# Arbres pondérés, probabilités conditionnelles et totales – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Probabilités conditionnelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

***Durée : environ 1 h.*** *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

**Les pièges de cette fiche**

- Une branche porte $P_A(B)$ ; le chemin qui y mène donne $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ : ne pas confondre les deux.
- Formule des probabilités totales : on écrit d'abord « … forment une partition de l'univers », puis on **pondère** chaque taux ; la moyenne simple des taux est fausse.
- $P_{\overline{A}}(B) \neq 1 - P_A(B)$ : ces deux nombres ne partent pas du même nœud.
- $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont pas égales : « parmi qui ? » décide du dénominateur.
- Une probabilité trouvée par une équation doit être entre 0 et 1 : sinon, les données sont incohérentes.
- Une partition : des événements deux à deux incompatibles qui couvrent tous les cas ; des catégories qui se chevauchent ne conviennent pas.

## Exercice 1 – Les formules de base ★

Utilise $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ou $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Écris la formule avant les nombres.

a) $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcule $P_A(B)$.

b) $P(A) = 0{,}35$ et $P_A(B) = 0{,}6$. Calcule $P(A \cap B)$.

c) $P(B) = \dfrac{3}{8}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$. Calcule $P_B(A)$.

d) $P(A \cap B) = 0{,}12$ et $P_A(B) = 0{,}3$. Calcule $P(A)$.

e) $P(A) = 0{,}7$ et $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$. Calcule $P(A \cap B)$.

f) $P(A) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0$. Calcule $P_A(B)$. Que peux-tu dire de $A$ et $B$ ?

g) $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}05$. Calcule $P_A(B)$, puis $P_B(A)$.

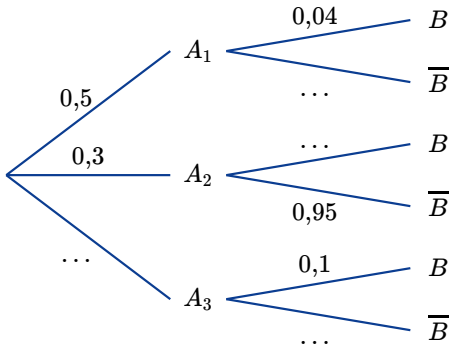
h) $P(A) = 0{,}8$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}2$. Calcule $P_A(B)$.

i) $P(\overline{A}) = \dfrac{2}{5}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{3}{10}$. Calcule $P_A(B)$.

## Exercice 2 – Un arbre à trois branches ★

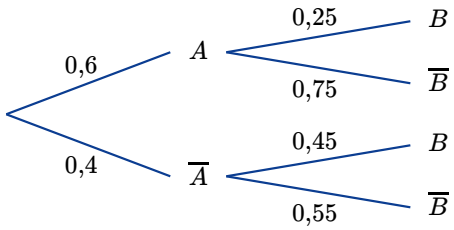
Sur l'arbre ci-contre, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ forment une partition de l'univers. Quatre probabilités ont été effacées.

1. Complète l'arbre. Quelle règle utilises-tu ?
2. Calcule $P(A_2 \cap B)$.
3. Calcule $P(B)$ en citant la formule utilisée.




## **Exercice 3** – De l'arbre au tableau ★

On donne l'arbre pondéré ci-contre.




1. Recopie et complète le tableau des probabilités : chaque case contient la probabilité de l'intersection de sa ligne et de sa colonne.

| | $B$ | $\overline{B}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $A$ | | | |
| $\overline{A}$ | | | |
| **Total** | | | 1 |

2. Lis $P(B)$ dans le tableau. Quelle formule as-tu appliquée sans le dire ?
3. Calcule $P_B(A)$. Arrondis au centième.

## **Exercice 4** – Le club de tennis ★★

Dans un club de tennis, 30 % des membres sont des enfants. 60 % des enfants prennent des cours collectifs, contre 15 % des adultes. On choisit un membre au hasard. $E$ : « c'est un enfant », $C$ : « il prend des cours collectifs ».

1. Construis l'arbre pondéré de la situation.
2. Calcule $P(E \cap C)$.
3. Calcule $P(C)$. Un camarade propose $\dfrac{0{,}6 + 0{,}15}{2}$ : pourquoi est-ce faux ?
4. Un membre prend des cours collectifs. Quelle est la probabilité que ce soit un enfant ? Arrondis au centième.

## **Exercice 5** – Trois façons de venir au travail ★★

Dans une entreprise, 55 % des salariés viennent en voiture ($V$), 30 % en transports en commun ($T$) et les autres à vélo ($L$). Un jour donné, 12 % des automobilistes arrivent en retard, contre 8 % des usagers des transports en commun et 2 % des cyclistes. On choisit un salarié au hasard ; $R$ : « il arrive en retard ».

1. Construis l'arbre pondéré.
2. Montre que $P(R) = 0{,}093$.
3. Un salarié est en retard. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en voiture ? Arrondis au centième.
4. Un salarié est à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il soit venu à vélo ? Arrondis au millième.

## **Exercice 6** – La branche manquante ★★

Dans une entreprise, 45 % des salariés sont cadres ($C$). 20 % des cadres font du télétravail ($W$). Au total, 31 % des salariés font du télétravail. On note $x = P_{\overline{C}}(W)$.

1. Exprime $P(W)$ en fonction de $x$.

2. Calcule $x$ et interprète-le.
3. Un salarié ne fait pas de télétravail. Quelle est la probabilité que ce soit un cadre ? Arrondis au centième.

### **Exercice 7** – Le filtre antispam ★★

Une messagerie reçoit 20 % de spams ($S$). Son filtre classe en « indésirable » ($I$) 97 % des spams, mais aussi 3 % des messages normaux. On choisit un message au hasard.

1. Construis l'arbre pondéré.
2. Calcule $P(I)$.
3. Un message est classé « indésirable ». Quelle est la probabilité que ce soit vraiment un spam ? Arrondis au centième.
4. Un message arrive dans la boîte de réception. Quelle est la probabilité que ce soit un spam ? Arrondis au millième.

### **Exercice 8** – Le dé et les trois urnes ★★★

On lance un dé équilibré à six faces. Si on obtient 1 ou 2, on tire une boule dans l'urne $U_1$ (3 rouges, 1 noire) ; si on obtient 3, 4 ou 5, dans l'urne $U_2$ (1 rouge, 3 noires) ; si on obtient 6, dans l'urne $U_3$ (2 rouges, 2 noires). $R$ : « la boule est rouge ».

1. Construis l'arbre pondéré.
2. Calcule $P(R)$.
3. La boule est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de $U_1$ ?
4. La boule est noire. De quelle urne vient-elle le plus probablement ? Justifie.

### **Exercice 9** – Application ou site ★★★

Une boutique en ligne vend sur son application et sur son site. Une proportion $x$ des visites se fait sur l'application ($A$), le reste sur le site. 30 % des visites sur l'application se terminent par un achat ($H$), contre 10 % des visites sur le site.

1. Montre que $P(H) = 0{,}1 + 0{,}2x$.
2. Ce mois-ci, 18 % des visites se terminent par un achat. Calcule $x$.
3. Avec cette valeur de $x$, calcule la probabilité qu'un achat ait été fait sur l'application.
4. La boutique veut que les trois quarts des achats au moins se fassent sur l'application. Pour quelles valeurs de $x$ est-ce le cas ?

### **Exercice 10** – Des données cohérentes ? ★★★

On sait que $P(A) = 0{,}4$ et $P_A(B) = 0{,}9$. On note $y = P_{\overline{A}}(B)$.

1. Exprime $P(B)$ en fonction de $y$.
2. On donne $P(B) = 0{,}54$. Calcule $y$.
3. Un élève affirme que $P(B) = 0{,}3$. Est-ce possible ?
4. Entre quelles valeurs $P(B)$ peut-elle se trouver ?

### **Exercice 11** – Trouve l'erreur ★★

Un arbre pondéré donne $P(A) = 0{,}2$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4$. Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) $P(B) = \dfrac{0{,}7 + 0{,}4}{2} = 0{,}55$

b) $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

c) $P(A \cap B) = P_A(B) = 0{,}7$

d) $P_B(A) = P_A(B) = 0{,}7$

e) « Si $P(B) = 0{,}98$, alors $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0{,}98 - 0{,}14}{0{,}8} = \dfrac{21}{20}$. »

f) « Les élèves sont internes ($I$), demi-pensionnaires ($D$) ou sportifs ($S$), donc $P(B) = P(I \cap B) + P(D \cap B) + P(S \cap B)$. »

## **QCM** – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $A_1$, $A_2$, $A_3$ forment une partition, avec $P(A_1) = 0{,}4$, $P(A_2) = 0{,}35$, $P(A_3) = 0{,}25$, et $P_{A_1}(B) = 0{,}1$, $P_{A_2}(B) = 0{,}2$, $P_{A_3}(B) = 0{,}4$. Alors $P(B)$ vaut :

   **A** $0{,}7$ **B** $0{,}1$ **C** $0{,}21$ **D** $0{,}008$

2. $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$. Alors $P_A(B)$ vaut :

   **A** $0{,}3$ **B** $0{,}075$ **C** $0{,}15$ **D** $0{,}7$

3. On sait seulement que $P_A(B) = 0{,}35$. Alors $P_{\overline{A}}(B)$ :

   **A** vaut $0{,}65$ **B** vaut $0{,}35$ **C** vaut $1$ **D** ne peut pas être calculée

4. $P(A) = 0{,}1$, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}1$. Alors $P_B(A)$ vaut :

   **A** $0{,}8$ **B** $\dfrac{8}{17}$ **C** $0{,}08$ **D** $0{,}17$

5. $A_1$, $A_2$, $A_3$ forment une partition de l'univers lorsque :

   **A** $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, cela suffit **B** ils ont chacun la probabilité $\dfrac{1}{3}$

   **C** ils sont deux à deux indépendants **D** ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers

6. $P(A) = 0{,}25$, $P_A(B) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}55$. Alors $P_{\overline{A}}(B)$ vaut :

   **A** $0{,}45$ **B** $0{,}6$ **C** $0{,}15$ **D** $0{,}55$

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*