1re tronc commun / Probabilités conditionnelles — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 2nde : probabilité, contraire, équiprobabilité*

Ex. 1 ★☆☆ Tirage d'un dossard

(a) Le dossard est tiré « au hasard » : les 20 numéros ont tous la même chance d'être tirés. On peut donc utiliser $P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$ avec $\text{Card}(\Omega) = 20$.

(b) $A = \{2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19\}$ (1 n'est pas premier), donc $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

(c) $B = \{4\,;8\,;12\,;16\,;20\}$, donc $P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

(d) C'est l'événement $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

(e) Un multiple de 4 est pair et supérieur ou égal à 4, donc il n'est pas premier. Ainsi $A \cap B = \varnothing$: A et B sont incompatibles, et $P(A \cap B) = 0$.

(f) $A \cup B$ compte $8 + 5 = 13$ numéros, puisqu'aucun numéro n'est commun aux deux événements.
Donc $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$.

(g) « Ni A ni B » est le contraire de $A \cup B$: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$. On peut vérifier avec la liste : $\{1\,;6\,;9\,;10\,;14\,;15\,;18\}$.

Ex. 2 ★☆☆ Automatismes : contraire, somme, comptage

(a) B : « l'élève vient en bus », $P(B) = 0{,}38$.
Donc $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$.

(b) C'est impossible : une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Le calcul contient forcément une erreur.

(c) L'urne contient $7 + 5 + 3 = 15$ boules, et le tirage se fait au hasard. Il y a $15 - 5 = 10$ boules qui ne sont pas vertes, donc $P = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

(d) La somme des probabilités des issues vaut 1, donc $P = 1 - 0{,}48 - 0{,}31 = 0{,}21$.

(e) Le chiffre est choisi au hasard : les 10 chiffres sont équiprobables. Les multiples de 3 sont 0, 3, 6 et 9 ($0 = 3 \times 0$: ne pas l'oublier).
Donc $P = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

(f) « Ni A ni B » s'écrit $\overline{A} \cap \overline{B}$: c'est le contraire de $A \cup B$.

Ex. 3 ★☆☆ Achats en pharmacie

(a) C'est $M \cap H$, et $P(M \cap H) = 12\,\% = 0{,}12$.

(b) $P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0{,}45 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}63$.

(c) On retire de M les clients qui achètent aussi un produit d'hygiène : $P = 0{,}45 - 0{,}12 = 0{,}33$.

(d) Médicament sans hygiène : 0,33 ; hygiène sans médicament : $0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18$. Ces deux cas sont incompatibles, donc $P = 0{,}33 + 0{,}18 = 0{,}51$ (ou $0{,}63 - 0{,}12$).

(e) « Aucun médicament », c'est $\overline{M}$:
$P(\overline{M}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$. Puis $0{,}55 \times 400 = 220$: environ 220 clients sur 400 n'achètent aucun médicament.

Ex. 4 ★★☆ Une carte dans un jeu de 32

(a) La carte est tirée au hasard, donc les 32 cartes sont équiprobables. Il y a 3 figures dans chacune des 4 couleurs, soit 12 figures : $P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \approx 0{,}38$. Parmi les cartes du jeu, 37,5 % sont des figures.

(b) $F \cap K$: « la carte est une figure de carreau », soit le valet, la dame et le roi de carreau.
$P(F \cap K) = \frac{3}{32} \approx 0{,}09$.

(c) $P(K) = \frac{8}{32}$ et $P(F \cup K) = \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32} \approx 0{,}53$.
Les 3 figures de carreau ne sont comptées qu'une fois.

(d) Les figures rouges sont les 3 figures de cœur et les 3 de carreau, soit 6 cartes. Par le contraire : $P = 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} \approx 0{,}81$. Parmi les 32 cartes, 26 ne sont pas des figures rouges.

Ex. 5 ★★☆ Deux dés au jeu de société

(a) Chaque dé a 6 résultats possibles, donc $\text{Card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$ couples. Les dés sont équilibrés, donc les 36 couples sont équiprobables.

(b) Les couples favorables sont $(3\,;6)$, $(4\,;5)$, $(5\,;4)$ et $(6\,;3)$.
Donc $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$.

(c) Sans 6, chaque dé a 5 résultats possibles : il y a $5 \times 5 = 25$ couples favorables.
Donc $P = \frac{25}{36} \approx 0{,}69$. Parmi les 36 couples, 25 ne contiennent aucun 6.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Non. « Au moins un 6 » est le contraire de « aucun 6 », donc $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}31$. Sam compte deux fois le couple $(6\,;6)$: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.

Ex. 6 ★★★ **La roue de la kermesse**

(a) Non. Les 4 couleurs ne sont pas équiprobables, car les secteurs n'ont pas le même angle. On ne peut donc pas utiliser $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ avec 4 issues. $P(\text{jaune}) = \frac{45}{360} = 0{,}125$, et pas 0,25.

(b) $P(\text{rouge}) = \frac{90}{360} = 0{,}25$; $P(\text{bleu}) = \frac{108}{360} = 0{,}3$; $P(\text{vert}) = \frac{117}{360} = 0{,}325$. On vérifie : $0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}325 + 0{,}125 = 1$.

(c) Soit V : « la flèche s'arrête sur le vert ». « Gagner un lot », c'est $\overline{V}$.
Donc $P(\overline{V}) = 1 - 0{,}325 = 0{,}675$. Il y a 67,5 % de chances de gagner un lot.

(d) La fréquence vaut $\frac{31}{200} = 0{,}155$. Elle est proche de 0,125 sans lui être égale. Une fréquence observée n'est pas une probabilité : elle varie d'une série de lancers à l'autre. Avec 200 lancers, un écart d'environ 0,03 ne prouve pas que la roue est truquée. Sur un très grand nombre de lancers, la fréquence se rapprocherait de 0,125.

Ex. 7 ★★★ **Abonnés de la médiathèque**

(a)

	D	$\bar{\text{D}}$	Total
R	70	60	130
$\bar{\text{R}}$	40	30	70
Total	110	90	200

On calcule $130 - 70 = 60$, $110 - 70 = 40$, $200 - 130 = 70$, $70 - 40 = 30$ et $200 - 110 = 90$.

(b) Une probabilité ne dépasse jamais 1, donc 1,2 est forcément faux. Hugo a compté deux fois les 70 abonnés qui ont emprunté les deux. $P(R \cup D) = P(R) + P(D) - P(R \cap D) = 0{,}65 + 0{,}55 - 0{,}35 = 0{,}85$.

(c) « Ni roman ni BD » s'écrit $\overline{R} \cap \overline{D}$. Avec le tableau, $P(\overline{R} \cap \overline{D}) = \frac{30}{200} = 0{,}15$. C'est aussi le contraire de $R \cup D$, donc $1 - 0{,}85 = 0{,}15$. Parmi les abonnés, 15 % n'ont emprunté ni roman ni BD.

(d) Faux. Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire ensemble. Or 70 abonnés ont emprunté des romans et des BD, donc $R \cap D \neq \varnothing$ et $P(R \cap D) = \frac{70}{200} = 0{,}35 \neq 0$. Le fait que certains abonnés n'empruntent que des romans ne change rien.

Ex. 7 **(suite)**

(e) L'événement contraire est $R \cap D$ (« il a emprunté les deux »), de probabilité 0,35.
Donc la probabilité cherchée vaut $1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
Parmi les abonnés, 65 % n'ont pas emprunté les deux types de livres.

2. *Probabilité conditionnelle et tableau croisé*

Ex. 8 ★☆☆ **Lire un tableau croisé**

(a) $P(F) = \frac{162}{360} = 0{,}45$: total de la ligne F divisé par l'effectif total.

(b) $P(F \cap C) = \frac{63}{360} = 0{,}175 \approx 0{,}18$: case commune divisée par l'effectif total, 360.

(c) La condition « sachant que c'est une fille » va en indice : $P_F(C) = \frac{63}{162} = \frac{7}{18} \approx 0{,}39$. On divise par le total de la ligne F, pas par 360.

(d) La condition est « fait de la compétition » : $P_C(F) = \frac{63}{144} = \frac{7}{16} = 0{,}4375 \approx 0{,}44$. On ne garde que la colonne C. C'est différent de $P_F(C)$.

(e) Pas de condition, c'est une intersection : $P(\overline{F} \cap \overline{C}) = \frac{117}{360} = 0{,}325 \approx 0{,}33$. On divise la case commune par l'effectif total.

(f) $P_{\overline{F}}(C) = \frac{81}{198} = \frac{9}{22} \approx 0{,}41$: parmi les garçons, environ 41 % font de la compétition.

Ex. 9 ★☆☆ **Traduire une phrase en notation**

(a) La condition est « ne circule pas le matin » : elle va en indice. $P_{\overline{M}}(R) = 0{,}1$.

(b) « Si un train est en retard » est la condition : $P_R(M) = 0{,}5$.

(c) Il n'y a pas de condition, c'est une intersection : « 34 % des trains circulent le matin et sont à l'heure ».

(d) L'indice M est la condition : « parmi les trains du matin, 85 % sont à l'heure ».

(e) Probabilités composées : $P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0{,}4 \times 0{,}15 = 0{,}06$.
Donc 6 % des trains circulent le matin et sont en retard.

Ex. 10 ★★☆ **Compléter un tableau à partir de pourcentages**

(a) J : $0{,}38 \times 1\,000 = 380$. $J \cap B$: $0{,}45 \times 380 = 171$ (45 % des 380 jeunes, pas des 1\,000 clients), donc $J \cap \overline{B}$: $380 - 171 = 209$. $\overline{J}$: $1\,000 - 380 = 620$, $\overline{J} \cap B$: $0{,}3 \times 620 = 186$, $\overline{J} \cap \overline{B}$: $620 - 186 = 434$.

	B	$\bar{\text{B}}$	Total
J	171	209	380
$\bar{\text{J}}$	186	434	620
Total	357	643	1000

(b) $P(J \cap B) = \frac{171}{1\,000} = 0{,}171 \approx 0{,}17$ et $P_J(B) = \frac{171}{380} = 0{,}45$. Le numérateur est le même. Mais $P(J \cap B)$ se divise par l'effectif total, alors que $P_J(B)$ se divise par l'effectif de J : parmi les moins de 35 ans, 45 % achètent bio.

(c) Non. La condition est « achète bio » : $P_B(J) = \frac{171}{357} \approx 0{,}48$. Le 45 % est $P_J(B)$, et $P_J(B) \neq P_B(J)$. Parmi les clients bio, environ 48 % ont moins de 35 ans.

(d) « Ni moins de 35 ans, ni bio » : $P(\overline{J} \cap \overline{B}) = \frac{434}{1\,000} = 0{,}434 \approx 0{,}43$.

Ex. 11 ★★☆ **Corriger l'erreur d'un élève**

(a) Léa a divisé par l'effectif total : $\frac{12}{500} = 0{,}024$, c'est $P(V \cap G)$. Pour $P_V(G)$, on divise par l'effectif de V : $P_V(G) = \frac{12}{240} = 0{,}05$. Parmi les vaccinés, 5 % ont eu la grippe.

(b) La condition « parmi les patients qui ont eu la grippe » va en indice : $P_G(V) = \frac{12}{64} = 0{,}1875 \approx 0{,}19$. On divise par le total de la colonne G. Parmi les patients grippés, environ 19 % sont vaccinés. Ce n'est pas $P_V(G) = 0{,}05$.

(c) $P_{\overline{V}}(G) = \frac{52}{260} = 0{,}2$. Parmi les non-vaccinés, 20 % ont eu la grippe, contre 5 % chez les vaccinés. C'est 4 fois plus.

(d) La condition reste V : $P_V(\overline{G}) = 1 - P_V(G) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Parmi les vaccinés, 95 % n'ont pas eu la grippe.

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux sur une plateforme de jeux**

(a) Vrai. $P(A) = 0{,}3$ et $P_A(L) = 0{,}8$, donc $P(A \cap L) = P(A) \times P_A(L) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

(b) Faux. La phrase parle de $P_L(A)$, alors que 0,8 est $P_A(L)$. $P_L(A) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}24}{0{,}52} = \frac{6}{13} \approx 0{,}46$. Parmi les joueurs en ligne, environ 46 % sont abonnés.

Ex. 12 (suite)

(c) Faux. $P_A(\overline{L}) = 1 - P_A(L) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Le nombre 0,7 est $P(\overline{A})$, une autre probabilité.

(d) Vrai. Les joueurs en ligne sont soit abonnés, soit non abonnés.
Donc $P(\overline{A} \cap L) = P(L) - P(A \cap L) = 0{,}52 - 0{,}24 = 0{,}28$.

Ex. 13 ★★★ **Téléphone le soir et fatigue**

(a) $\text{Card}(E) = 0{,}3 \times 400 = 120$. $\text{Card}(E \cap F) = 0{,}165 \times 400 = 66$: les 16,5 % portent sur tous les élèves. On a donc $\text{Card}(\overline{E}) = 400 - 120 = 280$ et $\text{Card}(\overline{E} \cap F) = 0{,}2 \times 280 = 56$: ces 20 % portent sur le sous-groupe $\overline{E}$, pas sur le total. Les autres cases se trouvent par différence.

	F	$\bar{\text{F}}$	Total
E	66	54	120
$\bar{\text{E}}$	56	224	280
Total	122	278	400

(b) La condition est E, donc on divise par l'effectif de la ligne E : $P_E(F) = \frac{66}{120} = 0{,}55$. Parmi les élèves qui utilisent leur téléphone après 23 h, 55 % se disent fatigués. Ensuite, $P_E(\overline{F}) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$: parmi ces élèves, 45 % ne se disent pas fatigués.

(c) $P(F) = \frac{122}{400} = 0{,}305$. On a $P_{\overline{E}}(F) = 0{,}2 < P(F) = 0{,}305 < P_E(F) = 0{,}55$. Parmi les utilisateurs tardifs, 55 % se disent fatigués, contre 30,5 % sur l'ensemble des élèves et 20 % chez les autres. L'usage du téléphone après 23 h va donc avec plus de fatigue.

(d) Vrai. La condition est « fatigué » : on divise par le total de la colonne F. $P_F(E) = \frac{66}{122} = \frac{33}{61} \approx 0{,}541 > 0{,}5$. Parmi les élèves fatigués, environ 54,1 % utilisent leur téléphone après 23 h. Attention, ce n'est pas $P_E(F) = 0{,}55$.

Ex. 14 ★★★ **Permis de conduire et conduite accompagnée**

(a) $\text{Card}(C) = 0{,}25 \times 400 = 100$, puis $\text{Card}(C \cap R) = 0{,}76 \times 100 = 76$ (on prend 76 % des 100 candidats de C). $\text{Card}(\overline{C}) = 300$ et $\text{Card}(\overline{C} \cap R) = 0{,}52 \times 300 = 156$. Les autres cases se trouvent par différence.

	R	$\bar{\text{R}}$	Total
C	76	24	100
$\bar{\text{C}}$	156	144	300
Total	232	168	400

Ex. 14 (suite)

(b) Non. $P(R) = \frac{232}{400} = 0{,}58$, donc le taux de réussite global est de 58 % et non de 64 %. La moyenne simple des deux taux ne convient pas, car les deux groupes n'ont pas le même effectif : 100 candidats d'un côté, 300 de l'autre. Le groupe le plus nombreux, qui a le taux le plus bas, pèse davantage.

(c) Sans condition, c'est une intersection : $P(C \cap \overline{R}) = \frac{24}{400} = 0{,}06$. « Parmi les candidats en conduite accompagnée » est une condition, qui va en indice : $P_C(\overline{R}) = \frac{24}{100} = 0{,}24$ (ou $1 - 0{,}76$). Donc 6 % des candidats ont suivi la conduite accompagnée et échoué. Parmi les candidats en conduite accompagnée, 24 % échouent.

(d) Ici, la condition est R : on cherche $P_R(C) = \frac{76}{232} = \frac{19}{58} \approx 0{,}328$. Parmi les candidats reçus, environ 32,8 % ont suivi la conduite accompagnée, contre 25 % ($P(C) = 0{,}25$) sur l'ensemble des candidats. Les candidats en conduite accompagnée sont donc plus représentés chez les reçus.

(e) $P_{\overline{R}}(\overline{C})$ est la probabilité qu'un candidat n'ait pas suivi la conduite accompagnée, sachant qu'il a échoué. Autrement dit, c'est la proportion de candidats sans conduite accompagnée parmi ceux qui ont échoué. $P_{\overline{R}}(\overline{C}) = \frac{144}{168} = \frac{6}{7} \approx 0{,}857$.

3. *Arbres pondérés et probabilités composées*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : lire un arbre au club de sport**

(a) La phrase donne une probabilité conditionnelle (« parmi les nageurs ») : $P_N(C) = 15\,\% = 0{,}15$.

(b) $P(\overline{N}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

(c) Les branches issues de N font 1 : $P_N(\overline{C}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

(d) On multiplie le long du chemin N puis C : $P(N \cap C) = P(N) \times P_N(C) = 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}0525$.

(e) $P(\overline{N} \cap C) = P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(C) = 0{,}65 \times 0{,}08 = 0{,}052$.

(f) Deux chemins mènent à C : $P(C) = 0{,}0525 + 0{,}052 = 0{,}1045$. Ainsi 10,45 % des adhérents font de la compétition.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : deux jetons, avec ou sans remise**

(a) Après un rouge, il reste 9 jetons dont 5 rouges : $P = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

(b) Avec remise, le sac est le même au second tirage : $P = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

(c) Après un rouge, il reste 9 jetons dont 4 noirs : $P = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$.

(d) Après un noir, il reste 9 jetons dont 3 noirs. La branche porte donc $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(e) « Couleurs différentes » = deux chemins : rouge puis noir, ou noir puis rouge. $P = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$.

(f) Avec remise, le sac est le même au second tirage : $P = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

Ex. 17 ★★☆ **Trois lignes de bus et des retards**

(a) Premier niveau (sur l'ensemble) : $P(L_1) = 0{,}45$, $P(L_2) = 0{,}35$, $P(L_3) = 1 - 0{,}45 - 0{,}35 = 0{,}2$. Second niveau (parmi les trajets de chaque ligne) : $P_{L_1}(R) = 0{,}1$, $P_{L_1}(\overline{R}) = 0{,}9$; $P_{L_2}(R) = 0{,}04$, $P_{L_2}(\overline{R}) = 0{,}96$; $P_{L_3}(R) = 0{,}15$, $P_{L_3}(\overline{R}) = 0{,}85$.

(b) $P(L_3 \cap R) = P(L_3) \times P_{L_3}(R) = 0{,}2 \times 0{,}15 = 0{,}03$.

(c) Trois chemins mènent à R : $P(R) = 0{,}45 \times 0{,}1 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}15 = 0{,}045 + 0{,}014 + 0{,}03 = 0{,}089$. Ainsi 8,9 % des trajets sont en retard.

(d) On inverse la condition : $P_R(L_1) = \frac{P(L_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}045}{0{,}089} \approx 0{,}51$. Parmi les trajets en retard, environ 51 % ont lieu sur la ligne 1.

Ex. 18 ★★☆ **Dépistage d'une allergie**

(a) Allergiques : $10\,000 \times 0{,}05 = 500$, dont $500 \times 0{,}9 = 450$ positifs. Non allergiques : 9 500, dont $9\,500 \times 0{,}08 = 760$ faux positifs (car $1 - 0{,}92 = 0{,}08$).

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
M	450	50	500
$\bar{\text{M}}$	760	8 740	9 500
Total	1 210	8 790	10 000

(b) $P(T) = \frac{1\,210}{10\,000} = 0{,}121$.

(c) Parmi les 1 210 tests positifs, 450 concernent des allergiques : $P_T(M) = \frac{450}{1\,210} \approx 0{,}37$.

Ex. 18 **(suite)**

(d) Non. 90 % est la sensibilité $P_M(T)$: c'est la proportion de tests positifs parmi les allergiques. Ce qui l'intéresse est $P_T(M) \approx 0{,}37$: parmi les personnes testées positives, moins de 4 sur 10 sont allergiques.

Ex. 19 ★★☆ **Retours d'achats : corrige les erreurs**

(a) Non. 0,20 est la probabilité portée par la branche : $P_L(R) = 0{,}2$. Le chemin donne $P(L \cap R) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$.

(b) Tom fait la moyenne simple des deux taux : il oublie que les ventes en magasin sont plus nombreuses. On additionne les chemins : $P(R) = 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}06 + 0{,}035 = 0{,}095$.

(c) $P_R(L) = \frac{P(L \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}06}{0{,}095} \approx 0{,}63$. Parmi les achats retournés, environ 63 % ont été faits en ligne.

(d) Vrai. $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}095 = 0{,}905$ et $P(\overline{L} \cap \overline{R}) = 0{,}7 \times 0{,}95 = 0{,}665$, donc $P_{\overline{R}}(\overline{L}) = \frac{0{,}665}{0{,}905} \approx 0{,}73$. Parmi les achats non retournés, environ 73 % ont été faits en magasin, soit plus de 70 %.

Ex. 20 ★★★ **Livraison de repas : du chemin à la branche**

(a) La phrase porte sur l'ensemble des commandes : c'est un « et », donc $P(S \cap R) = 0{,}14$. Ce n'est pas une branche. Comme $P(S \cap R) = P(S) \times P_S(R)$, on a $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{0{,}14}{0{,}7} = 0{,}2$. Parmi les commandes du soir, 20 % sont livrées en retard.

(b) Premier niveau (sur l'ensemble) : $P(S) = 0{,}7$ et $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Second niveau, après S : $P_S(R) = 0{,}2$ et $P_S(\overline{R}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Après $\overline{S}$: $P_{\overline{S}}(R) = 0{,}05$ et $P_{\overline{S}}(\overline{R}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. La somme des branches issues de chaque nœud vaut bien 1.

(c) Deux chemins mènent à R : $P(R) = P(S \cap R) + P(\overline{S} \cap R) = 0{,}14 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}14 + 0{,}015 = 0{,}155$. Ainsi 15,5 % des commandes sont livrées en retard.

(d) On multiplie le long de chaque chemin : $P(S \cap \overline{R}) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$; $P(\overline{S} \cap R) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$; $P(\overline{S} \cap \overline{R}) = 0{,}3 \times 0{,}95 = 0{,}285$.

Chemin	S∩R	S∩R̄	S̄∩R	S̄∩R̄
Probabilité	0,14	0,56	0,015	0,285

Somme : $0{,}14 + 0{,}56 + 0{,}015 + 0{,}285 = 1$. Les quatre chemins couvrent toutes les commandes.

Ex. 20 **(suite)**

(e) On cherche $P_R(\overline{S}) = \frac{P(\overline{S} \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}015}{0{,}155} = \frac{3}{31} \approx 0{,}097$. Parmi les commandes en retard, environ 9,7 % ont été passées le midi, alors que le midi représente 30 % des commandes. Le midi est peu concerné par les retards.

Ex. 21 ★★★ **Jeu de kermesse : avec ou sans remise ?**

(a) Premier niveau : $P(V_1) = \frac{4}{7}$ et $P(\overline{V_1}) = \frac{3}{7}$. Après une verte, il reste 6 boules, dont 3 vertes : $P_{V_1}(V_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P_{V_1}(\overline{V_2}) = \frac{1}{2}$. Après une jaune, il reste 6 boules, dont 4 vertes : $P_{\overline{V_1}}(V_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $P_{\overline{V_1}}(\overline{V_2}) = \frac{1}{3}$.

(b) « Même couleur » correspond à deux chemins : $P(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$ et $P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$. On les additionne : $P(G) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$.

(c) Avec remise, l'urne est la même au second tirage : $P(G) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{16}{49} + \frac{9}{49} = \frac{25}{49} \approx 0{,}510$. Avec remise, $\frac{25}{49} > \frac{1}{2}$. Sans remise, $\frac{3}{7} \approx 0{,}429 < \frac{1}{2}$. L'organisateur doit donc choisir le tirage sans remise.

(d) On cherche $P_G(V_1 \cap V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(G)} = \frac{2}{7} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$. Parmi les parties gagnées sans remise, deux sur trois se font avec deux boules vertes.

(e) Faux. Deux chemins mènent à V_2 : $P(V_2) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$. Or $P_{V_1}(V_2) = \frac{1}{2} \neq \frac{4}{7}$. Savoir que la 1re boule est verte modifie la probabilité que la 2e le soit, puisque l'urne a perdu une verte. Les événements V_1 et V_2 ne sont donc pas indépendants.

4. *Probabilités totales et tests de dépistage*

Ex. 22 ★☆☆ **Retards au lycée : un arbre à trois branches**

(a) Les branches issues de la racine ont pour somme 1 : $P(C) = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.

(b) La branche porte $P_V(\overline{R}) = 1 - P_V(R) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

(c) $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05$.

(d) $P(V \cap R) = P(V) \times P_V(R) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$.

(e) Trois chemins mènent à R : $P(R) = 0{,}05 + 0{,}015 + 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}05 + 0{,}015 + 0{,}04 = 0{,}105$.

(f) $\frac{0{,}35}{3} \approx 0{,}117$, alors que $P(R) = 0{,}105$. La moyenne simple donne le même poids aux trois modes de transport. Or ils ne concernent pas la même part des élèves : il faut pondérer chaque taux par $P(B)$, $P(V)$ ou $P(C)$.

(g) $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}105 = 0{,}895$.

Ex. 23 ★☆☆ **QCM : retours de commandes en ligne**

(a) $P_A(R)$: la condition « sachant que la commande vient d'un abonné » se place en indice.

(b) 0,056 : $P(\overline{A}) = 0{,}4$, donc $P(\overline{A} \cap R) = 0{,}4 \times 0{,}14 = 0{,}056$.

(c) 0,08 : $P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R) = 0{,}6 \times 0{,}04 + 0{,}056 = 0{,}024 + 0{,}056 = 0{,}08$. La réponse 0,09 est la moyenne simple des deux taux, qui est fausse. La réponse 0,18 est leur somme.

(d) 0,86 : $P_{\overline{A}}(\overline{R}) = 1 - P_{\overline{A}}(R) = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$. La valeur $0{,}344 = 0{,}4 \times 0{,}86$ est la probabilité d'un chemin, pas d'une branche.

(e) 0,3 : on cherche $P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}024}{0{,}08} = 0{,}3$. Parmi les commandes retournées, 30 % viennent d'abonnés. La valeur 0,04 est $P_A(R)$ et la valeur 0,6 est $P(A)$.

Ex. 24 ★★☆ **Un test de dépistage et ses faux positifs**

(a) Sensibilité : $P_M(T) = 0{,}92$. Spécificité : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}98$. Donc $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$.

(b) Il y a $10\,000 \times 0{,}01 = 100$ malades, dont $100 \times 0{,}92 = 92$ positifs, et $9\,900$ non malades, dont $9\,900 \times 0{,}02 = 198$ positifs.

	T	T̄	Total
M	92	8	100
M̄	198	9 702	9 900
Total	290	9 710	10 000

(c) Un faux positif est une personne non malade testée positive : il y en a 198. Par les chemins : $P(T) = 0{,}01 \times 0{,}92 + 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0092 + 0{,}0198 = 0{,}029$. Avec le tableau : $\frac{290}{10\,000} = 0{,}029$.

(d) On cherche $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{92}{290} \approx 0{,}32$. Parmi les personnes testées positives, environ 32 % sont malades.

(e) Non : 0,92 est $P_M(T)$, pas $P_T(M) \approx 0{,}32$. La maladie est rare : sur 10\,,000 personnes, les 198 faux positifs sont plus nombreux que les 92 malades testés positifs. Environ deux personnes positives sur trois ne sont donc pas malades.

Ex. 25 ★★☆ **Service au tennis : l'erreur d'Inès**

(a) $P(S \cap G) = 0{,}65 \times 0{,}7 = 0{,}455$ et $P(\overline{S} \cap G) = 0{,}35 \times 0{,}45 = 0{,}1575$.

Ex. 25 (suite)

(b) Deux chemins mènent à G : $P(G) = 0{,}455 + 0{,}1575 = 0{,}6125$. Deux chemins mènent à $\overline{G}$: $P(S \cap \overline{G}) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$ et $P(\overline{S} \cap \overline{G}) = 0{,}35 \times 0{,}55 = 0{,}1925$, donc $P(\overline{G}) = 0{,}195 + 0{,}1925 = 0{,}3875$. On vérifie : $1 - 0{,}6125 = 0{,}3875$.

(c) On cherche $P_G(S) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}455}{0{,}6125} \approx 0{,}743$. Parmi les points gagnés au service, environ 74,3 % l'ont été avec une première balle réussie.

(d) Inès obtient $\frac{0{,}5}{0{,}6} \approx 0{,}833$ au lieu de 0,743. Arrondir en cours de calcul fausse les valeurs intermédiaires, et la division amplifie l'erreur : on garde les valeurs exactes et on arrondit seulement le résultat final.

Ex. 26 ★★☆ **Deux bonbons tirés sans remise**

(a) Premier niveau : $P(M_1) = \frac{4}{10}$ et $P(\overline{M_1}) = \frac{6}{10}$. Second niveau (il reste 9 bonbons) : après M_1, $P_{M_1}(M_2) = \frac{3}{9}$ et $P_{M_1}(\overline{M_2}) = \frac{6}{9}$; après $\overline{M_1}$, $P_{\overline{M_1}}(M_2) = \frac{4}{9}$ et $P_{\overline{M_1}}(\overline{M_2}) = \frac{5}{9}$.

(b) $P(M_1 \cap M_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

(c) Deux chemins mènent à M_2 : $P(M_2) = \frac{12}{90} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{90} + \frac{24}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$.

(d) On cherche $P_{M_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{12}{90} \times \frac{90}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

(e) Faux. Avec remise : $P(M_2) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Le résultat est le même ; seules les probabilités des chemins changent.

Ex. 27 ★★★ **Contrôle antidopage : que vaut un résultat positif ?**

(a) Premier niveau : $P(D) = 0{,}005$ et $P(\overline{D}) = 0{,}995$. Second niveau : la sensibilité donne $P_D(T) = 0{,}96$, donc $P_D(\overline{T}) = 0{,}04$; la spécificité donne $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0{,}94$, donc $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$. Deux chemins mènent à T : $P(D \cap T) = 0{,}005 \times 0{,}96 = 0{,}0048$ et $P(\overline{D} \cap T) = 0{,}995 \times 0{,}06 = 0{,}0597$. On les additionne : $P(T) = 0{,}0048 + 0{,}0597 = 0{,}0645$.

(b) On cherche $P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0048}{0{,}0645} \approx 0{,}074$. Parmi les coureurs contrôlés positifs, environ 7,4 % seulement sont dopés.

Ex. 27 **(suite)**

(c) 50 coureurs sont dopés : $50 \times 0{,}96 = 48$ ont un contrôle positif et 2 un contrôle négatif. 9 950 ne sont pas dopés : $9\,950 \times 0{,}06 = 597$ ont un contrôle positif (ce sont les faux positifs) et 9 353 un contrôle négatif.

	T	$\bar{T}$	Total
D	48	2	50
$\bar{D}$	597	9353	9950
Total	645	9355	10000

On retrouve $P_T(D) = \frac{48}{645} \approx 0{,}074$. Parmi les contrôles positifs, la proportion de faux positifs vaut $\frac{597}{645} \approx 0{,}926$, soit environ 92,6 %.

(d) $P(T) = 0{,}2 \times 0{,}96 + 0{,}8 \times 0{,}06 = 0{,}192 + 0{,}048 = 0{,}24$, donc $P_T(D) = \frac{0{,}192}{0{,}24} = 0{,}8$. Dans ce groupe, 80 % des coureurs contrôlés positifs sont dopés. Dans toute la course, le dopage est rare : les 6 % d'erreurs portent sur un très grand nombre de coureurs non dopés, et ces faux positifs sont bien plus nombreux que les vrais positifs. Quand le dopage est fréquent, un contrôle positif est beaucoup plus fiable.

Ex. 28 ★★★ **Satisfaction dans les transports : l'hypothèse de Léo**

(a) Premier niveau : $P(T) = 0{,}75$ et $P(B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Second niveau : $P_T(S) = 0{,}88$ et $P_T(\overline{S}) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$; $P_B(S) = 0{,}64$ et $P_B(\overline{S}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$. Chaque nœud a bien une somme égale à 1.

(b) Deux chemins mènent à S : $P(T \cap S) = 0{,}75 \times 0{,}88 = 0{,}66$ et $P(B \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}64 = 0{,}16$, donc $P(S) = 0{,}66 + 0{,}16 = 0{,}82$. C'est faux. Avec autant d'usagers dans chaque mode, $P(T) = P(B) = 0{,}5$ et la part de satisfaits serait $0{,}5 \times 0{,}88 + 0{,}5 \times 0{,}64 = 0{,}44 + 0{,}32 = 0{,}76$, soit 76 % au lieu de 82 %. Chaque taux est pondéré par la part des usagers du mode de transport : ici, le tram, plus apprécié, pèse trois fois plus que le bus. On ne retrouve la moyenne simple des deux taux que si les deux groupes ont le même effectif.

(c) $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$ et $P(B \cap \overline{S}) = 0{,}25 \times 0{,}36 = 0{,}09$. On cherche $P_{\overline{S}}(B) = \frac{0{,}09}{0{,}18} = 0{,}5$. Parmi les usagers non satisfaits, la moitié voyage en bus.

(d) $P(T) \times P(S) = 0{,}75 \times 0{,}82 = 0{,}615$, alors que $P(T \cap S) = 0{,}66$. Ces deux nombres sont différents, donc T et S ne sont pas indépendants. Autre façon de le voir : $P_T(S) = 0{,}88$ n'est pas égal à $P(S) = 0{,}82$, donc voyager en tram modifie la probabilité d'être satisfait.

5. *Événements indépendants*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : calculer avec l'indépendance**

(a) A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}35 \times 0{,}4 = 0{,}14$.

(b) Puisque A et B sont indépendants, savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B : $P_A(B) = P(B) = 0{,}4$.
(Vérification : $\frac{0{,}14}{0{,}35} = 0{,}4$.)

(c) A et B sont indépendants, donc A et $\overline{B}$ le sont aussi : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B}) = 0{,}35 \times 0{,}6 = 0{,}21$.

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}35 + 0{,}4 - 0{,}14 = 0{,}61$.

(e) L'événement cherché est $\overline{A} \cap \overline{B}$. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, donc $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}65 \times 0{,}6 = 0{,}39$. On retrouve bien $1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}61 = 0{,}39$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : indépendants ou non ?**

(a) $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15 = P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.

(b) $P_A(B) = 0{,}4$ alors que $P(B) = 0{,}3$: savoir A change la probabilité de B. Par le calcul, $P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$ et $P(A) \times P(B) = 0{,}15$: A et B ne sont pas indépendants.

(c) Comme A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}45 = 0{,}09$. Les deux valeurs sont différentes : A et B ne sont pas indépendants.

(d) $A = \{2\,;4\,;6\}$, $B = \{1\,;2\,;3\,;4\}$ et $A \cap B = \{2\,;4\}$. On a $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$. Les deux sont égales : A et B sont indépendants.

(e) $P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, donc $P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42 = P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.

Ex. 31 ★☆☆ **Vrai ou faux sur l'indépendance**

(a) Faux. Si A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12 \neq 0$: A et B peuvent se produire ensemble, donc ils ne sont pas incompatibles. Indépendants et incompatibles sont deux notions différentes.

(b) Faux. $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$, donc $P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}12 = 0{,}68$. On ne peut pas simplement additionner les deux probabilités, car A et B ne sont pas incompatibles.

Ex. 31 **(suite)**

(c) Vrai. A et B sont indépendants, donc $\overline{A}$ et B le sont aussi : savoir que A n'est pas réalisé ne change pas la probabilité de B, et $P_{\overline{A}}(B) = P(B) = 0{,}6$. Vérification : $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 - 0{,}12 = 0{,}48$ et $\frac{0{,}48}{0{,}8} = 0{,}6$.

(d) Faux. Les tirages se font sans remise, donc ils ne sont pas indépendants : on ne peut pas multiplier 0,6 par 0,6. Après une rouge, il reste 2 rouges sur 4 boules, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = 0{,}5$. Ainsi $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 0{,}3$.

(e) Vrai. Les trois lancers sont indépendants et, à chaque lancer, $P(\text{Face}) = 0{,}5$. On peut donc multiplier : $0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$.

Ex. 32 ★★☆ **Usagers d'une gare : tableau et indépendance**

(a) $240 - 180 = 60$; $300 - 180 = 120$; $400 - 240 = 160$; $400 - 300 = 100$.

	B	$\bar{B}$	Total
A	180	60	240
$\bar{A}$	120	40	160
Total	300	100	400

(b) $P_A(B) = \frac{180}{240} = 0{,}75$: parmi les usagers qui voyagent pour leur travail, 75 % ont un abonnement. $P_{\overline{A}}(B) = \frac{120}{160} = 0{,}75$: parmi les autres usagers, la proportion est aussi de 75 %.

(c) $P(B) = \frac{300}{400} = 0{,}75$. Comme $P_A(B) = P(B)$, savoir que l'usager voyage pour son travail ne change pas la probabilité qu'il soit abonné : A et B sont indépendants. On retrouve la même proportion dans chaque ligne du tableau.

(d) Non, il compare avec la mauvaise valeur. Il faut comparer $P(A \cap \overline{B})$ avec $P(A) \times P(\overline{B})$. On a $P(A \cap \overline{B}) = \frac{60}{400} = 0{,}15$ et $P(A) \times P(\overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$: A et $\overline{B}$ sont indépendants, ce qui est logique puisque A et B le sont.

Ex. 33 ★★☆ **Deux lampes pour une randonnée**

(a) L'énoncé dit que les lampes fonctionnent indépendamment, donc on peut multiplier : $P(F \cap T) = 0{,}9 \times 0{,}85 = 0{,}765$.

(b) F et T sont indépendants, donc $\overline{F}$ et $\overline{T}$ aussi : $P(\overline{F} \cap \overline{T}) = 0{,}1 \times 0{,}15 = 0{,}015$.

(c) « Au moins une lampe fonctionne » est le contraire de « aucune ne fonctionne » : $1 - 0{,}015 = 0{,}985$. (Vérification : $P(F \cup T) = 0{,}9 + 0{,}85 - 0{,}765 = 0{,}985$.)

Ex. 33 **(suite)**

(d) Non. Le contraire de « les deux fonctionnent » est « au plus une fonctionne », ce qui inclut le cas où aucune ne fonctionne : $1 - 0{,}765 = 0{,}235$. Pour « exactement une », on additionne deux chemins : $P(F \cap \overline{T}) + P(\overline{F} \cap T) = 0{,}9 \times 0{,}15 + 0{,}1 \times 0{,}85 = 0{,}135 + 0{,}085 = 0{,}22$.

Ex. 34 ★★★ **Bons de réduction : quatre passages en caisse**

(a) Les 4 passages sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès S avec $p = 0{,}15$. Donc $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. « Aucun bon » correspond à un seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $0{,}85^4 = 0{,}522\,006\,25 \approx 0{,}522$. Ben ne reçoit aucun bon dans environ 52,2 % des cas.

(b) Léa additionne les probabilités des 4 passages. Or les événements « bon au 1er passage », « bon au 2e passage »… ne sont pas incompatibles : Ben peut recevoir plusieurs bons. Si la probabilité d'un bon était 0,3, son calcul donnerait d'ailleurs $4 \times 0{,}3 = 1{,}2 > 1$, ce qui est impossible. « Au moins un bon » est le contraire de « aucun bon » : $1 - 0{,}85^4 = 0{,}477\,993\,75 \approx 0{,}478$. Ben reçoit au moins un bon dans environ 47,8 % des cas.

(c) Chemins à deux bons : $SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}SS$, soit 6 chemins. Chacun a pour probabilité $0{,}15^2 \times 0{,}85^2 = 0{,}016\,256\,25$.
Donc $6 \times 0{,}016\,256\,25 = 0{,}097\,537\,5 \approx 0{,}098$.

(d) Il y a 4 chemins à un seul bon ($S\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{S}S\overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}S$), chacun de probabilité $0{,}15 \times 0{,}85^3 = 0{,}092\,118\,75$.
Donc $4 \times 0{,}092\,118\,75 = 0{,}368\,475 \approx 0{,}368$.

(e) « Au moins deux bons » est le contraire de « aucun ou exactement un bon ».
Donc $1 - 0{,}522\,006\,25 - 0{,}368\,475 = 0{,}109\,518\,75 \approx 0{,}110$. Ben reçoit au moins deux bons dans environ 11 % des cas.

Ex. 35 ★★★ **Deux feux sur le trajet du lycée**

(a) Il a tort : il confond « indépendants » et « incompatibles ». On calcule $P(V_1) \times P(V_2) = 0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}27$, et on a bien $P(V_1 \cap V_2) = 0{,}27$. Les deux nombres sont égaux, donc V_1 et V_2 sont indépendants. Ils ne sont pas incompatibles, car $P(V_1 \cap V_2) \neq 0$.

(b) $P_{V_1}(V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_1)} = \frac{0{,}27}{0{,}6} = 0{,}45$, qui est égal à $P(V_2)$. Savoir que le premier feu est vert ne change pas la probabilité que le second le soit : parmi les trajets où le premier feu est vert, 45 % ont aussi le second feu vert, comme sur l'ensemble des trajets.

Ex. 35 **(suite)**

(c) « Au moins un feu vert » correspond à $V_1 \cup V_2$. $P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2) = 0{,}6 + 0{,}45 - 0{,}27 = 0{,}78$. Au moins un feu est vert dans 78 % des trajets.

(d) V_1 est la réunion des événements incompatibles $V_1 \cap V_2$ et $V_1 \cap \overline{V_2}$, donc $P(V_1 \cap \overline{V_2}) = 0{,}6 - 0{,}27 = 0{,}33$. Et $P(V_1) \times P(\overline{V_2}) = 0{,}6 \times (1 - 0{,}45) = 0{,}6 \times 0{,}55 = 0{,}33$. C'est la même valeur : V_1 et $\overline{V_2}$ sont aussi indépendants.

(e) « Aucun feu vert » est le contraire de « au moins un feu vert » : $P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$. Sur 180 trajets : $0{,}22 \times 180 = 39{,}6$, soit environ 40 trajets par an où aucun des deux feux n'est vert.

6. *Épreuves de Bernoulli répétées ($n \leqslant 4$)*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : deux services au tennis**

(a) S : « la mise en jeu est réussie ». $p = 0{,}65$ et $1 - p = 0{,}35$.

(b) Pour 2 épreuves : $2^2 = 4$ chemins. Pour 4 épreuves : $2^4 = 16$ chemins.

(c) $P(\overline{S}S) = 0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}227\,5$.

(d) $P(SS) = 0{,}65^2 = 0{,}422\,5$.

(e) Deux chemins mènent à un succès : $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$. Chacun a pour probabilité $0{,}65 \times 0{,}35 = 0{,}227\,5$, donc $2 \times 0{,}227\,5 = 0{,}455$.

(f) $P(\overline{S}\,\overline{S}) = 0{,}35^2 = 0{,}122\,5$. Contrôle : $0{,}122\,5 + 0{,}455 + 0{,}422\,5 = 1$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : le bus du matin**

(a) Aucun retard : $0{,}85^4 = 0{,}522\,006\,25 \approx 0{,}522$.

(b) « Au moins un retard » est le contraire de « aucun retard » : $1 - 0{,}85^4 = 0{,}477\,993\,75 \approx 0{,}478$.

(c) Non : $4 \times 0{,}3 = 1{,}2 > 1$, ce n'est pas une probabilité. La bonne valeur est $1 - 0{,}7^4 = 1 - 0{,}240\,1 = 0{,}759\,9 \approx 0{,}760$.

(d) Un seul chemin : $0{,}15^4 = 0{,}000\,506\,25 \approx 0{,}001$. C'est très rare.

(e) C'est le chemin « retard, puis trois matins à l'heure » : $0{,}15 \times 0{,}85^3 = 0{,}092\,118\,75 \approx 0{,}092$.

(f) Le retard peut tomber l'un des 4 matins, donc 4 chemins de même probabilité : $4 \times 0{,}15 \times 0{,}85^3 = 0{,}368\,475 \approx 0{,}368$.

Ex. 38 ★★☆ **Le stand de la fête foraine**

(a) La boule est remise : l'urne est la même à chaque tirage, et un tirage n'influence pas les suivants. S : « la boule est rouge », $p = \frac{2}{8} = 0{,}25$, et l'échec a pour probabilité 0,75.

(b) L'arbre a 3 niveaux, donc $2^3 = 8$ chemins. Ceux qui comportent une seule boule rouge sont $S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}S$.

(c) Une rouge : 3 chemins, d'où $3 \times 0{,}25 \times 0{,}75^2 = 0{,}421\,875$. Deux rouges : 3 chemins ($SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $\overline{S}SS$), d'où $3 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75 = 0{,}140\,625$.

(d) « Au plus une » veut dire 0 ou 1 boule rouge : $0{,}75^3 + 0{,}421\,875 = 0{,}421\,875 + 0{,}421\,875 = 0{,}843\,75$.

(e) Directement : $0{,}140\,625 + 0{,}25^3 = 0{,}140\,625 + 0{,}015\,625 = 0{,}156\,25$. Par le contraire : $1 - 0{,}843\,75 = 0{,}156\,25$. Les deux résultats sont égaux, ce qui confirme que la somme des probabilités de 0 à 3 succès vaut 1. Sur un grand nombre de parties, environ 16 % des joueurs gagnent un lot.

Ex. 39 ★★☆ **Un QCM rempli au hasard**

(a) S : « la réponse à la question est juste », $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Chaque question a 5 propositions et Noé choisit au hasard à chaque fois, sans tenir compte du reste : les épreuves sont donc identiques et indépendantes.

(b) Un seul chemin, $SSSS$: $0{,}2^4 = 0{,}001\,6$.

(c) Il y a 6 chemins : $SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}SS$. Chacun a pour probabilité $0{,}2^2 \times 0{,}8^2 = 0{,}025\,6$, donc $6 \times 0{,}025\,6 = 0{,}153\,6$.

(d) 3 sur 4 : 4 chemins, d'où $4 \times 0{,}2^3 \times 0{,}8 = 0{,}025\,6$. Avec 4 sur 4 : $0{,}025\,6 + 0{,}001\,6 = 0{,}027\,2$. Parmi les élèves qui répondraient au hasard, moins de 3 % auraient au moins 3 sur 4.

(e) Vrai. $P(0 \text{ succès}) = 0{,}8^4 = 0{,}409\,6$. Un succès correspond à 4 chemins : $4 \times 0{,}2 \times 0{,}8^3 = 0{,}409\,6$. Les deux probabilités sont égales.

Ex. 40 ★★☆ **Lancers francs : repère les erreurs**

(a) Faux. Chaque niveau double le nombre de chemins : $2^3 = 8$ chemins.

(b) Faux. 0,081 est la probabilité d'un seul chemin. Trois chemins comportent 2 succès ($SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $\overline{S}SS$), donc la probabilité est $3 \times 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}243$.

Ex. 40 **(suite)**

(c) Vrai. « Rater au moins un lancer » est le contraire de « réussir les 3 » : $1 - 0{,}9^3 = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$. Sur un grand nombre de séries de 3 lancers, Inès en rate au moins un dans environ 27 % des séries.

(d) Faux. Sacha a oublié des chemins : un succès correspond à 3 chemins. On trouve $0{,}1^3 + 3 \times 0{,}9 \times 0{,}1^2 = 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028$, et non 0,01.

Ex. 41 ★★★ **Cartes à collectionner : combien de pochettes ?**

(a) Non. Les 3 pochettes sont 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec $p = 0{,}16$ et $1 - p = 0{,}84$. Le contraire de « au moins une carte rare » est « aucune carte rare », c'est-à-dire le seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $0{,}84^3 = 0{,}592\,704$.
Donc $P(\text{au moins une}) = 1 - 0{,}592\,704 = 0{,}407\,296 \approx 0{,}407$, soit environ 40,7 % et non 48 %. Le calcul $n \times p$ n'est pas une probabilité : il compte plusieurs fois les chemins qui ont plusieurs cartes rares.

(b) Il y a 3 chemins à un seul succès : $S\,\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}\,S\,\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}\,S$. Chacun a pour probabilité $0{,}16 \times 0{,}84^2 = 0{,}112\,896$.
Donc $P(\text{exactement une}) = 3 \times 0{,}112\,896 = 0{,}338\,688 \approx 0{,}339$.

(c) Exactement 2 cartes rares : 3 chemins ($S\,S\,\overline{S}$, $S\,\overline{S}\,S$ et $\overline{S}\,S\,S$), chacun de probabilité $0{,}16^2 \times 0{,}84 = 0{,}021\,504$, d'où $3 \times 0{,}021\,504 = 0{,}064\,512 \approx 0{,}065$. Exactement 3 cartes rares : un seul chemin, $0{,}16^3 = 0{,}004\,096 \approx 0{,}004$. Contrôle avec les valeurs exactes : $0{,}592\,704 + 0{,}338\,688 + 0{,}064\,512 + 0{,}004\,096 = 1$.

(d) « Au moins une, mais pas trois » veut dire 1 ou 2 cartes rares : $0{,}338\,688 + 0{,}064\,512 = 0{,}403\,2$. Autre méthode : $0{,}407\,296 - 0{,}004\,096 = 0{,}403\,2 \approx 0{,}403$. Parmi les acheteurs de 3 pochettes, environ 40 % obtiennent une ou deux cartes rares.

(e) Avec n pochettes, $P(\text{au moins une}) = 1 - 0{,}84^n$. Pour $n = 1$: 0,16. Pour $n = 2$: $1 - 0{,}705\,6 = 0{,}294\,4$. Pour $n = 3$: 0,407 296. Ces trois valeurs sont inférieures à 0,5. Pour $n = 4$: $1 - 0{,}497\,871\,36 = 0{,}502\,128\,64 \approx 0{,}502 > 0{,}5$. Maël doit donc acheter 4 pochettes, et le seuil est franchi de justesse.

Ex. 42 ★★★ **Le dé et les quatre manches**

(a) $A = \{2\,;4\,;6\}$ et $B = \{1\,;2\,;3\,;4\}$. Les issues sont équiprobables, donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
On a $A \cap B = \{2\,;4\}$, d'où $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, les événements A et B sont indépendants.

(b) Faux. $B \cap C$ est vide, donc $P(B \cap C) = 0$. Mais $P(B) \times P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{9} \neq 0$.
Donc B et C ne sont pas indépendants. D'ailleurs, si B est réalisé, C devient impossible : savoir B change complètement la probabilité de C.

(c) Comme A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi. Donc $p = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Contrôle : $A \cap \overline{B} = \{6\}$, donc $p = \frac{1}{6}$.

(d) L'arbre a 4 niveaux, donc $2^4 = 16$ chemins. Avec S : « la manche est gagnée », il y a 6 chemins à 2 succès : $SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}\,\overline{S}SS$. Chacun a pour probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{1296}$.
Donc $P(\text{exactement 2}) = 6 \times \frac{25}{1296} = \frac{150}{1296} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$.

(e) « Aucune manche gagnée » correspond au seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.
Donc $P(\text{au moins une}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$. C'est un peu plus que 0,5 : oui, on a un peu plus d'une chance sur deux de gagner un lot. Sur un grand nombre de parties de 4 manches, environ 52 % rapportent un lot.