e) Non. 0,95 est $P_D(R)$, la part des défectueux qui sont rejetés. La part des rejetés qui sont défectueux est $P_R(D) \approx 0{,}66$: environ 1 téléphone rejeté sur 3 est en réalité conforme.

Ex. 45 ★★☆ **Alarme de magasin : « fiable à 99 % » ?**

(a) $P_I(D) = \frac{38}{40} = 0{,}95$: lors des nuits avec intrusion, l'alarme se déclenche dans 95 % des cas.

(b) $P_{\overline{I}}(\overline{D}) = \frac{19\,760}{19\,960} \approx 0{,}990$. C'est la spécificité : lors des nuits sans intrusion, l'alarme reste muette dans 99 % des cas.

(c) Les 99 % correspondent à la spécificité, alors que la sensibilité n'est que de 95 %. De plus, aucune de ces deux probabilités n'est $P_D(I)$, la probabilité qu'une alarme qui sonne signale une vraie intrusion. Il faut donc préciser de quelle probabilité on parle.

(d) $P_D(I) = \frac{38}{238} = \frac{19}{119} \approx 0{,}16$: parmi les nuits où l'alarme sonne, environ 16 % seulement correspondent à une intrusion.

(e) Vrai. $P_D(\overline{I}) = \frac{200}{238} \approx 0{,}84$ et $0{,}84 > 0{,}8$: parmi les déclenchements, environ 84 % sont de fausses alertes, car les nuits sans intrusion sont très nombreuses.

Ex. 46 ★★★ **Le même test dans deux populations**

(a) La spécificité, c'est $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}97$.
Donc $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$. C'est la proportion de faux positifs parmi les personnes saines : 3 % des personnes saines ont un test positif.

Ex. 46 **(suite)**

(b) Malades : $100\,000 \times 0{,}005 = 500$, dont $500 \times 0{,}99 = 495$ positifs et 5 négatifs (faux négatifs). Sains : $100\,000 - 500 = 99\,500$, dont $99\,500 \times 0{,}03 = 2\,985$ positifs (faux positifs) et 96 515 négatifs.

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
M	495	5	500
$\bar{\text{M}}$	2985	96515	99500
Total	3480	96520	100000

(c) On cherche $P_T(M) = \frac{\text{Card}(M \cap T)}{\text{Card}(T)} = \frac{495}{3\,480} = \frac{33}{232} \approx 0{,}142$. Parmi les personnes positives, environ 14 % seulement ont le virus. Il y a 2 985 faux positifs pour 495 vrais positifs, soit environ 6 fois plus.

(d) Sur 10\,000 patients : $10\,000 \times 0{,}3 = 3\,000$ malades, dont $3\,000 \times 0{,}99 = 2\,970$ positifs ; $7\,000$ sains, dont $7\,000 \times 0{,}03 = 210$ faux positifs. Total des positifs : $2\,970 + 210 = 3\,180$. $P_T(M) = \frac{2\,970}{3\,180} = \frac{99}{106} \approx 0{,}934$. Parmi les patients positifs, environ 93 % ont le virus.

(e) La sensibilité et la spécificité ne changent pas. Pourtant $P_T(M) \approx 0{,}142$ dans la population générale et $P_T(M) \approx 0{,}934$ chez les patients avec des symptômes. Si la maladie est rare ($P(M) = 0{,}005$), il y a énormément de personnes saines : leurs 3 % de faux positifs sont plus nombreux que les vrais positifs. Si $P(M)$ est grande, les vrais positifs sont majoritaires. Le médecin a donc raison.

Ex. 47 ★★★ **Car scolaire : qui sont les usagers ?**

(a) Premier niveau, trois branches : $P(S) = 0{,}4$, $P(R) = 0{,}35$, $P(T) = 0{,}25$. Au nœud S : $P_S(C) = 0{,}6$ et $P_S(\overline{C}) = 0{,}4$. Au nœud R : $P_R(C) = 0{,}5$ et $P_R(\overline{C}) = 0{,}5$. Au nœud T : $P_T(C) = 0{,}3$ et $P_T(\overline{C}) = 0{,}7$. Règle du chemin : $P(S \cap C) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$; $P(R \cap C) = 0{,}35 \times 0{,}5 = 0{,}175$; $P(T \cap C) = 0{,}25 \times 0{,}3 = 0{,}075$.

(b) C s'obtient par trois chemins : $P(C) = 0{,}24 + 0{,}175 + 0{,}075 = 0{,}49$. Un élève sur deux environ prend le car.

(c) L'énoncé donne $P_S(C) = 0{,}6$: parmi les élèves de 2nde, 60 % prennent le car. Léa parle de $P_C(S)$: parmi les usagers du car, la proportion d'élèves de 2nde. $P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}24}{0{,}49} = \frac{24}{49} \approx 0{,}490$. C'est faux : environ 49 % des usagers sont en 2nde. Léa a inversé le conditionnement.

Ex. 47 **(suite)**

(d) $P(T \cap \overline{C}) = 0{,}25 \times 0{,}7 = 0{,}175$ et $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$. $P_{\overline{C}}(T) = \frac{0{,}175}{0{,}51} = \frac{35}{102} \approx 0{,}343$. Parmi les élèves qui ne prennent pas le car, environ 34 % sont en terminale.

(e) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ont le même numérateur, qui n'est pas nul. Deux fractions qui ont le même numérateur non nul ne sont égales que si leurs dénominateurs sont égaux, donc seulement si $P(A) = P(B)$. Ici $P(S) = 0{,}4$ et $P(C) = 0{,}49$: ces probabilités sont différentes, donc $P_S(C) \neq P_C(S)$.

Ex. 48 ★★★ **Deux scanners de bagages « fiables à 99 % »**

(a) Scanner A : $P_O(D) = 0{,}99$, c'est sa sensibilité (bagages avec objet interdit détectés). Scanner B : $P_{\overline{O}}(\overline{D}) = 0{,}99$, c'est sa spécificité (bagages sans objet interdit qui passent). « Fiable à 99 % » ne veut pas dire la même chose pour les deux scanners.

(b) Avec objet : $10\,000 \times 0{,}02 = 200$, dont $200 \times 0{,}99 = 198$ font sonner A et 2 ne le font pas. Sans objet : 9 800. A en laisse passer 90 %, donc $P_{\overline{O}}(D) = 0{,}1$: $9\,800 \times 0{,}1 = 980$ font sonner A à tort et 8 820 passent.

	D	$\bar{\text{D}}$	Total
O	198	2	200
$\bar{\text{O}}$	980	8820	9800
Total	1178	8822	10000

(c) Faux positifs (sans objet mais le scanner sonne) : $P_{\overline{O}}(D) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$, donc $9\,800 \times 0{,}01 = 98$. Faux négatifs (avec objet mais le scanner ne sonne pas) : $P_O(\overline{D}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, donc $200 \times 0{,}1 = 20$.

(d) On cherche $P_D(O) =$ vrais positifs ÷ total des positifs. Scanner A : $\frac{198}{1\,178} = \frac{99}{589} \approx 0{,}168$. Scanner B : il y a $200 \times 0{,}9 = 180$ vrais positifs et $180 + 98 = 278$ positifs, donc $\frac{180}{278} = \frac{90}{139} \approx 0{,}647$. Parmi les bagages qui font sonner A, environ 17 % contiennent un objet interdit ; pour B, environ 65 %.

(e) Sur 10\,000 bagages, A laisse passer 2 objets interdits et B en laisse passer 20. La priorité, c'est la sécurité : il faut choisir A. Le prix à payer : A sonne à tort 980 fois, contre 98 pour B, et seulement 17 % environ des bagages qui le font sonner contiennent un objet interdit. Il y aura donc beaucoup de fouilles inutiles.