49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 2nde : probabilité conditionnelle et tableau croisé*

À retenir : La condition (« sachant », « parmi », « chez les ») va en indice : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Dans un tableau, divise par le total de A. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$, mais $P_A(B) \neq P_B(A)$ et $P_{\overline{A}}(B) \neq 1 - P_A(B)$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : traduire une phrase en notation** — Dans une gare, on choisit un voyageur au hasard. On note A : « le voyageur est abonné » et R : « son train est en retard ».

(a) Traduis en notation : « 30 % des abonnés ont un train en retard ».

(b) Laquelle des notations $P_A(R)$, $P_R(A)$ ou $P(A \cap R)$ traduit « 12 % des voyageurs sont abonnés et ont un train en retard » ? Justifie.

(c) Traduis par une phrase l'égalité $P_R(A) = 0{,}5$.

(d) Traduis en notation : « chez les non-abonnés, 80 % ont un train à l'heure ».

(e) Déduis du premier item la probabilité qu'un abonné ait un train à l'heure.

(f) Jade écrit : « $P_{\overline{A}}(R) = 1 - P_A(R)$ ». Corrige son erreur et calcule $P_{\overline{A}}(R)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau croisé** — Un club d'athlétisme compte 320 licenciés. On choisit un licencié au hasard. F : « c'est une fille », G : « c'est un garçon », C : « il fait de la compétition ». Arrondis à 10^{-3} si besoin.

	C	$\bar{C}$	Total
F	72	108	180
G	98	42	140
Total	170	150	320

(a) Calcule la probabilité que le licencié soit une fille qui fait de la compétition.

(b) Parmi les filles, calcule la proportion de licenciées qui font de la compétition.

(c) Parmi les licenciés qui font de la compétition, calcule la proportion de filles.

(d) Calcule $P_G(\overline{C})$.

(e) Tom écrit : « $P_{\overline{C}}(G) = \frac{42}{320}$ ». Corrige son erreur.

(f) Sachant que le licencié fait de la compétition, calcule la probabilité que ce soit un garçon.

Ex. 3 ★★☆ **Sondage sur les podcasts : compléter un tableau croisé** — On interroge 1\,000 personnes. 45 % ont moins de 35 ans (événement J). Parmi les moins de 35 ans, 60 % écoutent des podcasts (événement E). Parmi les 35 ans et plus, 30 % en écoutent. On choisit une personne au hasard. Arrondis à 10^{-3}.

	E	$\bar{E}$	Total
J	?	?	?
J	?	?	?
Total	?	?	1 000

(a) Complète le tableau croisé d'effectifs.

(b) Calcule $P_E(J)$, puis compare-la à $P_J(E)$.

(c) Calcule $P(\overline{J} \cap \overline{E})$ et traduis ce nombre par une phrase.

(d) Inès affirme : « 60 % et 30 % font 45 % en moyenne, donc 45 % des personnes écoutent des podcasts ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **Vélos défectueux : définition et probabilités composées** — Dans une usine, 35 % des vélos produits sont électriques (événement E). On note D l'événement « le vélo est défectueux ». 2,8 % des vélos sont électriques et défectueux. Chez les vélos non électriques, 4 % sont défectueux. On choisit un vélo au hasard.

(a) Calcule la probabilité qu'un vélo électrique soit défectueux.

(b) Sur 2\,000 vélos produits, combien de vélos électriques non défectueux peut-on prévoir ?

(c) Noé affirme : « $P(\overline{E} \cap D) = 0{,}04$ ». Explique son erreur, puis calcule $P(\overline{E} \cap D)$.

(d) Déduis-en la proportion de vélos défectueux dans la production.

Ex. 5 ★★★ **Urgences : vrai ou faux sur un tableau croisé** — Aux urgences d'un hôpital, on relève pour 600 patients s'ils sont arrivés en ambulance (événement A) et s'ils ont été hospitalisés (événement H). On choisit un patient au hasard. Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

	H	$\bar{H}$	Total
A	90	30	120
$\bar{A}$	72	408	480
Total	162	438	600

(a) « 15 % des patients arrivés en ambulance sont hospitalisés. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 5 (suite)

(b) « Les trois quarts des patients hospitalisés sont arrivés en ambulance. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) « Un quart des patients arrivés en ambulance ne sont pas hospitalisés. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) « La probabilité qu'un patient qui n'est pas arrivé en ambulance soit hospitalisé vaut 0,25. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) « L'hospitalisation est 5 fois plus probable pour un patient arrivé en ambulance que pour un autre patient. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Auto-école : tableau à compléter et erreurs à corriger** — Une auto-école suit 500 candidats au permis. 40 % d'entre eux ont fait la conduite accompagnée (événement C). Parmi eux, 80 % sont reçus du premier coup (événement R). Chez les autres candidats, 55 % sont reçus du premier coup. On choisit un candidat au hasard. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Écris en notation les trois pourcentages de l'énoncé.

(b) Complète le tableau croisé d'effectifs.

	R	$\bar{R}$	Total
C	?	?	?
$\bar{C}$	?	?	?
Total	?	?	500

(c) Maël affirme : « La probabilité qu'un candidat ait fait la conduite accompagnée et soit reçu du premier coup est 0,8. » A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(d) Yasmine affirme : « 80 % des candidats reçus du premier coup ont fait la conduite accompagnée. » A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

(e) Un candidat a échoué au premier essai. Est-il plus probable qu'il ait fait la conduite accompagnée ou non ? Justifie par deux probabilités conditionnelles.

Ex. 7 ★★★ **Jeu en ligne : un effectif inconnu** — Une plateforme de jeux en ligne compte 800 joueurs, dont 300 abonnés premium (événement A). Parmi les abonnés premium, 120 jouent surtout sur mobile (événement M). On note x le nombre de joueurs non premium qui jouent surtout sur mobile, avec $0 \leqslant x \leqslant 500$. On choisit un joueur au hasard.

(a) Exprime $P_{\overline{A}}(M)$ puis $P_M(A)$ en fonction de x.

(b) Pour quelles valeurs de x un joueur non premium a-t-il une probabilité de jouer sur mobile au moins égale à celle d'un joueur premium ?

(c) On apprend que, parmi les joueurs sur mobile, 20 % sont premium. Traduis cette phrase en notation, puis détermine x.

(d) Avec cette valeur de x, calcule $P(M)$, puis la probabilité qu'un joueur qui ne joue pas surtout sur mobile soit premium. Interprète ce résultat.

2. *Arbres pondérés et probabilités composées*

À retenir : Premier niveau : probabilités sur toute la population ; second niveau : « parmi les … », soit $P_A(B)$. Un chemin donne $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Les branches d'un nœud ont une somme de 1. Un événement : on additionne ses chemins.

Ex. 8 ★☆☆ **Compléter et lire un arbre** — On choisit au hasard un voyageur d'un train régional. R : « son train arrive en retard » ; C : « il manque sa correspondance ». L'arbre est donné en texte : $P(R) = 0{,}15$; $P_R(C) = 0{,}6$; $P_{\overline{R}}(C) = 0{,}04$.

(a) Calcule $P(\overline{R})$.

(b) Calcule $P_R(\overline{C})$.

(c) Calcule $P_{\overline{R}}(\overline{C})$.

(d) Malik affirme que $P(R \cap C) = 0{,}6$, car c'est la valeur portée par la branche. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Calcule $P(\overline{R} \cap C)$.

(f) Calcule $P(\overline{R} \cap \overline{C})$.

(g) Calcule $P(C)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Traduire l'énoncé en notation** — On choisit au hasard un élève d'un lycée. I : « l'élève est interne » ; T : « l'élève fait partie du club théâtre ». Pour chaque phrase, écris la probabilité correspondante et sa valeur.

(a) Traduis : « 40 % des élèves du lycée sont internes. »

(b) Traduis : « Parmi les internes, 25 % font partie du club théâtre. »

(c) Traduis : « 12 % des élèves du lycée sont externes et font partie du club théâtre. »

(d) Traduis : « Chez les externes, 80 % ne font pas partie du club théâtre. »

(e) Calcule la probabilité que l'élève soit interne et fasse partie du club théâtre.

(f) Calcule $P(I \cap \overline{T})$.

Ex. 10 ★★☆ **Deux billes tirées sans remise** — Un sac contient 9 billes : 4 rouges et 5 vertes. Hugo tire une bille, la garde, puis en tire une seconde. R_1 : « la première bille est rouge » ; R_2 : « la seconde bille est rouge ». On note $V_1 = \overline{R_1}$ et $V_2 = \overline{R_2}$. Donne les valeurs exactes, puis arrondies à 10^{-3} si besoin.

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré : donne la probabilité de chaque branche.

(b) Calcule la probabilité que les deux billes soient rouges.

(c) Calcule la probabilité que les deux billes soient de la même couleur.

Ex. 10 **(suite)**

(d) Calcule la probabilité d'obtenir au moins une bille rouge.

Ex. 11 ★★☆ **Trois machines, de l'arbre au tableau** — Une usine fabrique des pièces sur trois machines. M_1 produit 50 % des pièces, M_2 en produit 30 % et M_3 produit le reste. Parmi les pièces de M_1, 2 % sont défectueuses. C'est 3 % pour M_2 et 5 % pour M_3. On choisit une pièce au hasard. D : « la pièce est défectueuse ».

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré : donne la probabilité de chaque branche.

(b) Complète ce tableau pour une production fictive de 1 000 pièces :

	D	$\overline{D}$	Total
M_1	?	?	500
M_2	?	?	?
M_3	?	?	?
Total	?	?	1000

(c) Calcule $P(M_2 \cap \overline{D})$ à l'aide d'un chemin, puis retrouve ce résultat dans le tableau.

(d) Lucas affirme que $P(D)$ est la moyenne des trois taux de défaut. A-t-il raison ? Justifie et donne $P(D)$.

Ex. 12 ★★★ **Le jeu des jetons à la kermesse** — À la kermesse, une boîte contient 10 jetons : 3 bleus et 7 jaunes. Zoé tire un jeton, le garde, puis en tire un second. B_1 : « le premier jeton est bleu » ; B_2 : « le second jeton est bleu ». Zoé gagne si ses deux jetons sont de la même couleur. Donne chaque résultat en fraction irréductible, puis arrondi à 10^{-3} si besoin.

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré à deux niveaux : donne la probabilité de chaque branche.

(b) Calcule la probabilité que Zoé gagne.

(c) Tom affirme : « $P(B_2) = \frac{2}{9}$, car il reste un jeton bleu de moins. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

(d) Ben propose à Zoé de jouer avec remise : elle remet le premier jeton dans la boîte avant de tirer le second. A-t-elle intérêt à accepter ? Justifie.

(e) On revient au jeu sans remise, mais Zoé tire maintenant trois jetons, l'un après l'autre. Calcule la probabilité que les trois jetons soient de la même couleur.

Ex. 13 ★★★ **Sondage sur la lecture : arbre et tableau** — Dans une ville, 25 % des habitants ont moins de 30 ans (J), 45 % ont de 30 à 59 ans (M), les autres ont 60 ans ou plus (S). L : « l'habitant lit au moins un livre par mois ». C'est le cas de 48 % des moins de 30 ans, de 40 % des 30 à 59 ans et de 55 % des 60 ans ou plus. On interroge un habitant au hasard. Arrondis à 10^{-3}.

(a) Traduis chaque donnée en notation. Précise si elle porte une branche du premier ou du second niveau de l'arbre, puis calcule $P(S)$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Lina affirme : « Les lecteurs de 60 ans ou plus sont plus nombreux que ceux de 30 à 59 ans, car 55 % > 40 %. » A-t-elle raison ? Justifie par des produits de chemins.

(c) Calcule $P(L)$ en nommant la partition et la formule utilisées.

(d) Pour une population fictive de 1 000 habitants, recopie et complète le tableau :

	L	$\overline{L}$	Total
J	?	?	?
M	?	?	?
S	?	?	?
Total	?	?	1000

(e) Parmi les habitants qui lisent au moins un livre par mois, quelle est la proportion de personnes de 60 ans ou plus ?

Ex. 14 ★★★ **Premier et second service au tennis** — Au tennis, Inès a droit à deux services. Le premier est bon dans 60 % des cas ; elle gagne alors le point dans 75 % des cas. Sinon, le second est bon dans 90 % des cas et elle gagne alors le point une fois sur deux ; s'il est faute (double faute), elle perd le point. S_1 : « premier service bon » ; S_2 : « second service bon » ; G : « Inès gagne le point ».

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré : décris ses niveaux et donne la probabilité de chaque branche.

(b) Calcule la probabilité qu'Inès fasse une double faute.

(c) Calcule la probabilité qu'Inès gagne le point.

(d) Son entraîneur lui propose un second service plus risqué : il est bon dans 70 % des cas, et Inès gagne alors le point dans 70 % des cas. Doit-elle suivre ce conseil ? Justifie.

(e) Elle garde son second service habituel, bon dans 90 % des cas. Soit x la probabilité de gagner le point quand ce service est bon. Quelle valeur minimale de x donne $P(G) \geqslant 0{,}65$?

3. *Probabilités totales, retrouver une probabilité inconnue*

À retenir : Si A et $\overline{A}$ forment une partition : $P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\overline{A})\,P_{\overline{A}}(B)$, une somme de chemins. Ex. : $0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}22$. Pas de moyenne simple des taux : $P(B)$ est compris entre les taux.

Ex. 15 ★★☆ **Le bus du matin** — Sur une ligne de bus, il pleut 35 % des jours (R). Un jour de pluie, le bus est en retard (L) avec la probabilité 0,4 ; sinon, avec la probabilité 0,1. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Justifie que R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers.

(b) Calcule $P(\overline{R})$.

Ex. 15 **(suite)**

(c) Calcule $P(R \cap L)$.

(d) Calcule $P(\overline{R} \cap L)$.

(e) Déduis-en $P(L)$.

(f) Noé écrit : « $P(L) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$, j'additionne les branches qui mènent à L. » Corrige son erreur.

(g) Calcule $P(R \cap \overline{L})$.

Ex. 16 ★☆☆ **Sondage musique et podcasts** — On interroge au hasard un élève d'un lycée. A : « il a un abonnement de musique en ligne » ; B : « il écoute des podcasts ». Arrondis à 10^{-3} si besoin.

	B	B̄	Total
A	0,18	?	0,45
Ā	?	?	?
Total	0,30	?	1

(a) Recopie et complète le tableau de probabilités.

(b) Calcule $P_A(B)$.

(c) Calcule $P_{\overline{A}}(B)$.

(d) Calcule $P_B(A)$.

(e) Retrouve $P(B)$ avec la formule des probabilités totales, à partir de $P_A(B)$ et de $P_{\overline{A}}(B)$ (garde la valeur exacte de $P_{\overline{A}}(B)$).

Ex. 17 ★★☆ **Trois fournisseurs de freins** — Un fabricant de vélos achète ses freins à trois fournisseurs : F_1 (48 % des freins), F_2 (32 %) et F_3 (20 %). Les taux de freins défectueux (D) sont de 1 %, 3 % et 6 %. On prend un frein au hasard. Arrondis à 10^{-3}.

(a) Justifie que F_1, F_2, F_3 forment une partition de l'univers, puis écris la formule donnant $P(D)$ avec les noms des événements.

(b) Calcule $P(D)$.

(c) Hugo calcule $\frac{1+3+6}{3} \approx 3{,}33\,\%$. Explique son erreur.

(d) Le frein est défectueux. Calcule la probabilité qu'il vienne de F_3.

Ex. 18 ★★☆ **Tournoi du club de handball** — Dans un club de handball, une proportion x des licenciés sont des jeunes (J), avec $0 \leqslant x \leqslant 1$. 70 % des jeunes participent au tournoi (T), contre 30 % des adultes. On choisit un licencié au hasard.

(a) Justifie que J et $\overline{J}$ forment une partition, puis exprime $P(T)$ en fonction de x.

(b) Cette saison, $P(T) = 0{,}46$. Détermine x.

Ex. 18 **(suite)**

(c) Avec la valeur de x trouvée, recopie et complète le tableau des chemins de l'arbre pondéré, puis vérifie que leur somme vaut 1.

Chemin	$J \cap T$	$J \cap \overline{T}$	$\overline{J} \cap T$	$\overline{J} \cap \overline{T}$
Probabilité	?	?	?	?

Ex. 19 ★★★ **Livraison de repas : un taux inconnu** — Une plateforme de livraison confie ses commandes à trois restaurants : R_1 (40 % des commandes), R_2 (35 %) et R_3 (25 %). Une commande est erronée (E) dans 3 % des cas pour R_1, dans 5 % des cas pour R_2 et avec une proportion inconnue t pour R_3. On choisit une commande au hasard. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Justifie que R_1, R_2, R_3 forment une partition de l'univers, puis exprime $P(E)$ en fonction de t.

(b) Sur un mois, 4,7 % des commandes sont erronées : on admet que $P(E) = 0{,}047$. Détermine t.

(c) Léa affirme : « Parmi les commandes de R_1 ou de R_2, il y a $\frac{3+5}{2} = 4\,\%$ d'erreurs. » A-t-elle raison ? Justifie en calculant $P_{R_1 \cup R_2}(E)$.

(d) Une commande est erronée. Calcule la probabilité qu'elle vienne du restaurant R_3.

Ex. 20 ★★★ **Grippe et vaccination : la branche manquante** — Dans une ville, 60 % des habitants sont vaccinés contre la grippe (V). Parmi les vaccinés, 5 % attrapent la grippe cet hiver (G). Dans toute la ville, 13 % des habitants l'attrapent. On choisit un habitant au hasard.

(a) Traduis les trois données par des probabilités, puis calcule $P(V \cap G)$.

(b) Tom écrit : « $P(\overline{V} \cap G) = 0{,}13 - 0{,}05 = 0{,}08$ ». Explique son erreur, puis calcule $P(\overline{V} \cap G)$ en justifiant la partition utilisée.

(c) Déduis-en la probabilité qu'un habitant non vacciné attrape la grippe.

(d) Recopie et complète le tableau de probabilités :

	G	$\overline{G}$	Total
V	?	?	?
$\overline{V}$	?	?	?
Total	?	?	1

(e) Vérifie que $P(G)$ est compris entre $P_V(G)$ et $P_{\overline{V}}(G)$, puis explique pourquoi c'était prévisible.

Ex. 21 ★★★ **Achats dans un jeu : une proportion inconnue** — Sur une application de jeu, une proportion x des joueurs joue sur téléphone (M), avec $0 \leqslant x \leqslant 1$; les autres jouent sur ordinateur. 12 % des joueurs sur téléphone font un achat dans le jeu (A), contre 20 % des joueurs sur ordinateur. On choisit un joueur au hasard.

(a) Justifie que M et $\overline{M}$ forment une partition, puis montre que $P(A) = 0{,}2 - 0{,}08\,x$.

Ex. 21 (suite)

(b) Inès affirme : « Les taux sont 12 % et 20 %, donc $P(A) = 16\,\%$. » A-t-elle raison ? Justifie en résolvant $P(A) = 0{,}16$.

(c) L'éditeur souhaite que $P(A) \geqslant 0{,}17$. Détermine les valeurs de x qui conviennent.

(d) Peut-on avoir $P(A) = 0{,}22$? Justifie de deux façons : par le calcul, puis sans calcul.

(e) On suppose $x = 0{,}3$. Un joueur a fait un achat. Calcule la probabilité qu'il joue sur téléphone, arrondie à 10^{-3}.

4. *Inverser le conditionnement : faux positifs*

À retenir : Pour $P_T(M)$, fais trois étapes : le chemin $P(M \cap T)$, puis $P(T)$ par les probabilités totales, puis le quotient. Une spécificité de 98 % donne $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}02$. Un faux positif, c'est $\overline{M} \cap T$. « Parmi les positifs » : $P_T(M) \neq P_M(T)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Dépistage d'une carence : trois étapes** — Une carence en fer touche 2 % des adolescents d'une ville. Un test sanguin a une sensibilité de 97 % et une spécificité de 99 %. On choisit un adolescent au hasard. On note M « il a la carence » et T « son test est positif ». Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Traduis « la spécificité est de 99 % » en notation, puis donne $P_{\overline{M}}(T)$.

(b) Calcule $P(M \cap T)$.

(c) Calcule la probabilité d'un faux positif.

(d) Calcule $P(T)$.

(e) Calcule la probabilité qu'un adolescent testé positif ait la carence.

(f) Calcule la probabilité d'un faux négatif.

Ex. 23 ★☆☆ **Contrôle qualité : pièce rejetée** — Une usine fabrique des capteurs, dont 3 % sont défectueux. Une machine de contrôle rejette 96 % des capteurs défectueux et 5 % des capteurs conformes. On étudie un lot fictif de 10\,000 capteurs. Arrondis à 10^{-3}.

	Rejeté	Accepté	Total
Défectueux	?	?	?
Conforme	?	?	?
Total	?	?	10\,000

(a) Calcule le nombre de capteurs défectueux du lot.

(b) Calcule le nombre de capteurs défectueux rejetés.

(c) Calcule le nombre de capteurs conformes rejetés.

(d) Complète le tableau.

(e) On prend au hasard un capteur rejeté. Calcule la probabilité qu'il soit défectueux.

Ex. 23 (suite)

(f) On prend au hasard un capteur accepté. Calcule la probabilité qu'il soit conforme.

Ex. 24 ★★☆ **Contrôle antidopage : parmi les positifs** — Lors d'une compétition, 0,4 % des athlètes sont dopés. Le test antidopage a une sensibilité de 98 % et une spécificité de 97 %. On contrôle un athlète au hasard. On note D « il est dopé » et T « son test est positif ». Arrondis à 10^{-3} sauf mention contraire.

(a) Construis sur ta copie l'arbre pondéré de la situation.

(b) Calcule $P(T)$ en valeur exacte.

(c) Lucas affirme : « Un athlète contrôlé positif est dopé avec une probabilité de 0,98. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

(d) Calcule la probabilité qu'un athlète contrôlé négatif ne soit pas dopé, arrondie à 10^{-4}.

(e) Calcule le quotient $\frac{P(\overline{D} \cap T)}{P(D \cap T)}$ et explique pourquoi un résultat positif est toujours recontrôlé.

Ex. 25 ★★☆ **Scanner à bagages : arrondir à la fin** — À l'aéroport, 5 % des bagages contiennent un objet interdit. Le scanner signale 96 % de ces bagages et 2 % des autres. On note O « le bagage contient un objet interdit » et S « le bagage est signalé ». Arrondis à 10^{-3}.

	Signalé	Non signalé	Total
Objet interdit	?	?	?
Sans objet	?	?	?
Total	?	?	10\,000

(a) Traduis les trois données de l'énoncé en notation.

(b) Calcule $P(S)$ en valeur exacte.

(c) Inès arrondit $P(S)$ à 0,07 puis calcule $P_S(O) \approx 0{,}686$. Calcule la bonne valeur et explique son erreur.

(d) Complète le tableau pour 10\,000 bagages et vérifie ton résultat.

(e) Parmi les bagages non signalés, calcule la proportion de bagages qui contiennent un objet interdit.

Ex. 26 ★★★ **Autotest : quand la prévalence change** — Un autotest détecte une infection virale. Sa sensibilité est de 99 % et sa spécificité de 97 %. La proportion p de personnes infectées varie selon la période. On choisit une personne au hasard. On note M « elle est infectée » et T « son autotest est positif ». Arrondis les résultats finaux à 10^{-3}, sauf indication contraire.

(a) Traduis les données en notation, puis montre que $P(T) = 0{,}96p + 0{,}03$.

(b) Hors épidémie, $p = 0{,}005$. Calcule $P_T(M)$ sans arrondir les étapes, puis interprète ce résultat.

(c) Détermine les valeurs de p pour lesquelles $P_T(M) \geqslant 0{,}5$.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Pendant une épidémie, on observe $P(T) = 0{,}126$. Détermine p, puis calcule $P_T(M)$ et compare avec la question 2.

Ex. 27 ★★★ **Filtre anti-spam : trois sources de messages** — Parmi les messages que reçoit Kenza, 60 % viennent de ses contacts (C), 30 % sont des lettres d'information (L) et 10 % viennent d'inconnus (I). Les spams (S) représentent respectivement 1 %, 4 % et 30 % de ces messages. Le filtre classe en « indésirables » (F) 98 % des spams et 1 % des autres messages. Arrondis les résultats finaux à 10^{-3}.

(a) Mathis affirme : « $P(S) = \frac{0{,}01+0{,}04+0{,}30}{3} \approx 0{,}117$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $P(S)$.

(b) Un message reçu est un spam. Calcule la probabilité qu'il vienne d'un inconnu. Pourquoi n'est-ce pas 0,30 ?

(c) Un faux positif est un message qui n'est pas un spam mais qui est classé indésirable. Calcule $P(\overline{S} \cap F)$, puis $P(F)$.

(d) Kenza ouvre son dossier « indésirables ». Calcule $P_F(S)$, puis la proportion de faux positifs dans ce dossier.

Ex. 28 ★★★ **Dépistage en élevage : du tableau aux épreuves répétées** — Dans un grand élevage, 4 % des bovins sont porteurs d'une maladie. Un test a une sensibilité de 95 % et une spécificité de 96 %. On choisit un bovin au hasard. On note M « il est porteur » et T « son test est positif ». Arrondis les résultats finaux à 10^{-3}.

(a) Complète le tableau d'effectifs pour un troupeau fictif de 10 000 bovins :

	T	$\bar{T}$	Total
M	?	?	?
$\bar{M}$	?	?	?
Total	?	?	10\,000

(b) Compare le nombre de vrais positifs et celui de faux positifs. Léa affirme : « le test est fiable à 95 %, donc 95 % des bovins positifs sont porteurs ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Calcule $P_T(M)$ à partir des probabilités, en trois étapes : chemin, probabilités totales, quotient.

(d) On prend 3 bovins testés positifs. On assimile ce choix à 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « porteur » et de paramètre $P_T(M)$. Calcule la probabilité qu'au moins un des trois ne soit pas porteur.

(e) En comptant les chemins de l'arbre, calcule la probabilité qu'exactement un des 3 bovins soit porteur.

5. *Événements indépendants et événements contraires*

À retenir : A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B le sont aussi. Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$. Toujours $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ex. $0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : indépendants ou pas ?** — Dans chaque cas, A et B sont deux événements d'un même univers Ω. Tu donnes les valeurs exactes.

(a) $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifie.

(b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifie.

(c) $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}35$, et A et B sont incompatibles. Sont-ils indépendants ? Justifie.

(d) $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}45$ et $P_A(B) = 0{,}45$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Calcule ensuite $P(A \cap B)$.

(e) A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}65$. Calcule $P(A \cup B)$.

(f) $P(A) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}28$. Quelle valeur doit avoir $P(B)$ pour que A et B soient indépendants ?

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : un club d'athlétisme** — Un club d'athlétisme compte 250 adhérents : 150 ont moins de 18 ans, 90 font de la compétition et 54 sont dans les deux cas. On choisit un adhérent au hasard. J = « il a moins de 18 ans », C = « il fait de la compétition ».

	C	$\bar{C}$	Total
J	54	?	150
$\bar{J}$	?	?	?
Total	90	?	250

(a) Complète le tableau croisé d'effectifs.

(b) Calcule $P(J)$, $P(C)$ et $P(J \cap C)$.

(c) Les événements J et C sont-ils indépendants ? Justifie.

(d) Traduis par une phrase l'événement $\overline{J} \cap \overline{C}$, puis calcule sa probabilité.

(e) Calcule $P(J \cup C)$.

(f) Calcule $P_{\overline{J}}(C)$. Que remarques-tu ?

Ex. 31 ★★☆ **Train puis bus : les événements contraires** — Lina prend le train puis le bus. T = « le train est à l'heure », B = « le bus est à l'heure ». On suppose que T et B sont indépendants, avec $P(T) = 0{,}9$ et $P(B) = 0{,}8$.

(a) Démontre que T et $\overline{B}$ sont indépendants, en partant de la partition $\{B\,;\overline{B}\}$ de Ω.

(b) Calcule la probabilité que le train soit à l'heure et que le bus soit en retard.

Ex. 31 **(suite)**

(c) Calcule la probabilité que ni le train ni le bus ne soient à l'heure.

(d) Lina dit : « La probabilité qu'au moins l'un des deux soit à l'heure vaut $0{,}9 + 0{,}8$. » Corrige son erreur et donne la bonne valeur.

Ex. 32 ★★☆ **La roue de loterie** — Une roue de loterie équilibrée a 12 secteurs numérotés de 1 à 12. Max la fait tourner une fois. A = « multiple de 3 », B = « nombre pair », D = « au moins 10 », E = « obtenir 1, 5 ou 7 ».

(a) Écris A, B et $A \cap B$ sous forme d'ensembles, puis étudie l'indépendance de A et B.

(b) Les événements B et D sont-ils indépendants ? Justifie, puis calcule $P_D(B)$ et interprète.

(c) Max dit : « A et E n'ont aucune issue commune, donc ils sont indépendants. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Calcule $P(B \cup D)$.

Ex. 33 ★★★ **Deux défauts sur une trottinette** — Une usine fabrique des trottinettes électriques. Une trottinette peut avoir un défaut de freinage (F) et un défaut d'éclairage (E). On choisit une trottinette au hasard : $P(F) = 0{,}05$, et la probabilité qu'elle ait au moins un des deux défauts vaut 0,088. On note $x = P(E)$.

(a) Écris l'événement « au moins un des deux défauts » avec F et E, puis l'événement « aucun des deux défauts » avec $\overline{F}$ et $\overline{E}$. Calcule la probabilité de ce second événement.

(b) Dans cette question seulement, on suppose que F et E sont incompatibles. Calcule x.

(c) On suppose désormais que F et E sont indépendants. Exprime $P(F \cup E)$ en fonction de x, puis calcule x.

(d) Avec la valeur de x trouvée à la question précédente, calcule $P(\overline{F}) \times P(\overline{E})$ et compare ce nombre au résultat de la première question. Qu'est-ce que tu retrouves ?

(e) Léo affirme : « Ici, F et E pourraient être à la fois incompatibles et indépendants. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Grippe et vaccination** — Une enquête sur $1\,200$ habitants d'une ville relève qui s'est fait vacciner contre la grippe (V) et qui a eu la grippe dans l'hiver (G). On choisit un habitant au hasard. Tu donnes les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Complète le tableau croisé d'effectifs.

	G	$\bar{\text{G}}$	Total
V	24	?	480
$\bar{\text{V}}$	?	588	?
Total	156	?	1200

(b) Calcule $P(V)$, $P(G)$ et $P(V \cap G)$. Les événements V et G sont-ils indépendants ? Justifie.

Ex. 34 **(suite)**

(c) Calcule $P_V(G)$ et $P_{\overline{V}}(G)$, puis interprète ces deux nombres par une phrase.

(d) Sami écrit : « La probabilité qu'un habitant ne soit ni vacciné ni malade vaut $\frac{3}{5} \times \frac{87}{100}$. » Repère son erreur et donne la bonne valeur.

(e) On garde 480 vaccinés, dont 24 ont eu la grippe, et 720 non-vaccinés. Combien de non-vaccinés auraient dû avoir la grippe pour que V et G soient indépendants ?

Ex. 35 ★★★ **Démonstration puis jeu de 32 cartes** — On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Le jeu a 4 couleurs (cœur, carreau, trèfle, pique) de 8 cartes chacune : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. On note C = « cœur », R = « roi » et F = « figure (valet, dame ou roi) ».

(a) Soient A et B deux événements indépendants. En partant de $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$, démontre que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(b) Calcule $P(C)$, $P(R)$ et $P(C \cap R)$, puis démontre que C et R sont indépendants.

(c) Déduis-en, sans compter de cartes, la probabilité de tirer une carte qui n'est ni un cœur ni un roi. Vérifie ensuite en comptant les cartes.

(d) Calcule $P_F(R)$ et compare-la à $P(R)$. Les événements R et F sont-ils indépendants ? Justifie.

(e) On retire du jeu le 7 de pique et on tire une carte parmi les 31 restantes. Les événements C et R sont-ils encore indépendants ? Justifie avec des fractions.

6. *Épreuves indépendantes, épreuves de Bernoulli répétées ($n \leqslant 4$)*

À retenir : Épreuve de Bernoulli : tu nommes le succès S, de probabilité p ; l'échec a pour probabilité $1 - p$. Un chemin à k succès sur n vaut $p^k(1-p)^{n-k}$. Exactement k succès : nombre de chemins $\times$ ce produit (par exemple, 2 succès sur 3 : 3 chemins).

Ex. 36 ★☆☆ **Lancers francs d'Inès** — Au basket, Inès réussit un lancer franc avec la probabilité 0,7. Elle tire 3 lancers francs, et les lancers sont supposés indépendants.

(a) Nomme le succès. Donne p et la probabilité de l'échec.

(b) Combien de chemins compte l'arbre des 3 lancers ?

(c) Calcule la probabilité du chemin $SS\overline{S}$.

(d) Calcule la probabilité de rater les trois lancers.

(e) Écris tous les chemins qui comportent exactement deux succès.

(f) Calcule la probabilité qu'Inès réussisse exactement deux lancers.

(g) Calcule la probabilité qu'Inès réussisse exactement un lancer.

Ex. 36 **(suite)**

(h) Calcule la probabilité de trois succès. Vérifie ensuite que les probabilités de 0, 1, 2 et 3 succès ont pour somme 1.

Ex. 37 ★☆☆ **Bus puis tram** — Chaque matin, Lucas prend un bus puis un tram. Les deux sont exploités par des réseaux sans aucun lien. On note B : « le bus est en retard », avec $P(B) = 0{,}15$, et T : « le tram est en retard », avec $P(T) = 0{,}1$.

(a) Justifie que les deux épreuves sont indépendantes. Dans l'arbre, que vaut $P_B(T)$? Et $P_{\overline{B}}(T)$?

(b) Complète le tableau à double entrée des probabilités :

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
B	?	?	0,15
$\bar{\text{B}}$	?	?	0,85
Total	0,1	0,9	1

(c) Calcule la probabilité qu'un et un seul des deux transports soit en retard.

(d) Calcule la probabilité qu'au moins un des deux transports soit en retard.

(e) Vérifie que la somme des quatre cases centrales du tableau vaut 1.

(f) Chloé affirme : « C'est une épreuve de Bernoulli répétée deux fois. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Contrôle de capteurs** — Une usine fabrique des capteurs, et 5 % d'entre eux sont défectueux. On prélève 4 capteurs au hasard dans un stock très important : on assimile ce prélèvement à des tirages avec remise. Arrondis tes résultats à 10^{-4}.

(a) Justifie qu'il s'agit de la répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Nomme le succès et donne p.

(b) Calcule la probabilité qu'aucun des 4 capteurs ne soit défectueux.

(c) Calcule la probabilité qu'exactement un capteur soit défectueux.

(d) Pour « exactement deux défectueux », Hugo trouve $0{,}05^2 \times 0{,}95^2 \approx 0{,}0023$. A-t-il raison ? Justifie, puis corrige.

(e) Calcule la probabilité qu'au plus deux capteurs soient défectueux.

Ex. 39 ★★☆ **Le stand de Nora** — À un stand de fête foraine, Nora gagne une partie avec la probabilité p, et les parties sont indépendantes. Quand elle joue deux parties, la probabilité qu'elle n'en gagne aucune vaut 0,64.

(a) Nomme le succès. Exprime en fonction de p la probabilité de ne gagner aucune des deux parties.

(b) Malik écrit : « $p^2 = 0{,}64$, donc $p = 0{,}8$. » A-t-il raison ? Justifie, puis détermine p.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Calcule la probabilité que Nora gagne une et une seule des deux parties.

(d) Nora veut que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,5. Combien de parties doit-elle jouer au minimum ? Procède par essais.

Ex. 40 ★★★ **Tomate et basilic** — Au jardin, Capucine sème une graine de tomate et une graine de basilic, dans deux pots séparés. On note T : « la graine de tomate germe », avec $P(T) = 0{,}8$, et B : « la graine de basilic germe », avec $P(B) = q$. La probabilité qu'une et une seule des deux graines germe vaut 0,38. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Justifie que les deux épreuves sont indépendantes. Exprime en fonction de q la probabilité qu'une et une seule graine germe.

(b) Déduis-en la valeur de q, puis calcule la probabilité qu'au moins une des deux graines germe.

(c) On note U : « une et une seule graine germe ». Calcule $P_U(T)$, puis traduis ce résultat par une phrase.

(d) Capucine sème ensuite deux graines de tomate, dans deux pots séparés. Calcule la probabilité qu'une et une seule germe, puis explique pourquoi on ne retrouve pas 0,38.

Ex. 41 ★★★ **Sondage sur la piste cyclable** — Dans une grande ville, 60 % des habitants sont favorables à la création d'une piste cyclable. Pour un sondage, Sacha interroge 4 habitants au hasard. La population est assez grande pour qu'on assimile ce choix à quatre tirages avec remise. On note S : « l'habitant interrogé est favorable ».

(a) Combien de chemins comporte l'arbre des 4 réponses ? Écris tous les chemins qui réalisent « exactement deux habitants favorables ».

(b) Pour « exactement un habitant favorable », Romane écrit : $0{,}6^3 \times 0{,}4 = 0{,}0864$. Relève ses deux erreurs, puis donne le bon résultat.

(c) Calcule les probabilités d'avoir 0, 2, 3 et 4 habitants favorables. Contrôle que la somme des cinq probabilités vaut 1.

(d) Le maire lance le projet si au moins 3 des 4 sondés sont favorables. Calcule cette probabilité, puis commente ce résultat.

Ex. 42 ★★★ **Les lunettes à l'infirmerie** — Yanis tient l'infirmerie d'un lycée. On admet qu'un élève pris au hasard porte des lunettes avec la probabilité 0,25. Yanis choisit des élèves au hasard. L'effectif est assez grand pour qu'on assimile ces choix à des tirages avec remise. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Yanis choisit 3 élèves. Calcule la probabilité qu'exactement deux d'entre eux portent des lunettes.

(b) Yanis choisit maintenant 4 élèves. Calcule la probabilité qu'au moins l'un d'eux porte des lunettes.

Ex. 42 **(suite)**

(c) Dans un autre lycée, la proportion p est inconnue. Pour deux élèves choisis, la probabilité qu'un et un seul porte des lunettes vaut 0,42. Montre que $p^2 - p + 0{,}21 = 0$.

(d) Résous cette équation. Moins de la moitié des élèves de ce lycée portent des lunettes : donne p.

(e) Avec cette valeur de p, calcule la probabilité qu'au plus un élève sur trois porte des lunettes.

7. *Au moins un, au plus : paramètre inconnu*

À retenir : Au moins un : $1-(1-p)^n$ (contraire « aucun »), jamais $n \times p$. Au plus un $= 0$ ou 1 succès ; au moins deux $= 1 - P(\text{au plus un})$. Paramètre : $(1-p)^2 = 0{,}25$ donne $1-p = 0{,}5$ car $1-p \geqslant 0$.

Ex. 43 ★☆☆ **Aucun, au moins un, au plus un** — Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est répétée n fois, de façon identique et indépendante. Donne les valeurs exactes.

(a) Pour $n = 4$, écris l'événement contraire de « au moins un succès », puis le chemin de l'arbre qui lui correspond.

(b) Pour $p = 0{,}1$ et $n = 2$, calcule la probabilité de n'obtenir aucun succès.

(c) Pour $p = 0{,}25$ et $n = 3$, calcule la probabilité d'obtenir au moins un succès.

(d) Une graine germe avec la probabilité 0,35. Hugo sème 4 graines qui germent indépendamment et annonce : « P(au moins une germe) $= 4 \times 0{,}35$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(e) Pour $p = 0{,}1$ et $n = 3$, calcule la probabilité d'obtenir au plus un succès.

(f) Pour $p = 0{,}1$ et $n = 3$, calcule la probabilité d'obtenir au moins deux succès.

Ex. 44 ★☆☆ **Retrouver le paramètre p** — Une épreuve de Bernoulli de paramètre p inconnu, avec $0 \leqslant p \leqslant 1$, est répétée n fois, de façon identique et indépendante.

(a) Pour $n = 2$, la probabilité de n'obtenir aucun succès vaut 0,36. Trouve p.

(b) Pour $n = 2$, la probabilité d'obtenir au moins un succès vaut 0,91. Trouve p.

(c) Pour $n = 4$, la probabilité de n'obtenir aucun succès vaut 0,0016. Trouve p.

(d) Pour $(1-p)^2 = 0{,}81$, Mila écrit : « $1 - p = 0{,}9$ ou $1 - p = -0{,}9$, donc $p = 0{,}1$ ou $p = 1{,}9$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Trois machines dans un atelier** — Un atelier fait tourner 3 machines qui fonctionnent indépendamment. Chacune tombe en panne dans la journée avec la probabilité 0,04. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Justifie qu'on répète une épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante. Précise le succès et son paramètre.

(b) Calcule la probabilité qu'au moins une machine tombe en panne dans la journée.

(c) Calcule la probabilité qu'exactement une machine tombe en panne, en comptant les chemins de l'arbre.

(d) Calcule la probabilité d'avoir au moins deux pannes dans la journée, puis interprète ce résultat sur 1\,000 journées.

Ex. 46 ★★☆ **Les penalties d'Inès** — Inès tire des penalties indépendants, chacun réussi avec la même probabilité p, où $0 \leqslant p \leqslant 1$. On note R « le penalty est réussi ». Sur deux tirs, la probabilité qu'elle en rate au moins un vaut 0,3916. Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Pour deux tirs, recopie et complète en fonction de p :

Chemin	RR	RR̄	R̄R	R̄R̄
Probabilité	?	?	?	?

(b) Quel est l'événement contraire de « rater au moins un tir sur deux » ? Déduis-en une équation vérifiée par p, puis trouve p en justifiant.

(c) Calcule la probabilité qu'Inès réussisse exactement un tir sur deux.

(d) Inès tire 3 penalties. Calcule la probabilité qu'elle les réussisse tous, puis celle qu'elle en rate au moins un. Interprète.

Ex. 47 ★★★ **Les tickets à gratter de Léo** — Un ticket à gratter est gagnant avec la probabilité 0,15. Les tickets sont gagnants indépendamment les uns des autres. Léo achète 4 tickets. On note G « le ticket est gagnant ». Arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Calcule la probabilité que Léo ait au moins un ticket gagnant parmi ses 4 tickets.

(b) Calcule la probabilité que Léo ait au plus un ticket gagnant parmi ses 4 tickets.

(c) Déduis-en la probabilité qu'il ait au moins deux tickets gagnants. Interprète ce résultat dans le contexte.

(d) Un ticket « premium » est gagnant avec la probabilité 0,32, indépendamment des autres. Compare 2 tickets premium et 4 tickets ordinaires pour « au moins un » puis « au moins deux » gagnants. Conseille Léo.

Ex. 48 ★★★ **Le bus de Nora** — Chaque matin, le bus de Nora est en retard avec une probabilité p, où $0 \leqslant p \leqslant 1$. Les retards sont indépendants d'un jour à l'autre. On note R « le bus est en retard ». Sur 2 jours, la probabilité d'avoir au moins un retard vaut 0,36.

(a) Écris une équation vérifiée par p. Résous-la en justifiant le choix de la solution.

(b) Calcule la probabilité que le bus soit en retard au moins deux jours sur 3 jours.

(c) Nora affirme : « Sur 3 jours, j'ai $3 \times p$ de risque d'avoir au moins un retard, donc plus d'une chance sur deux. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Par essais, trouve le plus petit nombre de jours $n \leqslant 4$ tel que la probabilité d'avoir au moins un retard dépasse 0,5.

Ex. 49 ★★★ **Le sondage téléphonique de Yanis** — Yanis réalise un sondage par téléphone. Chaque personne appelée accepte de répondre avec une probabilité p, où $0 \leqslant p \leqslant 1$, indépendamment des autres. On note A « la personne accepte ». Quand Yanis appelle 2 personnes, la probabilité qu'exactement une accepte vaut 0,42.

(a) Exprime en fonction de p la probabilité qu'exactement une personne sur deux accepte. Déduis-en une équation du second degré vérifiée par p.

(b) Résous cette équation. Combien de valeurs de p conviennent ? Justifie.

(c) On sait aussi qu'il est plus probable que les deux personnes refusent plutôt que les deux acceptent. Déduis-en p.

(d) Yanis appelle maintenant 3 personnes. Recopie et complète le tableau, puis vérifie la somme :

Acceptations	**aucune**	**une seule**	**deux**	**trois**
Probabilité	?	?	?	?

(e) Calcule la probabilité qu'au plus deux personnes sur trois acceptent, puis interprète ce résultat.