1. Rappels de 2nde : probabilité conditionnelle et tableau croisé

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : traduire une phrase en notation**

(a) La condition est « être abonné » : elle va en indice. $P_A(R) = 0{,}3$.

(b) Il n'y a pas de condition (« des voyageurs » désigne tous les voyageurs) : les deux événements sont réalisés en même temps. C'est $P(A \cap R) = 0{,}12$.

(c) La condition R est en indice : « parmi les voyageurs dont le train est en retard, la moitié sont abonnés ». Ce n'est pas $P_A(R)$, qui porte sur les abonnés.

(d) « Chez les non-abonnés » : la condition est $\overline{A}$, et « à l'heure » est $\overline{R}$. $P_{\overline{A}}(\overline{R}) = 0{,}8$.

(e) $P_A(\overline{R}) = 1 - P_A(R) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

(f) Le complément se fait avec la même condition : $P_{\overline{A}}(R) = 1 - P_{\overline{A}}(\overline{R}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. En général, $P_{\overline{A}}(R) \neq 1 - P_A(R)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau croisé**

(a) Sans condition, on divise par le total général : $P(F \cap C) = \frac{72}{320} = 0{,}225$.

(b) La condition est F : on divise par le total de la ligne F. $P_F(C) = \frac{72}{180} = 0{,}4$.

(c) La condition est C : on divise par le total de la colonne C. $P_C(F) = \frac{72}{170} = \frac{36}{85} \approx 0{,}424$. Même numérateur que $P_F(C)$, mais pas le même dénominateur.

(d) $P_G(\overline{C}) = \frac{42}{140} = 0{,}3$.

(e) En divisant par 320, Tom obtient $P(\overline{C} \cap G)$. La condition est $\overline{C}$: on divise par le total de la colonne $\overline{C}$. $P_{\overline{C}}(G) = \frac{42}{150} = 0{,}28$.

(f) $P_C(G) = \frac{98}{170} = \frac{49}{85} \approx 0{,}576$. On peut aussi écrire $1 - P_C(F)$, avec la même condition C.

Ex. 3 ★★☆ **Sondage sur les podcasts : compléter un tableau croisé**

(a) J : $0{,}45 \times 1\,000 = 450$, donc $\overline{J}$: 550. $J \cap E$: $0{,}6 \times 450 = 270$ et $J \cap \overline{E}$: 180. $\overline{J} \cap E$: $0{,}3 \times 550 = 165$ et $\overline{J} \cap \overline{E}$: 385.

	E	Ē	Total
J	270	180	450
J̄	165	385	550
Total	435	565	1 000

(b) La condition est E : on divise par le total de la colonne E. $P_E(J) = \frac{270}{435} = \frac{18}{29} \approx 0{,}621$. Parmi les auditeurs de podcasts, environ 62 % ont moins de 35 ans, alors que $P_J(E) = 0{,}6$. Les deux nombres sont différents.

(c) $P(\overline{J} \cap \overline{E}) = \frac{385}{1\,000} = 0{,}385$: 38,5 % des personnes ont 35 ans ou plus et n'écoutent pas de podcasts.

(d) Non. $P(E) = \frac{435}{1\,000} = 0{,}435$, et pas 0,45. Les deux groupes n'ont pas le même effectif (450 et 550) : la moyenne simple des deux taux ne convient pas.

Ex. 4 ★★☆ **Vélos défectueux : définition et probabilités composées**

(a) On cherche $P_E(D) = \frac{P(E \cap D)}{P(E)} = \frac{0{,}028}{0{,}35} = 0{,}08$. Parmi les vélos électriques, 8 % sont défectueux.

(b) $P_E(\overline{D}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$, donc $P(E \cap \overline{D}) = P(E) \times P_E(\overline{D}) = 0{,}35 \times 0{,}92 = 0{,}322$. On prévoit $0{,}322 \times 2\,000 = 644$ vélos électriques non défectueux.

(c) « Chez les vélos non électriques » est une condition : $0{,}04 = P_{\overline{E}}(D)$, pas une intersection. Par les probabilités composées : $P(\overline{E} \cap D) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(D) = 0{,}65 \times 0{,}04 = 0{,}026$.

(d) $E \cap D$ et $\overline{E} \cap D$ sont incompatibles et leur réunion est D.

Donc $P(D) = 0{,}028 + 0{,}026 = 0{,}054$: 5,4 % des vélos sont défectueux.

Ex. 5 ★★★ **Urgences : vrai ou faux sur un tableau croisé**

(a) Faux. « Parmi les patients arrivés en ambulance » est la condition, donc on cherche $P_A(H)$ et on lit la ligne de A : $P_A(H) = \frac{90}{120} = 0{,}75$. Le nombre $\frac{90}{600} = 0{,}15$ est $P(A \cap H)$, car on a divisé par le total général. Parmi les patients arrivés en ambulance, 75 % sont hospitalisés.

Ex. 5 **(suite)**

(b) Faux. Ici la condition est H (« parmi les hospitalisés »), donc on cherche $P_H(A)$ et on lit la colonne de H : $P_H(A) = \frac{90}{162} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$. Parmi les patients hospitalisés, environ 55,6 % sont arrivés en ambulance. On a le même numérateur mais un autre dénominateur, donc $P_H(A) \neq P_A(H)$.

(c) Vrai. $P_A(\overline{H}) = \frac{30}{120} = 0{,}25$, ce qui est bien égal à $1 - P_A(H) = 1 - 0{,}75$. Parmi les patients arrivés en ambulance, 25 % ne sont pas hospitalisés.

(d) Faux. On lit la ligne de $\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(H) = \frac{72}{480} = 0{,}15$. Le nombre $0{,}25 = 1 - P_A(H)$ est $P_A(\overline{H})$, et non $P_{\overline{A}}(H)$: on ne peut pas changer de ligne en prenant le complément à 1. Parmi les patients qui ne sont pas arrivés en ambulance, 15 % sont hospitalisés.

(e) Vrai. $\frac{P_A(H)}{P_{\overline{A}}(H)} = \frac{0{,}75}{0{,}15} = 5$. La probabilité d'être hospitalisé est 5 fois plus grande pour un patient arrivé en ambulance.

Ex. 6 ★★★ **Auto-école : tableau à compléter et erreurs à corriger**

(a) $P(C) = 0{,}4$; « parmi eux » met C en indice : $P_C(R) = 0{,}8$; « chez les autres » met $\overline{C}$ en indice : $P_{\overline{C}}(R) = 0{,}55$. La condition va en indice, jamais dans une intersection.

(b) Effectif de C : $0{,}4 \times 500 = 200$, donc 300 pour $\overline{C}$. Effectif de $C \cap R$: $0{,}8 \times 200 = 160$, donc $200 - 160 = 40$ pour $C \cap \overline{R}$. Effectif de $\overline{C} \cap R$: $0{,}55 \times 300 = 165$, donc $300 - 165 = 135$ pour $\overline{C} \cap \overline{R}$.

	R	R̄	Total
C	160	40	200
C̄	165	135	300
Total	325	175	500

(c) Non. 0,8 est $P_C(R)$, une probabilité conditionnelle qui porte sur les seuls candidats de C. L'événement « conduite accompagnée et reçu » est $C \cap R$: sans condition, on divise par le total général, donc $P(C \cap R) = \frac{160}{500} = 0{,}32$.

(d) Non. « Parmi les reçus » met R en indice : on cherche $P_R(C) = \frac{160}{325} = \frac{32}{65} \approx 0{,}492$. Parmi les candidats reçus du premier coup, environ 49,2 % ont fait la conduite accompagnée. Yasmine a confondu $P_R(C)$ avec $P_C(R) = 0{,}8$.

Ex. 6 **(suite)**

(e) On lit la colonne de $\overline{R}$: $P_{\overline{R}}(C) = \frac{40}{175} = \frac{8}{35} \approx 0{,}229$ et $P_{\overline{R}}(\overline{C}) = \frac{135}{175} = \frac{27}{35} \approx 0{,}771$. Parmi les candidats qui ont échoué, environ 77,1 % n'ont pas fait la conduite accompagnée : c'est le cas le plus probable.

Ex. 7 ★★★ **Jeu en ligne : un effectif inconnu**

(a) L'effectif de $\overline{A}$ est $800 - 300 = 500$, donc $P_{\overline{A}}(M) = \frac{x}{500}$. L'effectif de M est $120 + x$, donc $P_M(A) = \frac{120}{120+x}$. Dans les deux cas, on divise par l'effectif de la condition.

(b) $P_A(M) = \frac{120}{300} = 0{,}4$. On résout $P_{\overline{A}}(M) \geqslant P_A(M)$, c'est-à-dire $\frac{x}{500} \geqslant 0{,}4$, soit $x \geqslant 0{,}4 \times 500 = 200$. Comme $x \leqslant 500$, la condition est vérifiée pour $200 \leqslant x \leqslant 500$.

(c) « Parmi les joueurs sur mobile » met M en indice, donc $P_M(A) = 0{,}2$ (et non $P(A \cap M) = 0{,}2$). On résout $\frac{120}{120+x} = 0{,}2 : 120 + x = \frac{120}{0{,}2} = 600$, donc $x = 480$. Cette valeur est bien comprise entre 0 et 500.

(d) $P(M) = \frac{120+480}{800} = \frac{600}{800} = 0{,}75$. L'effectif de $\overline{M}$ est $800 - 600 = 200$ et celui de $A \cap \overline{M}$ est $300 - 120 = 180$. Donc $P_{\overline{M}}(A) = \frac{180}{200} = 0{,}9$: parmi les joueurs qui ne jouent pas surtout sur mobile, 90 % sont premium.

2. *Arbres pondérés et probabilités composées*

Ex. 8 ★☆☆ **Compléter et lire un arbre**

(a) Les deux branches du premier nœud ont une somme de 1 : $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

(b) Sur le nœud R : $P_R(\overline{C}) = 1 - P_R(C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

(c) Sur le nœud $\overline{R}$: $P_{\overline{R}}(\overline{C}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$. Attention : ce n'est pas $1 - P_R(C)$.

(d) Non. La branche porte $P_R(C) = 0{,}6$. On obtient $P(R \cap C)$ avec le produit du chemin : $P(R \cap C) = P(R) \times P_R(C) = 0{,}15 \times 0{,}6 = 0{,}09$.

(e) Probabilités composées : $P(\overline{R} \cap C) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(C) = 0{,}85 \times 0{,}04 = 0{,}034$.

(f) $P(\overline{R} \cap \overline{C}) = 0{,}85 \times 0{,}96 = 0{,}816$.

(g) Deux chemins mènent à C : $P(C) = P(R \cap C) + P(\overline{R} \cap C) = 0{,}09 + 0{,}034 = 0{,}124$.

Ex. 9 ★☆☆ **Traduire l'énoncé en notation**

(a) La donnée porte sur tous les élèves, donc sur le premier niveau : $P(I) = 0{,}4$.

(b) « Parmi les internes » donne une branche du second niveau partant de I : $P_I(T) = 0{,}25$.

Ex. 9 **(suite)**

(c) La donnée porte sur tous les élèves et décrit « externe et théâtre ». C'est une intersection, pas une branche : $P(\overline{I} \cap T) = 0{,}12$.

(d) « Chez les externes » donne une branche partant de $\overline{I}$: $P_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0{,}8$.

(e) Probabilités composées : $P(I \cap T) = P(I) \times P_I(T) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.

(f) $P_I(\overline{T}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$, donc $P(I \cap \overline{T}) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$.

Ex. 10 ★★☆ **Deux billes tirées sans remise**

(a) Premier niveau : $P(R_1) = \frac{4}{9}$ et $P(V_1) = \frac{5}{9}$. Après R_1, il reste 3 rouges sur 8 billes : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{8}$ et $P_{R_1}(V_2) = \frac{5}{8}$. Après V_1, il reste 4 rouges et 4 vertes : $P_{V_1}(R_2) = \frac{4}{8}$ et $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{8}$.

(b) Probabilités composées : $P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

(c) Deux chemins mènent à « même couleur » : R_1R_2 et V_1V_2. On a $P(V_1 \cap V_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$, donc $P = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$.

(d) L'événement contraire de « au moins une bille rouge » est « deux billes vertes » : un seul chemin, V_1V_2. $P(V_1 \cap V_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$, donc $P = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18} \approx 0{,}722$. Dans environ 72,2 % des cas, Hugo obtient au moins une bille rouge.

Ex. 11 ★★☆ **Trois machines, de l'arbre au tableau**

(a) Premier niveau à trois branches : $P(M_1) = 0{,}5$, $P(M_2) = 0{,}3$ et $P(M_3) = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$. Second niveau : $P_{M_1}(D) = 0{,}02$ et $P_{M_1}(\overline{D}) = 0{,}98$; $P_{M_2}(D) = 0{,}03$ et $P_{M_2}(\overline{D}) = 0{,}97$; $P_{M_3}(D) = 0{,}05$ et $P_{M_3}(\overline{D}) = 0{,}95$.

(b) M_1 : $500 \times 0{,}02 = 10$. M_2 : 300 pièces, dont $300 \times 0{,}03 = 9$. M_3 : 200 pièces, dont $200 \times 0{,}05 = 10$.

	D	D̄	Total
M_1	10	490	500
M_2	9	291	300
M_3	10	190	200
Total	29	971	1000

(c) Probabilités composées : $P(M_2 \cap \overline{D}) = P(M_2) \times P_{M_2}(\overline{D}) = 0{,}3 \times 0{,}97 = 0{,}291$. Dans le tableau, on lit $\frac{291}{1000} = 0{,}291$.

Ex. 11 **(suite)**

(d) Non. La moyenne donne $\frac{0{,}02+0{,}03+0{,}05}{3} \approx 0{,}033$, mais les machines ne produisent pas la même quantité. On additionne les trois chemins qui mènent à D : $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}029$, soit $\frac{29}{1000}$ dans le tableau.

Ex. 12 ★★★ **Le jeu des jetons à la kermesse**

(a) Premier niveau (toute la boîte) : $P(B_1) = \frac{3}{10}$ et $P(\overline{B_1}) = \frac{7}{10}$. Le tirage est sans remise, donc la boîte n'a plus que 9 jetons au second tirage. Après B_1, il reste 2 bleus et 7 jaunes : $P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{9}$ et $P_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{7}{9}$. Après $\overline{B_1}$, il reste 3 bleus et 6 jaunes : $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. À chaque nœud, la somme vaut 1.

(b) « Même couleur » correspond à deux chemins : $B_1 \cap B_2$ et $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$. Par les probabilités composées, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$ et $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$. On additionne les deux chemins : Zoé gagne avec la probabilité $\frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$.

(c) Non. $\frac{2}{9}$ est la branche $P_{B_1}(B_2)$: c'est la probabilité d'un second jeton bleu parmi les cas où le premier est bleu. B_2 est au bout de deux chemins : $P(B_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{6}{90} + \frac{21}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0{,}3$. C'est la même valeur que $P(B_1)$.

(d) Avec remise, la boîte est la même aux deux tirages. Toutes les branches valent donc $\frac{3}{10}$ (bleu) et $\frac{7}{10}$ (jaune). La probabilité de gagner devient $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100} = \frac{29}{50} = 0{,}58$. Or $0{,}58 > \frac{8}{15} \approx 0{,}533$: oui, Zoé a intérêt à accepter.

(e) On ajoute un troisième niveau. Sur chaque branche, on prend la probabilité sachant tout le chemin qui précède. Trois bleus : $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$. Trois jaunes : $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{210}{720}$. On additionne les deux chemins : la probabilité vaut $\frac{216}{720} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

Ex. 13 ★★★ **Sondage sur la lecture : arbre et tableau**

(a) Premier niveau (données sur toute la ville) : $P(J) = 0{,}25$ et $P(M) = 0{,}45$. Les trois événements forment une partition, donc les trois branches font 1 : $P(S) = 1 - 0{,}25 - 0{,}45 = 0{,}3$. Second niveau (« parmi les … ») : $P_J(L) = 0{,}48$, $P_M(L) = 0{,}4$, $P_S(L) = 0{,}55$. Compléments sur le même nœud : $P_J(\overline{L}) = 0{,}52$, $P_M(\overline{L}) = 0{,}6$, $P_S(\overline{L}) = 0{,}45$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Non. 55 % et 40 % sont des branches du second niveau, $P_S(L)$ et $P_M(L)$: ce sont des proportions « parmi » des tranches d'âge de tailles différentes. Sur toute la ville, on compare les produits des chemins : $P(S \cap L) = 0{,}3 \times 0{,}55 = 0{,}165$ et $P(M \cap L) = 0{,}45 \times 0{,}4 = 0{,}18$. Comme $0{,}165 < 0{,}18$, les lecteurs de 30 à 59 ans sont les plus nombreux.

(c) $\{J, M, S\}$ est une partition de l'univers. Par la formule des probabilités totales, $P(L) = P(J \cap L) + P(M \cap L) + P(S \cap L) = 0{,}25 \times 0{,}48 + 0{,}18 + 0{,}165 = 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}165 = 0{,}465$. Parmi les habitants, 46,5 % lisent au moins un livre par mois.

(d) Chaque case vaut $1\,000\times$ la probabilité du chemin, par exemple $1\,000 \times 0{,}45 \times 0{,}4 = 180$.

	L	L̄	Total
J	120	130	250
M	180	270	450
S	165	135	300
Total	465	535	1000

(e) On cherche $P_L(S)$. On lit dans le tableau : $P_L(S) = \frac{165}{465} = \frac{11}{31} \approx 0{,}355$. Parmi les habitants qui lisent au moins un livre par mois, environ 35,5 % ont 60 ans ou plus.

Ex. 14 ★★★ **Premier et second service au tennis**

(a) Premier niveau : $P(S_1) = 0{,}6$ et $P(\overline{S_1}) = 0{,}4$. Après S_1 : $P_{S_1}(G) = 0{,}75$ et $P_{S_1}(\overline{G}) = 0{,}25$. Après $\overline{S_1}$: $P_{\overline{S_1}}(S_2) = 0{,}9$ et $P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) = 0{,}1$. Troisième niveau, après $\overline{S_1} \cap S_2$: $P_{\overline{S_1} \cap S_2}(G) = 0{,}5$ et $P_{\overline{S_1} \cap S_2}(\overline{G}) = 0{,}5$. Après une double faute, le point est perdu : la branche vers $\overline{G}$ vaut 1.

(b) La double faute est le chemin $\overline{S_1} \cap \overline{S_2}$. Par les probabilités composées, $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04$.

(c) Deux chemins mènent à G. D'une part, $P(S_1 \cap G) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$. D'autre part, $P(\overline{S_1} \cap S_2 \cap G) = 0{,}4 \times 0{,}9 \times 0{,}5 = 0{,}18$. On additionne les chemins : $P(G) = 0{,}45 + 0{,}18 = 0{,}63$. Inès gagne 63 % de ses points de service.

(d) Le chemin $S_1 \cap G$ ne change pas. Avec le service risqué, $P(G) = 0{,}45 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}45 + 0{,}196 = 0{,}646$. Or $0{,}646 > 0{,}63$: oui, elle doit suivre le conseil. Pourtant, ses doubles fautes passent de 0,04 à $0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.

Ex. 14 **(suite)**

(e) Ici, $x = P_{\overline{S_1} \cap S_2}(G)$. On a $P(G) = 0{,}45 + 0{,}4 \times 0{,}9 \times x = 0{,}45 + 0{,}36x$. On résout $0{,}45 + 0{,}36x \geqslant 0{,}65$, soit $x \geqslant \frac{0{,}2}{0{,}36} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$. Cette valeur est bien dans $[0;1]$: il lui faut gagner au moins 55,6 % des points quand son second service est bon.

3. *Probabilités totales, retrouver une probabilité inconnue*

Ex. 15 ★★★ **Le bus du matin**

(a) Chaque jour, il pleut ou il ne pleut pas, et jamais les deux : R et $\overline{R}$ sont disjoints et leur réunion est Ω. Ils forment donc une partition de l'univers.

(b) $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

(c) Probabilités composées : $P(R \cap L) = P(R) \times P_R(L) = 0{,}35 \times 0{,}4 = 0{,}14$.

(d) $P(\overline{R} \cap L) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(L) = 0{,}65 \times 0{,}1 = 0{,}065$.

(e) $\{R, \overline{R}\}$ est une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(L) = P(R \cap L) + P(\overline{R} \cap L) = 0{,}14 + 0{,}065 = 0{,}205$.

(f) 0,4 et 0,1 sont des branches, c'est-à-dire des probabilités conditionnelles. Or chaque terme de la formule est un chemin : on multiplie le long du chemin, puis on additionne. On obtient $P(L) = 0{,}35 \times 0{,}4 + 0{,}65 \times 0{,}1 = 0{,}205$.

(g) $P_R(\overline{L}) = 1 - P_R(L) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Probabilités composées : $P(R \cap \overline{L}) = P(R) \times P_R(\overline{L}) = 0{,}35 \times 0{,}6 = 0{,}21$.

Ex. 16 ★★★ **Sondage musique et podcasts**

(a) Les lignes et les colonnes s'additionnent : $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}45 - 0{,}18 = 0{,}27$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}30 - 0{,}18 = 0{,}12$; $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}55 - 0{,}12 = 0{,}43$; $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$.

	B	B̄	Total
A	0,18	0,27	0,45
Ā	0,12	0,43	0,55
Total	0,30	0,70	1

(b) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{0{,}45} = 0{,}4$.

(c) $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}12}{0{,}55} = \frac{12}{55} \approx 0{,}218$.

(d) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}30} = 0{,}6$.

Ex. 16 **(suite)**

(e) A et $\overline{A}$ forment une partition (un élève a un abonnement ou n'en a pas). D'où $P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\overline{A})\,P_{\overline{A}}(B) = 0{,}45 \times 0{,}4 + 0{,}55 \times \frac{12}{55} = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}30$. On retrouve bien la valeur du tableau.

Ex. 17 ★★☆ **Trois fournisseurs de freins**

(a) Chaque frein vient d'un seul fournisseur, et chaque frein a un fournisseur : F_1, F_2, F_3 sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω. Ils forment donc une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(F_1)\,P_{F_1}(D) + P(F_2)\,P_{F_2}(D) + P(F_3)\,P_{F_3}(D)$.

(b) $P(D) = 0{,}48 \times 0{,}01 + 0{,}32 \times 0{,}03 + 0{,}2 \times 0{,}06 = 0{,}0048 + 0{,}0096 + 0{,}012 = 0{,}0264$. Parmi tous les freins, 2,64 % sont défectueux.

(c) Hugo fait la moyenne simple des taux, comme si les trois fournisseurs livraient autant de freins chacun. Or chaque taux $P_{F_i}(D)$ doit être pondéré par $P(F_i)$. F_1, qui a le plus petit taux, livre près de la moitié des freins : la bonne valeur, 2,64 %, est donc plus basse que 3,33 %.

(d) On cherche $P_D(F_3) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}06}{0{,}0264} = \frac{0{,}012}{0{,}0264} = \frac{5}{11} \approx 0{,}455$. Parmi les freins défectueux, environ 45,5 % viennent de F_3, qui ne fournit pourtant que 20 % des freins.

Ex. 18 ★★☆ **Tournoi du club de handball**

(a) Chaque licencié est soit jeune, soit adulte, jamais les deux : $\{J, \overline{J}\}$ est une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(J)\,P_J(T) + P(\overline{J})\,P_{\overline{J}}(T) = 0{,}7x + 0{,}3(1-x) = 0{,}3 + 0{,}4x$.

(b) $0{,}3 + 0{,}4x = 0{,}46$, donc $0{,}4x = 0{,}16$ et $x = 0{,}4$. Cette valeur est bien dans $[0;1]$: parmi les licenciés, 40 % sont des jeunes.

(c) Arbre, premier niveau : $P(J) = 0{,}4$; $P(\overline{J}) = 0{,}6$. Second niveau : $P_J(T) = 0{,}7$; $P_J(\overline{T}) = 0{,}3$; $P_{\overline{J}}(T) = 0{,}3$; $P_{\overline{J}}(\overline{T}) = 0{,}7$. Chaque chemin est un produit, par exemple $P(J \cap T) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$.

Chemin	$J \cap T$	$J \cap \overline{T}$	$\overline{J} \cap T$	$\overline{J} \cap \overline{T}$
Probabilité	0,28	0,12	0,18	0,42

Somme : $0{,}28 + 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}42 = 1$. On retrouve aussi $P(T) = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46$.

Ex. 19 ★★★ **Livraison de repas : un taux inconnu**

(a) Chaque commande est confiée à un et un seul restaurant : R_1, R_2, R_3 sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω. Ils forment donc une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P(R_1)\,P_{R_1}(E) + P(R_2)\,P_{R_2}(E) + P(R_3)\,P_{R_3}(E) = 0{,}4 \times 0{,}03 + 0{,}35 \times 0{,}05 + 0{,}25\,t = 0{,}012 + 0{,}0175 + 0{,}25\,t = 0{,}0295 + 0{,}25\,t$.

(b) On résout $0{,}0295 + 0{,}25\,t = 0{,}047$, soit $0{,}25\,t = 0{,}0175$, donc $t = \frac{0{,}0175}{0{,}25} = 0{,}07$. Cette valeur est bien dans $[0;1]$: parmi les commandes de R_3, 7 % sont erronées.

(c) R_1 et R_2 sont disjoints, donc $P(R_1 \cup R_2) = 0{,}4 + 0{,}35 = 0{,}75$ et $P((R_1 \cup R_2) \cap E) = 0{,}012 + 0{,}0175 = 0{,}0295$ (somme de deux chemins).
Donc $P_{R_1 \cup R_2}(E) = \frac{0{,}0295}{0{,}75} = \frac{59}{1\,500} \approx 0{,}039$. Léa a tort : parmi les commandes de R_1 ou de R_2, environ 3,9 % sont erronées, et non 4 %. La moyenne simple des taux est fausse, il faut pondérer : R_1 reçoit plus de commandes que R_2.

(d) On cherche $P_E(R_3) = \frac{P(R_3 \cap E)}{P(E)}$, avec $P(R_3 \cap E) = P(R_3) \times P_{R_3}(E) = 0{,}25 \times 0{,}07 = 0{,}0175$.
Donc $P_E(R_3) = \frac{0{,}0175}{0{,}047} = \frac{35}{94} \approx 0{,}372$. Parmi les commandes erronées, environ 37,2 % viennent de R_3.

Ex. 20 ★★★ **Grippe et vaccination : la branche manquante**

(a) $P(V) = 0{,}6$; $P_V(G) = 0{,}05$; $P(G) = 0{,}13$. D'après la formule des probabilités composées : $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03$.

(b) Tom soustrait une branche ($P_V(G) = 0{,}05$) alors que $P(G)$ est une somme de chemins : il faut soustraire le chemin $P(V \cap G) = 0{,}03$. Chaque habitant est vacciné ou non, et pas les deux : $\{V, \overline{V}\}$ est une partition.
Donc $P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G)$, d'où $P(\overline{V} \cap G) = 0{,}13 - 0{,}03 = 0{,}10$.

(c) $P(\overline{V}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, donc $P_{\overline{V}}(G) = \frac{P(\overline{V} \cap G)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}10}{0{,}4} = 0{,}25$. Parmi les habitants non vaccinés, 25 % attrapent la grippe.

(d)

	G	$\overline{G}$	**Total**
V	0,03	0,57	0,6
$\overline{V}$	0,10	0,30	0,4
Total	0,13	0,87	1

On a $P(V \cap \overline{G}) = 0{,}6 - 0{,}03 = 0{,}57$, $P(\overline{V} \cap \overline{G}) = 0{,}4 - 0{,}10 = 0{,}30$ et $P(\overline{G}) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$. Vérification sur la colonne : $0{,}57 + 0{,}30 = 0{,}87$.

Ex. 20 **(suite)**

(e) On a bien $0{,}05 \leqslant 0{,}13 \leqslant 0{,}25$. C'était prévisible : $P(G) = 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}25$ est une moyenne pondérée des deux taux, avec des poids positifs de somme 1. Elle est donc comprise entre le plus petit et le plus grand taux, et plus proche de 0,05 car les vaccinés sont plus nombreux.

Ex. 21 ★★★ **Achats dans un jeu : une proportion inconnue**

(a) Chaque joueur joue soit sur téléphone, soit sur ordinateur : $\{M, \overline{M}\}$ est une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(M)\,P_M(A) + P(\overline{M})\,P_{\overline{M}}(A) = 0{,}12\,x + 0{,}2\,(1-x) = 0{,}12\,x + 0{,}2 - 0{,}2\,x = 0{,}2 - 0{,}08\,x$.

(b) $0{,}2 - 0{,}08\,x = 0{,}16$ donne $0{,}08\,x = 0{,}04$, soit $x = 0{,}5$. Inès n'a raison que si $x = 0{,}5$, c'est-à-dire s'il y a autant de joueurs sur téléphone que sur ordinateur ($P(M) = P(\overline{M}) = 0{,}5$). En général, elle a tort : la moyenne simple des taux est fausse, il faut pondérer par $P(M)$ et $P(\overline{M})$.

(c) $0{,}2 - 0{,}08\,x \geqslant 0{,}17$ donne $-0{,}08\,x \geqslant -0{,}03$, soit $x \leqslant \frac{0{,}03}{0{,}08} = 0{,}375$ (on divise par un nombre négatif : le sens change). Avec $0 \leqslant x \leqslant 1$: $x \in [0\,;0{,}375]$. Il faut qu'au plus 37,5 % des joueurs jouent sur téléphone.

(d) Par le calcul : $0{,}2 - 0{,}08\,x = 0{,}22$ donne $x = \frac{-0{,}02}{0{,}08} = -0{,}25$, qui n'est pas dans $[0\,;1]$. Sans calcul : $P(A)$ est une moyenne pondérée de 0,12 et 0,2, donc $0{,}12 \leqslant P(A) \leqslant 0{,}2$. On ne peut donc pas avoir $P(A) = 0{,}22$.

(e) $P(A) = 0{,}2 - 0{,}08 \times 0{,}3 = 0{,}176$ et $P(M \cap A) = P(M) \times P_M(A) = 0{,}3 \times 0{,}12 = 0{,}036$.
Donc $P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}036}{0{,}176} = \frac{9}{44} \approx 0{,}205$. Parmi les joueurs qui ont fait un achat, environ 20,5 % jouent sur téléphone.

4. *Inverser le conditionnement : faux positifs*

Ex. 22 ★★☆ **Dépistage d'une carence : trois étapes**

(a) La spécificité est la probabilité d'un test négatif chez un non-malade : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}99$.
Donc $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$.

(b) Par les probabilités composées : $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}02 \times 0{,}97 = 0{,}0194$.

Ex. 22 **(suite)**

(c) Un faux positif est un non-malade testé positif. Par les probabilités composées : $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}98 \times 0{,}01 = 0{,}0098$.

(d) $\{M, \overline{M}\}$ est une partition de l'univers. Par la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}0194 + 0{,}0098 = 0{,}0292$.

(e) On cherche $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0194}{0{,}0292} = \frac{97}{146} \approx 0{,}664$. Parmi les adolescents testés positifs, environ 66,4 % ont la carence. Un tiers environ des tests positifs sont donc des faux positifs, malgré une spécificité de 99 %.

(f) Un faux négatif est un malade testé négatif : $P(M \cap \overline{T}) = 0{,}02 \times (1 - 0{,}97) = 0{,}02 \times 0{,}03 = 0{,}0006$.

Ex. 23 ★☆☆ **Contrôle qualité : pièce rejetée**

(a) $10\,000 \times 0{,}03 = 300$ capteurs défectueux.

(b) $300 \times 0{,}96 = 288$ capteurs défectueux rejetés.

(c) Il y a $10\,000 - 300 = 9\,700$ capteurs conformes, donc $9\,700 \times 0{,}05 = 485$ capteurs conformes rejetés.

(d)

	Rejeté	**Accepté**	**Total**
Défectueux	288	12	300
Conforme	485	9\,215	9\,700
Total	773	9\,227	10\,000

Il y a $288 + 485 = 773$ capteurs rejetés.

(e) On note D « défectueux » et R « rejeté ».
$P_R(D) = \frac{288}{773} \approx 0{,}373$. Parmi les capteurs rejetés, environ 37,3 % seulement sont défectueux.

(f) $P_{\overline{R}}(\overline{D}) = \frac{9\,215}{9\,227} \approx 0{,}999$. Un capteur accepté est presque toujours conforme.

Ex. 24 ★★☆ **Contrôle antidopage : parmi les positifs**

(a) Premier niveau : $P(D) = 0{,}004$ et $P(\overline{D}) = 0{,}996$.
Second niveau : $P_D(T) = 0{,}98$, $P_D(\overline{T}) = 0{,}02$, $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$, $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0{,}97$.

(b) $\{D, \overline{D}\}$ est une partition. Par la formule des probabilités totales : $P(T) = 0{,}004 \times 0{,}98 + 0{,}996 \times 0{,}03 = 0{,}00392 + 0{,}02988 = 0{,}0338$.

(c) Non. 0,98 est $P_D(T)$. On cherche $P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00392}{0{,}0338} \approx 0{,}116$. Parmi les athlètes contrôlés positifs, environ 11,6 % seulement sont dopés.

Ex. 24 (suite)

(d) $P(\overline{T}) = 1 - 0{,}0338 = 0{,}9662$ et $P(\overline{D} \cap \overline{T}) = 0{,}996 \times 0{,}97 = 0{,}96612$.
Donc $P_{\overline{T}}(\overline{D}) = \frac{0{,}96612}{0{,}9662} \approx 0{,}9999$. Parmi les athlètes contrôlés négatifs, presque tous sont propres.

(e) $\frac{0{,}02988}{0{,}00392} \approx 7{,}62$. Le dopage est rare, alors les faux positifs (athlètes propres testés positifs) sont environ 7,6 fois plus nombreux que les vrais positifs. Un test positif seul ne suffit donc pas pour conclure.

Ex. 25 ★★☆ Scanner à bagages : arrondir à la fin

(a) $P(O) = 0{,}05$; $P_O(S) = 0{,}96$; $P_{\overline{O}}(S) = 0{,}02$.

(b) $\{O, \overline{O}\}$ est une partition. Par la formule des probabilités totales : $P(S) = 0{,}05 \times 0{,}96 + 0{,}95 \times 0{,}02 = 0{,}048 + 0{,}019 = 0{,}067$.

(c) $P_S(O) = \frac{P(O \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}048}{0{,}067} = \frac{48}{67} \approx 0{,}716$. Inès a arrondi une étape intermédiaire, et l'écart passe de 0,003 sur $P(S)$ à 0,03 sur le quotient. On n'arrondit que le résultat final.

(d)

	Signalé	Non signalé	Total
Objet interdit	480	20	500
Sans objet	190	9\,310	9\,500
Total	670	9\,330	10\,000

On trouve $\frac{480}{670} \approx 0{,}716$: le résultat est confirmé.

(e) $P_{\overline{S}}(O) = \frac{20}{9\,330} \approx 0{,}002$. Parmi les bagages non signalés, environ 0,2 % contiennent un objet interdit : ce sont les faux négatifs.

Ex. 26 ★★★ Autotest : quand la prévalence change

(a) Données : $P(M) = p$, la sensibilité donne $P_M(T) = 0{,}99$ et la spécificité donne $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}97$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$. Comme $\{M, \overline{M}\}$ est une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne $P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}99p + 0{,}03(1-p) = 0{,}96p + 0{,}03$.

(b) Chemin : $P(M \cap T) = 0{,}005 \times 0{,}99 = 0{,}00495$. Total : $P(T) = 0{,}96 \times 0{,}005 + 0{,}03 = 0{,}0348$. Quotient : $P_T(M) = \frac{0{,}00495}{0{,}0348} = \frac{33}{232} \approx 0{,}142$. Parmi les personnes testées positives, environ 14 % seulement sont infectées, alors que $P_M(T) = 0{,}99$. L'infection est rare, donc les faux positifs ($\overline{M} \cap T$, de probabilité $0{,}995 \times 0{,}03 = 0{,}02985$) sont environ six fois plus nombreux que les vrais positifs. Remarque : si on arrondit $P(T)$ à 0,035 avant de diviser, on trouve 0,141, ce qui est faux.

Ex. 26 (suite)

(c) On a $P_T(M) = \frac{0{,}99p}{0{,}96p + 0{,}03}$ avec $P(T) > 0$.
Donc $P_T(M) \geqslant 0{,}5 \iff 0{,}99p \geqslant 0{,}48p + 0{,}015 \iff 0{,}51p \geqslant 0{,}015 \iff p \geqslant \frac{1}{34}$. Comme $p \leqslant 1$, la condition est $\frac{1}{34} \leqslant p \leqslant 1$, avec $\frac{1}{34} \approx 0{,}029$. Il faut qu'environ 3 % de la population au moins soit infectée pour qu'un autotest positif indique plus d'une fois sur deux une vraie infection.

(d) D'après la question 1 : $0{,}96p + 0{,}03 = 0{,}126 \iff 0{,}96p = 0{,}096 \iff p = 0{,}1$, qui est bien dans $[0;1]$. Chemin : $P(M \cap T) = 0{,}1 \times 0{,}99 = 0{,}099$. Quotient : $P_T(M) = \frac{0{,}099}{0{,}126} = \frac{11}{14} \approx 0{,}786$. Parmi les personnes testées positives, environ 78,6 % sont infectées, contre 14,2 % hors épidémie. Le test n'a pas changé : c'est la prévalence qui change la valeur d'un autotest positif. On retrouve aussi que $0{,}1 \geqslant \frac{1}{34}$, comme l'annonce la question 3.

Ex. 27 ★★★ Filtre anti-spam : trois sources de messages

(a) Mathis a tort : sa moyenne simple des trois taux donne le même poids aux trois sources, alors qu'elles ne représentent pas la même part des messages. Les événements C, L, I forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = 0{,}6 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}006 + 0{,}012 + 0{,}03 = 0{,}048$.

(b) On cherche $P_S(I)$. Chemin : $P(I \cap S) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$. Quotient : $P_S(I) = \frac{0{,}03}{0{,}048} = \frac{5}{8} = 0{,}625$. Parmi les spams, 62,5 % viennent d'inconnus. La valeur 0,30 est $P_I(S)$: c'est la proportion de spams parmi les messages d'inconnus. Ici on cherche la proportion de messages d'inconnus parmi les spams, et ce n'est pas la même population.

(c) On a $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}048 = 0{,}952$ et $P_{\overline{S}}(F) = 0{,}01$, donc $P(\overline{S} \cap F) = 0{,}952 \times 0{,}01 = 0{,}00952$. Par ailleurs, $P(S \cap F) = 0{,}048 \times 0{,}98 = 0{,}04704$. Comme $\{S, \overline{S}\}$ est une partition, la formule des probabilités totales donne $P(F) = 0{,}04704 + 0{,}00952 = 0{,}05656$.

(d) $P_F(S) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}04704}{0{,}05656} = \frac{84}{101} \approx 0{,}832$. Parmi les messages classés indésirables, environ 83,2 % sont de vrais spams. La proportion de faux positifs est $P_F(\overline{S}) = 1 - \frac{84}{101} = \frac{17}{101} \approx 0{,}168$: environ un message sur six de ce dossier n'est pas un spam.

Ex. 28 ★★★ **Dépistage en élevage : du tableau aux épreuves répétées**

(a) Porteurs : $10\,000 \times 0{,}04 = 400$. Parmi eux, $400 \times 0{,}95 = 380$ sont positifs et 20 négatifs. Non porteurs : 9 600. Parmi eux, $9\,600 \times 0{,}96 = 9\,216$ sont négatifs (spécificité) et 384 positifs.

	T	$\bar{\text{T}}$	Total
M	380	20	400
$\bar{\text{M}}$	384	9\,216	9\,600
Total	764	9\,236	10\,000

(b) Il y a 380 vrais positifs ($M \cap T$) et 384 faux positifs ($\overline{M} \cap T$). Les faux positifs sont plus nombreux que les vrais : moins de la moitié des bovins positifs sont porteurs. Léa a donc tort : 95 % est $P_M(T)$, la proportion de positifs parmi les porteurs, et non $P_T(M)$, la proportion de porteurs parmi les positifs. La maladie est rare, et les 4 % de faux positifs portent sur 9 600 bovins non porteurs.

(c) Chemin : $P(M \cap T) = 0{,}04 \times 0{,}95 = 0{,}038$. Total, avec la partition $\{M, \overline{M}\}$ et $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$: $P(T) = 0{,}038 + 0{,}96 \times 0{,}04 = 0{,}038 + 0{,}0384 = 0{,}0764$. Quotient : $P_T(M) = \frac{0{,}038}{0{,}0764} = \frac{95}{191} \approx 0{,}497$. Parmi les bovins testés positifs, environ 49,7 % sont porteurs. On retrouve $\frac{380}{764}$, le résultat donné par le tableau.

(d) On note $p = \frac{95}{191}$ et on garde cette valeur exacte. Le contraire de « au moins un non porteur » est « les trois sont porteurs ». Il correspond à un seul chemin de l'arbre à $2^3 = 8$ chemins, de probabilité p^3 par indépendance. La probabilité cherchée vaut donc $1 - \left(\frac{95}{191}\right)^3 \approx 1 - 0{,}123 \approx 0{,}877$.

(e) Trois chemins comportent exactement un succès : $S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}S$. Chacun a pour probabilité $p(1-p)^2$ avec $1 - p = \frac{96}{191}$. La probabilité cherchée vaut donc $3 \times \frac{95}{191} \times \left(\frac{96}{191}\right)^2 \approx 0{,}377$.

5. *Événements indépendants et événements contraires*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : indépendants ou pas ?**

(a) $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1 = P(A \cap B)$: les deux nombres sont égaux, donc A et B sont indépendants.

(b) $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$, alors que $P(A \cap B) = 0{,}12$. Comme $0{,}15 \neq 0{,}12$, A et B ne sont pas indépendants.

Ex. 29 (suite)

(c) Incompatibles : $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cap B) = 0$. Or $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}35 = 0{,}21 \neq 0$. Ils ne sont pas indépendants : « incompatibles » ne veut pas dire « indépendants ».

(d) $P(A) \neq 0$ et $P_A(B) = P(B) = 0{,}45$, donc A et B sont indépendants. Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times 0{,}45 = 0{,}315$.

(e) Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}65 = 0{,}13$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}65 - 0{,}13 = 0{,}72$.

(f) On veut $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, soit $0{,}8 \times P(B) = 0{,}28$, donc $P(B) = \frac{0{,}28}{0{,}8} = 0{,}35$. Cette valeur est bien dans $[0\,;1]$.

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : un club d'athlétisme**

(a) $J \cap \overline{C}$: $150 - 54 = 96$; total $\overline{J}$: $250 - 150 = 100$; $\overline{J} \cap C$: $90 - 54 = 36$; $\overline{J} \cap \overline{C}$: $100 - 36 = 64$; total $\overline{C}$: $250 - 90 = 160$.

	C	$\bar{\text{C}}$	Total
J	54	96	150
$\bar{\text{J}}$	36	64	100
Total	90	160	250

(b) $P(J) = \frac{150}{250} = 0{,}6$; $P(C) = \frac{90}{250} = 0{,}36$; $P(J \cap C) = \frac{54}{250} = 0{,}216$.

(c) $P(J) \times P(C) = 0{,}6 \times 0{,}36 = 0{,}216 = P(J \cap C)$: J et C sont indépendants.

(d) $\overline{J} \cap \overline{C}$ = « l'adhérent a 18 ans ou plus et ne fait pas de compétition » (ni J ni C). $P(\overline{J} \cap \overline{C}) = \frac{64}{250} = 0{,}256$.

(e) $P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C) = \frac{150+90-54}{250} = \frac{186}{250} = 0{,}744$.

(f) $P_{\overline{J}}(C) = \frac{36}{100} = 0{,}36 = P(C)$: parmi les adhérents de 18 ans ou plus, la part de compétiteurs est la même que dans tout le club. C'est logique, car $\overline{J}$ et C sont indépendants comme J et C.

Ex. 31 ★★☆ **Train puis bus : les événements contraires**

(a) $\{B\,;\overline{B}\}$ est une partition de Ω, donc $P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap \overline{B})$, soit $P(T \cap \overline{B}) = P(T) - P(T \cap B)$. Par indépendance de T et B : $P(T \cap \overline{B}) = P(T) - P(T) \times P(B) = P(T) \times (1 - P(B)) = P(T) \times P(\overline{B})$.
Donc T et $\overline{B}$ sont indépendants.

Ex. 31 **(suite)**

(b) Événement $T \cap \overline{B}$. D'après la question précédente : $P(T \cap \overline{B}) = P(T) \times P(\overline{B}) = 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}18$.

(c) Événement $\overline{T} \cap \overline{B}$. Avec la partition $\{T\,;\overline{T}\}$: $P(\overline{T} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(T \cap \overline{B}) = 0{,}2 - 0{,}18 = 0{,}02$. C'est bien $P(\overline{T}) \times P(\overline{B}) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$: $\overline{T}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(d) $1{,}7 > 1$: ce n'est pas une probabilité. T et B peuvent se produire ensemble, donc $P(T \cup B) = P(T) + P(B) - P(T \cap B) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}98$. Autre méthode : $1 - P(\overline{T} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Ex. 32 ★★☆ **La roue de loterie**

(a) $A = \{3; 6; 9; 12\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, $A \cap B = \{6; 12\}$. Issues équiprobables : $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Or $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$: A et B sont indépendants.

(b) $D = \{10; 11; 12\}$, $B \cap D = \{10; 12\}$: $P(B \cap D) = \frac{1}{6}$ et $P(B) \times P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Comme $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}$, ils ne sont pas indépendants. $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$: savoir que le nombre est au moins 10 rend « pair » plus probable.

(c) Non. $A \cap E = \varnothing$: A et E sont incompatibles, donc $P(A \cap E) = 0$. Or $P(A) \times P(E) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \neq 0$. Ils ne sont pas indépendants : il confond « incompatibles » et « indépendants ».

(d) $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$. Vérification : $B \cup D = \{2; 4; 6; 8; 10; 11; 12\}$, soit 7 issues sur 12.

Ex. 33 ★★★ **Deux défauts sur une trottinette**

(a) « Au moins un des deux défauts » est $F \cup E$, donc $P(F \cup E) = 0{,}088$. « Aucun des deux défauts » est $\overline{F} \cap \overline{E}$: c'est l'événement contraire de $F \cup E$. Donc $P(\overline{F} \cap \overline{E}) = 1 - 0{,}088 = 0{,}912$. Parmi les trottinettes, 91,2 % n'ont aucun des deux défauts.

(b) Si F et E sont incompatibles, $P(F \cap E) = 0$, donc $P(F \cup E) = P(F) + P(E)$. On obtient $0{,}05 + x = 0{,}088$, d'où $x = 0{,}038$.

(c) Si F et E sont indépendants, $P(F \cap E) = P(F) \times P(E) = 0{,}05x$. Donc $P(F \cup E) = 0{,}05 + x - 0{,}05x = 0{,}05 + 0{,}95x$. L'équation $0{,}05 + 0{,}95x = 0{,}088$ donne $x = \frac{0{,}038}{0{,}95} = 0{,}04$, qui est bien dans $[0\,;1]$. Parmi les trottinettes, 4 % ont un défaut d'éclairage.

Ex. 33 **(suite)**

(d) $P(\overline{F}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ et $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$, donc $P(\overline{F}) \times P(\overline{E}) = 0{,}95 \times 0{,}96 = 0{,}912$. C'est exactement $P(\overline{F} \cap \overline{E})$, trouvé à la première question. On retrouve la propriété du cours : quand F et E sont indépendants, $\overline{F}$ et $\overline{E}$ le sont aussi.

(e) Non. Si F et E sont indépendants, $P(F \cap E) = 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}002$, qui n'est pas nul : il existe des trottinettes qui ont les deux défauts, donc F et E ne sont pas incompatibles. Plus généralement, comme $P(F) > 0$, on a $0{,}05x = 0$ seulement si $x = 0$. Mais alors $P(F \cup E)$ vaudrait 0,05, et non 0,088. Indépendants et incompatibles, ce n'est pas la même chose.

Ex. 34 ★★★ **Grippe et vaccination**

(a) Ligne V : $480 - 24 = 456$. Colonne G : $156 - 24 = 132$. Ligne $\overline{V}$: $132 + 588 = 720$, et on vérifie que $1200 - 480 = 720$. Total de $\overline{G}$: $1200 - 156 = 1044$.

	G	**$\bar{\text{G}}$**	**Total**
V	24	456	480
$\bar{\text{V}}$	132	588	720
Total	156	1044	1200

(b) $P(V) = \frac{480}{1200} = \frac{2}{5}$, $P(G) = \frac{156}{1200} = \frac{13}{100}$ et $P(V \cap G) = \frac{24}{1200} = \frac{1}{50}$. Or $P(V) \times P(G) = \frac{2}{5} \times \frac{13}{100} = \frac{13}{250} = 0{,}052$, alors que $P(V \cap G) = \frac{1}{50} = 0{,}02$. Comme $0{,}02 \neq 0{,}052$, V et G ne sont pas indépendants.

(c) $P_V(G) = \frac{P(V \cap G)}{P(V)} = \frac{24}{480} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ et $P_{\overline{V}}(G) = \frac{132}{720} = \frac{11}{60} \approx 0{,}183$. Parmi les vaccinés, 5 % ont eu la grippe. Parmi les non-vaccinés, environ 18,3 % l'ont eue. Savoir que l'habitant est vacciné fait baisser la probabilité qu'il ait eu la grippe : cela confirme que V et G ne sont pas indépendants.

(d) « Ni vacciné ni malade » s'écrit $\overline{V} \cap \overline{G}$. Sami utilise $P(\overline{V} \cap \overline{G}) = P(\overline{V}) \times P(\overline{G})$, ce qui n'est vrai que si $\overline{V}$ et $\overline{G}$ sont indépendants. Or ils ne le sont pas : s'ils l'étaient, V et G le seraient aussi, ce qui contredit la question 2. Lecture du tableau : $P(\overline{V} \cap \overline{G}) = \frac{588}{1200} = \frac{49}{100} = 0{,}49$, alors que $\frac{3}{5} \times \frac{87}{100} = \frac{261}{500} = 0{,}522$. Parmi les habitants, 49 % ne sont ni vaccinés ni malades.

(e) Comme $P(V) \neq 0$, V et G sont indépendants si et seulement si $P(G) = P_V(G) = \frac{1}{20}$. Il faudrait donc $\frac{1}{20} \times 1200 = 60$ malades au total, c'est-à-dire $60 - 24 = 36$ non-vaccinés malades. Vérification : $P(V \cap G) = \frac{24}{1200} = 0{,}02$ et $P(V) \times P(G) = 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$.

Ex. 35 ★★★ **Démonstration puis jeu de 32 cartes**

(a) $\overline{A} \cap \overline{B}$ est l'événement contraire de $A \cup B$. Donc $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$. Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. On obtient $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$. Donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(b) $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. L'événement $C \cap R$ ne contient qu'une carte, le roi de cœur, donc $P(C \cap R) = \frac{1}{32}$. Or $P(C) \times P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Les deux nombres sont égaux : C et R sont indépendants.

(c) « Ni cœur ni roi » s'écrit $\overline{C} \cap \overline{R}$. Comme C et R sont indépendants, la première question montre que $\overline{C}$ et $\overline{R}$ le sont aussi. Donc $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{32} \approx 0{,}656$. En comptant : il y a $8 + 4 - 1 = 11$ cartes qui sont un cœur ou un roi (le roi de cœur n'est compté qu'une fois). Il reste $32 - 11 = 21$ cartes, et on retrouve $\frac{21}{32}$.

(d) $P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. Tout roi est une figure, donc $R \cap F = R$ et $P(R \cap F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Alors $P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$. Or $P(R) = \frac{1}{8}$, et $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{8}$: R et F ne sont pas indépendants. Savoir que la carte est une figure rend le roi plus probable.

(e) Avec 31 cartes équiprobables, il reste 8 cœurs, 4 rois et le roi de cœur. Donc $P(C) = \frac{8}{31}$, $P(R) = \frac{4}{31}$ et $P(C \cap R) = \frac{1}{31} = \frac{31}{961}$. Or $P(C) \times P(R) = \frac{32}{961}$. Comme $\frac{32}{961} \neq \frac{31}{961}$, C et R ne sont plus indépendants. Les arrondis 0,033 et 0,032 sont proches : seule la comparaison exacte permet de conclure. L'indépendance dépend de l'univers choisi.

6. *Épreuves indépendantes, épreuves de Bernoulli répétées ($n \leqslant 4$)*

Ex. 36 ★☆☆ **Lancers francs d'Inès**

(a) Le succès S est « le lancer est réussi », avec $p = 0{,}7$. L'échec $\overline{S}$ a pour probabilité $1 - p = 0{,}3$.

(b) On répète $n = 3$ fois l'épreuve, donc l'arbre compte $2^3 = 8$ chemins.

(c) Le chemin $SS\overline{S}$ comporte 2 succès et 1 échec : $0{,}7^2 \times 0{,}3 = 0{,}147$.

(d) Il n'y a qu'un seul chemin, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $0{,}3^3 = 0{,}027$.

(e) Il y a 3 chemins : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$.

Ex. 36 (suite)

(f) Ces 3 chemins sont incompatibles et ont chacun pour probabilité 0,147. On obtient $3 \times 0{,}147 = 0{,}441$.

(g) Il y a 3 chemins à un succès ($S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{S}S$), chacun de probabilité $0{,}7 \times 0{,}3^2 = 0{,}063$. On obtient $3 \times 0{,}063 = 0{,}189$.

(h) Trois succès : un seul chemin, $0{,}7^3 = 0{,}343$. Contrôle : $0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1$.

Ex. 37 ★☆☆ **Bus puis tram**

(a) Les réseaux n'ont aucun lien : le retard du bus n'influe pas sur celui du tram. Les épreuves sont donc indépendantes. Au second niveau de l'arbre, on a les mêmes probabilités quel que soit le premier niveau : $P_B(T) = P_{\overline{B}}(T) = P(T) = 0{,}1$.

(b) Par indépendance, $P(B \cap T) = 0{,}15 \times 0{,}1 = 0{,}015$, $P(B \cap \overline{T}) = 0{,}15 \times 0{,}9 = 0{,}135$, $P(\overline{B} \cap T) = 0{,}85 \times 0{,}1 = 0{,}085$ et $P(\overline{B} \cap \overline{T}) = 0{,}85 \times 0{,}9 = 0{,}765$.

	T	**$\overline{\text{T}}$**	**Total**
B	0,015	0,135	0,15
$\overline{\text{B}}$	0,085	0,765	0,85
Total	0,1	0,9	1

(c) Une issue est un couple, et l'ordre compte : il y a donc deux cas, $(B;\overline{T})$ et $(\overline{B};T)$. On obtient $0{,}135 + 0{,}085 = 0{,}22$.

(d) C'est l'événement contraire de « aucun retard » : $1 - P(\overline{B} \cap \overline{T}) = 1 - 0{,}765 = 0{,}235$.

(e) $0{,}015 + 0{,}135 + 0{,}085 + 0{,}765 = 1$.

(f) Non. Les deux épreuves n'ont pas le même paramètre (0,15 pour le bus et 0,1 pour le tram). Ce n'est donc pas la répétition d'une même épreuve de Bernoulli.

Ex. 38 ★★☆ **Contrôle de capteurs**

(a) Chaque prélèvement a deux issues. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc ils sont indépendants, et la probabilité reste la même à chaque tirage. Le succès S est « le capteur est défectueux », avec $p = 0{,}05$ et $1 - p = 0{,}95$.

(b) Un seul chemin, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $0{,}95^4 = 0{,}81450625 \approx 0{,}8145$. Parmi les prélèvements de 4 capteurs, environ 81,45 % ne contiennent aucun capteur défectueux.

Ex. 38 **(suite)**

(c) Il y a 4 chemins à un succès (le succès est à la 1re, 2e, 3e ou 4e place). Chacun a pour probabilité $0{,}05 \times 0{,}95^3$. On obtient $4 \times 0{,}05 \times 0{,}95^3 = 0{,}171475 \approx 0{,}1715$. Parmi les prélèvements de 4 capteurs, environ 17,15 % contiennent exactement un capteur défectueux.

(d) Non : Hugo n'a calculé qu'un seul chemin. Il y a 6 chemins à deux succès sur quatre ($SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}SS$). On obtient $6 \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^2 = 0{,}0135375 \approx 0{,}0135$. Parmi les prélèvements, environ 1,35 % contiennent exactement deux capteurs défectueux.

(e) « Au plus deux » est le contraire de « trois ou quatre ». Trois succès : 4 chemins, soit $4 \times 0{,}05^3 \times 0{,}95 = 0{,}000475$. Quatre succès : $0{,}05^4 = 0{,}00000625$. Donc $1 - 0{,}000475 - 0{,}00000625 = 0{,}99951875 \approx 0{,}9995$. Parmi les prélèvements, environ 99,95 % contiennent au plus deux capteurs défectueux.

Ex. 39 ★★☆ **Le stand de Nora**

(a) Le succès S est « Nora gagne la partie », de probabilité p. L'échec a pour probabilité $1-p$. « Aucune partie gagnée » correspond au seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}$, de probabilité $(1-p)^2$.

(b) Non : Malik a appliqué p à l'échec. Il faut résoudre $(1-p)^2 = 0{,}64$. Comme $1-p \geqslant 0$, on a $1-p = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, donc $p = 0{,}2$.

(c) Deux chemins, $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$, chacun de probabilité $0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$. On obtient $2 \times 0{,}16 = 0{,}32$. Parmi les séries de deux parties, 32 % donnent une et une seule victoire.

(d) Pour n parties, $P(\text{au moins un gain}) = 1 - 0{,}8^n$. Avec $n=1$: 0,2 ; $n=2$: 0,36 ; $n=3$: 0,488 ; $n=4$: 0,5904. Il faut donc jouer au moins 4 parties.

Ex. 40 ★★★ **Tomate et basilic**

(a) Les pots sont séparés : la germination d'une graine n'influe pas sur l'autre. Les deux épreuves sont donc indépendantes, et au second niveau de l'arbre $P_T(B) = P_{\overline{T}}(B) = q$. « Une et une seule » est réalisé par DEUX issues incompatibles, $(T;\overline{B})$ et $(\overline{T};B)$: $P = 0{,}8(1-q) + 0{,}2q = 0{,}8 - 0{,}6q$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) $0{,}8 - 0{,}6q = 0{,}38$ donne $0{,}6q = 0{,}42$, soit $q = 0{,}7$, qui est bien dans $[0;1]$. « Au moins une graine germe » est le contraire de $\overline{T} \cap \overline{B}$. Par indépendance, $P = 1 - 0{,}2 \times 0{,}3 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$. Parmi les semis de Capucine, 94 % donnent au moins une pousse.

(c) $P(U) = 0{,}38$ et $P(T \cap U) = P(T \cap \overline{B}) = 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24$.
Donc $P_U(T) = \frac{P(T\cap U)}{P(U)} = \frac{0{,}24}{0{,}38} = \frac{12}{19} \approx 0{,}632$. Parmi les semis où une seule graine germe, environ 63,2 % sont ceux où c'est la tomate.

(d) Cette fois, c'est la même épreuve de Bernoulli (succès S : « la graine de tomate germe », $p = 0{,}8$) répétée 2 fois de façon indépendante. Il y a 2 chemins, $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$, chacun de probabilité $0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$, donc $P = 0{,}32 \neq 0{,}38$. La valeur 0,38 venait de deux graines de probabilités différentes (0,8 et 0,7) : ce n'était pas une épreuve de Bernoulli répétée.

Ex. 41 ★★★ **Sondage sur la piste cyclable**

(a) Même épreuve de Bernoulli (succès S, $p = 0{,}6$) répétée 4 fois de façon indépendante : l'arbre a $2^4 = 16$ chemins. Deux succès : $SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}SS$, soit 6 chemins.

(b) Erreur 1 : elle a pris 0,6 pour l'échec. Un chemin à 1 succès et 3 échecs vaut $0{,}6 \times 0{,}4^3 = 0{,}0384$. Erreur 2 : elle a compté un seul chemin, alors que le succès peut être à 4 places (4 chemins). Bon résultat : $4 \times 0{,}0384 = 0{,}1536$.

(c) 0 succès : $0{,}4^4 = 0{,}0256$. 2 succès : $6 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^2 = 0{,}3456$. 3 succès : 4 chemins, $4 \times 0{,}6^3 \times 0{,}4 = 0{,}3456$. 4 succès : $0{,}6^4 = 0{,}1296$. Contrôle : $0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}3456 + 0{,}3456 + 0{,}1296 = 1$.

(d) $P(\text{au moins 3 favorables}) = 0{,}3456 + 0{,}1296 = 0{,}4752$. Le projet n'est lancé que dans environ 47,5 % des sondages de 4 personnes. Pourtant, 60 % des habitants y sont favorables : un sondage de 4 personnes reflète mal l'opinion de la ville.

Ex. 42 ★★★ **Les lunettes à l'infirmerie**

(a) Succès S : « l'élève porte des lunettes », $p = 0{,}25$. On répète 3 fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (tirages avec remise). Deux succès : 3 chemins, chacun de probabilité $0{,}25^2 \times 0{,}75 = 0{,}046875$. $P = 3 \times 0{,}046875 = 0{,}140625$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) « Au moins un » est le contraire de « aucun », réalisé par le seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$.
Donc $P = 1 - 0{,}75^4 = 1 - 0{,}31640625 = 0{,}68359375 \approx 0{,}684$. Parmi les groupes de 4 élèves, environ 68,4 % comptent au moins un porteur de lunettes.

(c) « Un et un seul » est réalisé par deux chemins, $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$, chacun de probabilité $p(1-p)$.
Donc $2p(1-p) = 0{,}42$, soit $p - p^2 = 0{,}21$, c'est-à-dire $p^2 - p + 0{,}21 = 0$.

(d) $\Delta = 1 - 4 \times 0{,}21 = 0{,}16$, donc $p = \frac{1-0{,}4}{2} = 0{,}3$ ou $p = \frac{1+0{,}4}{2} = 0{,}7$. Les deux sont dans $[0;1]$, mais $p < 0{,}5$: $p = 0{,}3$. Contrôle : $2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

(e) « Au plus un » = « aucun » ou « exactement un ».
Aucun : $0{,}7^3 = 0{,}343$. Exactement un : 3 chemins, $3 \times 0{,}3 \times 0{,}7^2 = 0{,}441$. $P = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784$.
Parmi les groupes de trois élèves de ce lycée, 78,4 % comptent au plus un porteur de lunettes.

7. *Au moins un, au plus : paramètre inconnu*

Ex. 43 ★☆☆ **Aucun, au moins un, au plus un**

(a) Le contraire de « au moins un succès », c'est « aucun succès ». Il correspond au seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$.

(b) Aucun succès : un seul chemin, $\overline{S}\,\overline{S}$, de probabilité $(1-0{,}1)^2 = 0{,}9^2 = 0{,}81$.

(c) Par le contraire : $P(\text{au moins un succès}) = 1 - 0{,}75^3 = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125$.

(d) Non : $4 \times 0{,}35 = 1{,}4 > 1$, ce n'est pas une probabilité.
On passe par le contraire « aucune graine ne germe », le seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $P(\text{au moins une germe}) = 1 - 0{,}65^4 = 1 - 0{,}17850625 = 0{,}82149375$.

(e) Au plus un succès = 0 ou 1 succès. Aucun succès : $0{,}9^3 = 0{,}729$. Exactement un succès : 3 chemins, chacun de probabilité $0{,}1 \times 0{,}9^2 = 0{,}081$, soit 0,243. Au total : $0{,}729 + 0{,}243 = 0{,}972$.

(f) « Au moins deux » est le contraire de « au plus un » : $P = 1 - 0{,}972 = 0{,}028$.

Ex. 44 ★☆☆ **Retrouver le paramètre p**

(a) $(1-p)^2 = 0{,}36$. Comme $1 - p \geqslant 0$: $1 - p = 0{,}6$, d'où $p = 0{,}4$.

(b) $1 - (1-p)^2 = 0{,}91$, donc $(1-p)^2 = 0{,}09$. Comme $1 - p \geqslant 0$: $1 - p = 0{,}3$, d'où $p = 0{,}7$.

Ex. 44 **(suite)**

(c) $(1-p)^4 = 0{,}0016$, donc $(1-p)^2 = \sqrt{0{,}0016} = 0{,}04$ (un carré est positif), puis $1 - p = 0{,}2$ car $1 - p \geqslant 0$. D'où $p = 0{,}8$.

(d) Non : une probabilité vérifie $0 \leqslant p \leqslant 1$, donc $1 - p \geqslant 0$ et on rejette $1 - p = -0{,}9$. La valeur $p = 1{,}9 > 1$ est impossible. Seule solution : $p = 0{,}1$.

Ex. 45 ★★☆ **Trois machines dans un atelier**

(a) Pour chaque machine, il y a deux issues : succès S « la machine tombe en panne », de probabilité $p = 0{,}04$, ou $\overline{S}$. Les 3 machines sont identiques et indépendantes : on répète 3 fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre 0,04.

(b) Le contraire est « aucune panne », le chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$, de probabilité $0{,}96^3 = 0{,}884736$.
Donc $P(\text{au moins une panne}) = 1 - 0{,}884736 = 0{,}115264 \approx 0{,}115$.

(c) Trois chemins contiennent un seul S : $S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}S$, chacun de probabilité $0{,}04 \times 0{,}96^2 = 0{,}036864$.
Donc $P = 3 \times 0{,}036864 = 0{,}110592 \approx 0{,}111$.

(d) Au plus une panne : $0{,}884736 + 0{,}110592 = 0{,}995328$.
Au moins deux pannes, c'est le contraire : $P = 1 - 0{,}995328 = 0{,}004672 \approx 0{,}005$. Parmi 1\,000 journées, on peut s'attendre à environ 5 journées avec au moins deux machines en panne.

Ex. 46 ★★☆ **Les penalties d'Inès**

(a) Les tirs sont indépendants, on multiplie le long de chaque chemin :

Chemin	RR	RR̄	R̄R	R̄R̄
Probabilité	p^2	$p(1-p)$	$(1-p)p$	$(1-p)^2$

(b) Le contraire de « rater au moins un tir » est « réussir les deux », le seul chemin RR, de probabilité p^2.
Donc $1 - p^2 = 0{,}3916$, soit $p^2 = 0{,}6084$. On obtient $p = 0{,}78$ ou $p = -0{,}78$. Comme $p \geqslant 0$, on garde $p = 0{,}78$.

(c) Exactement un tir réussi : chemins $R\overline{R}$ et $\overline{R}R$, chacun de probabilité $0{,}78 \times 0{,}22 = 0{,}1716$.
Donc $P = 2 \times 0{,}1716 = 0{,}3432 \approx 0{,}343$.

(d) Tout réussir : le seul chemin RRR, de probabilité $0{,}78^3 = 0{,}474552 \approx 0{,}475$. « Rater au moins un tir » est son contraire : $P = 1 - 0{,}474552 = 0{,}525448 \approx 0{,}525$.
Parmi les séries de 3 tirs, environ 52,5 % comptent au moins un penalty raté, alors que chaque tir est réussi dans 78 % des cas.

Ex. 47 ★★★ **Les tickets à gratter de Léo**

(a) On répète 4 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}15$. Le contraire de « au moins un gagnant » est « aucun gagnant ». Cet événement correspond au seul chemin $\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{G}$, de probabilité $0{,}85^4 = 0{,}52200625$.
Donc $P(\text{au moins un gagnant}) = 1 - 0{,}85^4 = 0{,}47799375 \approx 0{,}478$.

(b) « Au plus un » signifie 0 ou 1 gagnant. Aucun gagnant : $0{,}85^4 = 0{,}52200625$. Exactement un gagnant : 4 chemins, chacun de probabilité $0{,}15 \times 0{,}85^3 = 0{,}09211875$, soit $4 \times 0{,}09211875 = 0{,}368475$.
Donc $P(\text{au plus un}) = 0{,}52200625 + 0{,}368475 = 0{,}89048125 \approx 0{,}890$.

(c) « Au moins deux » est le contraire de « au plus un ».
Donc $P(\text{au moins deux}) = 1 - 0{,}89048125 = 0{,}10951875 \approx 0{,}110$. Parmi les achats de 4 tickets, environ 11 % comptent au moins deux tickets gagnants.

(d) Avec 2 tickets premium, on répète 2 fois une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,32. Au moins un gagnant, par le contraire « aucun » : $1 - 0{,}68^2 = 1 - 0{,}4624 = 0{,}5376 \approx 0{,}538 > 0{,}478$. Au moins deux gagnants : c'est le seul chemin GG, $0{,}32^2 = 0{,}1024 \approx 0{,}102 < 0{,}110$.
Pour avoir au moins un ticket gagnant, Léo a intérêt à prendre 2 tickets premium ; pour en avoir au moins deux, 4 tickets ordinaires sont préférables.

Ex. 48 ★★★ **Le bus de Nora**

(a) On répète 2 fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p, de façon identique et indépendante. Le contraire de « au moins un retard » est le chemin $\overline{R}\,\overline{R}$, de probabilité $(1-p)^2$.
Donc $1 - (1-p)^2 = 0{,}36$, c'est-à-dire $(1-p)^2 = 0{,}64$.
On obtient $1 - p = 0{,}8$ ou $1 - p = -0{,}8$. Comme $1 - p \geqslant 0$, on garde $1 - p = 0{,}8$, d'où $p = 0{,}2$.

(b) « Au moins deux » sur 3 jours signifie « deux » ou « trois » retards. Deux retards : 3 chemins ($RR\overline{R}$, $R\overline{R}R$, $\overline{R}RR$), chacun de probabilité $0{,}2^2 \times 0{,}8 = 0{,}032$, soit 0,096. Trois retards : $0{,}2^3 = 0{,}008$.
Donc $P = 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104$. Parmi les périodes de 3 jours, environ 10,4 % comptent au moins deux retards.

Ex. 48 **(suite)**

(c) Non. Les retards de différents jours peuvent se produire ensemble : on ne peut pas additionner leurs probabilités, et $3 \times 0{,}2 = 0{,}6$ est faux. Passons par le contraire « aucun retard » : $0{,}8^3 = 0{,}512$.
Donc $P(\text{au moins un retard}) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488 < 0{,}5$. Sur 3 jours, Nora a moins d'une chance sur deux de subir au moins un retard.

(d) On cherche $1 - 0{,}8^n > 0{,}5$, c'est-à-dire $0{,}8^n < 0{,}5$. Les essais donnent $0{,}8^1 = 0{,}8$, $0{,}8^2 = 0{,}64$, $0{,}8^3 = 0{,}512$ et $0{,}8^4 = 0{,}4096$. La première valeur inférieure à 0,5 est obtenue pour $n = 4$, avec $P(\text{au moins un retard}) = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904$. Il faut donc 4 jours au minimum.

Ex. 49 ★★★ **Le sondage téléphonique de Yanis**

(a) Deux chemins correspondent à exactement une acceptation : $A\overline{A}$ et $\overline{A}A$, chacun de probabilité $p(1-p)$. La probabilité cherchée vaut donc $2p(1-p)$. On obtient $2p(1-p) = 0{,}42$, c'est-à-dire $2p - 2p^2 = 0{,}42$, soit $p^2 - p + 0{,}21 = 0$.

(b) Le discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}21 = 0{,}16 = 0{,}4^2$. Les solutions sont $p = \frac{1-0{,}4}{2} = 0{,}3$ et $p = \frac{1+0{,}4}{2} = 0{,}7$. Elles sont toutes deux dans $[0\,;1]$: deux valeurs conviennent. On le vérifie :
$2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

(c) Les deux refusent : $(1-p)^2$. Les deux acceptent : p^2. La condition s'écrit $(1-p)^2 > p^2$, c'est-à-dire $1 - 2p > 0$, soit $p < 0{,}5$. On garde donc $p = 0{,}3$. On vérifie :
$0{,}7^2 = 0{,}49 > 0{,}3^2 = 0{,}09$.

(d) Avec $p = 0{,}3$ et 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes : aucune acceptation, $0{,}7^3 = 0{,}343$; une seule, 3 chemins, soit $3 \times 0{,}3 \times 0{,}7^2 = 0{,}441$; deux, 3 chemins, soit $3 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7 = 0{,}189$; trois, $0{,}3^3 = 0{,}027$.

Acceptations	**aucune**	**une seule**	**deux**	**trois**
Probabilité	0,343	0,441	0,189	0,027

Contrôle : ces quatre événements forment une partition de l'univers, et $0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}027 = 1$.

(e) « Au plus deux » est le contraire de « trois acceptent ».
Donc $P = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$. Parmi les séries de 3 appels, environ 97,3 % comptent au plus deux personnes qui acceptent de répondre.