Corrigé – Arbres pondérés, probabilités conditionnelles et totales

Mathématiques – Première spécialité

Probabilités conditionnelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Les formules de base ★

Utilise $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ou $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Écris la formule avant les nombres.

a) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P_A(B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25.$

b) Chemin $A \to B$: produit des branches.

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}35 \times 0{,}6 = 0{,}21.$

c) La condition est B : on divise par $P(B)$.

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}.$

d) On part de $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, donc $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$.

$P(A) = \dfrac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4.$

e) Il faut d'abord la branche $P_A(B)$: même nœud A, la somme vaut 1.

$P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56.$

f) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{0{,}6} = 0.$

Quand A est réalisé, B ne l'est jamais : A et B sont incompatibles.

g) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}2.$

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1.$

Même numérateur, dénominateurs différents : les deux probabilités ne sont pas égales.

h) Les chemins $A \to B$ et $A \to \overline{B}$ se partagent $P(A)$: $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}6.$

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75.$

i) *On divise par $P(A)$, pas par $P(\overline{A})$.*

$P(A) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}.$

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}.$

Exercice 2 – Un arbre à trois branches ★

1. Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.
   Départ : $P(A_3) = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
   Nœud A_1 : $P_{A_1}(\overline{B}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.
   Nœud A_2 : $P_{A_2}(B) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.
   Nœud A_3 : $P_{A_3}(\overline{B}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

2. Chemin $A_2 \to B$: $P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P_{A_2}(B) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$.

3. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B)$
   $P(B) = 0{,}5 \times 0{,}04 + 0{,}3 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}1$
   $P(B) = 0{,}02 + 0{,}015 + 0{,}02 = 0{,}055$.

Exercice 3 – De l'arbre au tableau ★

1. Chaque case est un chemin de l'arbre (produit des branches).
   $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$.
   $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}45 = 0{,}18$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}22$.
   Les totaux s'obtiennent en additionnant les lignes et les colonnes.

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,15	0,45	0,6
$\overline{A}$	0,18	0,22	0,4
Total	0,33	0,67	1

2. $P(B)$ est le total de la colonne B : $P(B) = 0{,}15 + 0{,}18 = 0{,}33$.
   C'est la formule des probabilités totales, avec la partition A, $\overline{A}$: $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

3. Condition B : on divise par le total de la colonne B.
   $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}33} = \dfrac{5}{11} \approx 0{,}45$.

Exercice 4 – Le club de tennis ★★

1. Premier niveau (tous les membres) : $P(E) = 0{,}3$ et $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
   Après E (« 60 % des enfants ») : $P_E(C) = 0{,}6$ et $P_E(\overline{C}) = 0{,}4$.
   Après $\overline{E}$ (« 15 % des adultes ») : $P_{\overline{E}}(C) = 0{,}15$ et $P_{\overline{E}}(\overline{C}) = 0{,}85$.

2. Chemin $E \to C$: $P(E \cap C) = P(E) \times P_E(C) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.

3. E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(C) = P(E) \times P_E(C) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(C)$
   $P(C) = 0{,}18 + 0{,}7 \times 0{,}15 = 0{,}18 + 0{,}105 = 0{,}285$.
   La moyenne simple donne $0{,}375$: elle fait comme s'il y avait autant d'enfants que d'adultes.
   Il faut pondérer par $P(E)$ et $P(\overline{E})$.

4. La condition est C : ce n'est pas une branche de l'arbre, on utilise la formule.
   $P_C(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}285} = \dfrac{12}{19} \approx 0{,}63$.
   Les enfants sont 30 % du club mais environ 63 % des inscrits aux cours collectifs.

Exercice 5 – Trois façons de venir au travail ★★

1. Premier niveau : $P(V) = 0{,}55$, $P(T) = 0{,}3$ et $P(L) = 1 - 0{,}55 - 0{,}3 = 0{,}15$.
   Second niveau : $P_V(R) = 0{,}12$, $P_T(R) = 0{,}08$, $P_L(R) = 0{,}02$.
   Sur chaque nœud, la branche $\overline{R}$ complète à 1 : 0,88, 0,92 et 0,98.

2. V, T et L forment une partition de l'univers : chaque salarié utilise un seul de ces moyens.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R) = P(V) \times P_V(R) + P(T) \times P_T(R) + P(L) \times P_L(R)$
   $P(R) = 0{,}55 \times 0{,}12 + 0{,}3 \times 0{,}08 + 0{,}15 \times 0{,}02$
   $P(R) = 0{,}066 + 0{,}024 + 0{,}003 = 0{,}093$.

3. Condition R : $P_R(V) = \dfrac{P(V \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}066}{0{,}093} = \dfrac{22}{31} \approx 0{,}71$.
   Plus de sept retardataires sur dix sont venus en voiture.

4. Condition $\overline{R}$, avec $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}093 = 0{,}907$.
   Chemin $L \to \overline{R}$: $P(L \cap \overline{R}) = 0{,}15 \times 0{,}98 = 0{,}147$.
   $P_{\overline{R}}(L) = \dfrac{0{,}147}{0{,}907} = \dfrac{147}{907} \approx 0{,}162$.

Exercice 6 – La branche manquante ★★

1. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :
   $P(W) = P(C) \times P_C(W) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(W)$
   $P(W) = 0{,}45 \times 0{,}2 + 0{,}55 \times x = 0{,}09 + 0{,}55x$.

2. On sait que $P(W) = 0{,}31$.
   $0{,}09 + 0{,}55x = 0{,}31$
   $\iff 0{,}55x = 0{,}22$ *(on retranche* $0{,}09$*)*
   $\iff x = 0{,}4$ *(on divise par* $0{,}55$*)*
   $S = \left\{ \dfrac{2}{5} \right\}$

   $x = 0{,}4$ est bien entre 0 et 1 : 40 % des non-cadres font du télétravail.

3. $P(\overline{W}) = 1 - 0{,}31 = 0{,}69$.
   Chemin $C \to \overline{W}$: $P(C \cap \overline{W}) = 0{,}45 \times 0{,}8 = 0{,}36$.
   $P_{\overline{W}}(C) = \dfrac{0{,}36}{0{,}69} = \dfrac{12}{23} \approx 0{,}52$.

Exercice 7 – Le filtre antispam ★★

1. $P(S) = 0{,}2$, $P(\overline{S}) = 0{,}8$.
   $P_S(I) = 0{,}97$, $P_S(\overline{I}) = 0{,}03$.
   $P_{\overline{S}}(I) = 0{,}03$ (les messages normaux classés à tort), $P_{\overline{S}}(\overline{I}) = 0{,}97$.

2. S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers ; formule des probabilités totales :
   $P(I) = P(S) \times P_S(I) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(I)$
   $P(I) = 0{,}2 \times 0{,}97 + 0{,}8 \times 0{,}03 = 0{,}194 + 0{,}024 = 0{,}218.$

3. Condition I : on inverse le conditionnement de l'arbre.
   $P_I(S) = \dfrac{P(S \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}194}{0{,}218} = \dfrac{97}{109} \approx 0{,}89.$
   Environ 11 % des messages du dossier « indésirable » sont des messages normaux : ce sont les faux positifs.

4. Condition $\overline{I}$, avec $P(\overline{I}) = 1 - 0{,}218 = 0{,}782$.
   Chemin $S \to \overline{I}$: $P(S \cap \overline{I}) = 0{,}2 \times 0{,}03 = 0{,}006$.
   $P_{\overline{I}}(S) = \dfrac{0{,}006}{0{,}782} = \dfrac{3}{391} \approx 0{,}008.$
   Moins d'un message sur cent de la boîte de réception est un spam.

Exercice 8 – Le dé et les trois urnes ★★★

1. Premier niveau (le dé) : $P(U_1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $P(U_2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(U_3) = \dfrac{1}{6}$.
   Second niveau (l'urne) : $P_{U_1}(R) = \dfrac{3}{4}$, $P_{U_2}(R) = \dfrac{1}{4}$, $P_{U_3}(R) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, et la branche « noire » complète à 1.

2. U_1, U_2, U_3 forment une partition de l'univers (une seule urne est utilisée).
   Formule des probabilités totales :
   $P(R) = P(U_1) \times P_{U_1}(R) + P(U_2) \times P_{U_2}(R) + P(U_3) \times P_{U_3}(R)$
   $P(R) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12}$
   $P(R) = \dfrac{6}{24} + \dfrac{3}{24} + \dfrac{2}{24} = \dfrac{11}{24}.$

3. $P_R(U_1) = \dfrac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{24}{11} = \dfrac{6}{11}.$

4. $P(\overline{R}) = 1 - \dfrac{11}{24} = \dfrac{13}{24}.$
   Chemins vers « noire » : $U_1 : \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{24}$; $U_2 : \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{24}$; $U_3 : \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{24}$.
   $P_{\overline{R}}(U_2) = \dfrac{9}{24} \times \dfrac{24}{13} = \dfrac{9}{13}$, et $P_{\overline{R}}(U_1) = P_{\overline{R}}(U_3) = \dfrac{2}{13}$.
   La boule noire vient le plus probablement de U_2.

Exercice 9 – Application ou site ★★★

1. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers ; formule des probabilités totales :
   $P(H) = P(A) \times P_A(H) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(H)$
   $P(H) = 0{,}3x + 0{,}1(1 - x) = 0{,}3x + 0{,}1 - 0{,}1x = 0{,}1 + 0{,}2x.$

2. $0{,}1 + 0{,}2x = 0{,}18$
   $\iff 0{,}2x = 0{,}08$ *(on retranche* $0{,}1$*)*
   $\iff x = 0{,}4$ *(on divise par* $0{,}2$*)*
   $S = \left\{ \dfrac{2}{5} \right\}$

   40 % des visites se font sur l'application.

3. $P(A \cap H) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
   $P_H(A) = \dfrac{P(A \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}18} = \dfrac{2}{3}$.

4. On veut $P_H(A) \geqslant 0{,}75$, avec $P_H(A) = \dfrac{0{,}3x}{0{,}1 + 0{,}2x}$.
   Le dénominateur est strictement positif : on peut multiplier les deux membres par $0{,}1 + 0{,}2x$ sans changer le sens.
   $0{,}3x \geqslant 0{,}75\,(0{,}1 + 0{,}2x)$
   $\iff 0{,}3x \geqslant 0{,}075 + 0{,}15x$ *(on développe)*
   $\iff 0{,}15x \geqslant 0{,}075$ *(on retranche* $0{,}15x$*)*
   $\iff x \geqslant 0{,}5$ *(on divise par* $0{,}15 > 0$*)*

   Comme x est une proportion, $x \leqslant 1$: il faut $x \in [0{,}5\,;\,1]$, au moins la moitié des visites sur l'application.

Exercice 10 – Des données cohérentes ? ★★★

1. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers ; formule des probabilités totales :
   $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4 \times 0{,}9 + 0{,}6y = 0{,}36 + 0{,}6y$.

2. $0{,}36 + 0{,}6y = 0{,}54$
   $\iff 0{,}6y = 0{,}18$ *(on retranche* $0{,}36$*)*
   $\iff y = 0{,}3$ *(on divise par* $0{,}6$*)*
   $S = \left\{ \dfrac{3}{10} \right\}$

   $0{,}3$ est entre 0 et 1 : les données sont cohérentes.

3. $0{,}36 + 0{,}6y = 0{,}3$
   $\iff 0{,}6y = -0{,}06$ *(on retranche* $0{,}36$*)*
   $\iff y = -0{,}1$ *(on divise par* $0{,}6$*)*
   $S = \left\{ -\dfrac{1}{10} \right\}$

   Une probabilité ne peut pas être négative.
   C'est impossible : on a déjà $P(B) \geqslant P(A \cap B) = 0{,}36$.

4. y est une probabilité : $0 \leqslant y \leqslant 1$.
   Donc $0{,}36 \leqslant 0{,}36 + 0{,}6y \leqslant 0{,}36 + 0{,}6$.
   $P(B)$ est comprise entre $0{,}36$ et $0{,}96$.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Un arbre pondéré donne $P(A) = 0{,}2$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4$. Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *Moyenne simple des taux : il faut pondérer par $P(A)$ et $P(\overline{A})$.*
A et $\overline{A}$ forment une partition ; formule des probabilités totales :
$P(B) = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}14 + 0{,}32 = 0{,}46$.

b) $0{,}7$ *est sur le nœud* A*, pas sur le nœud* $\overline{A}$*.*
$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

c) *Confusion entre la branche et le chemin.*
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$.

d) *La condition a changé : on divise par* $P(B)$*.*
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}46} = \dfrac{7}{23}$.

e) $\dfrac{21}{20} > 1$ *: ce n'est pas une probabilité.*
Le calcul est juste, la conclusion ne l'est pas : avec ces données, $P(B)$ vaut au plus $0{,}14 + 0{,}8 = 0{,}94$.
$P(B) = 0{,}98$ est impossible : les données sont incohérentes.

f) I*,* D *et* S *ne forment pas une partition : un sportif est aussi interne, demi-pensionnaire ou externe.*
Les élèves sportifs internes seraient comptés deux fois, et les externes non sportifs oubliés.
Il faut des catégories sans chevauchement qui couvrent tout le monde, par exemple : internes, demi-pensionnaires, externes.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. A_1, A_2, A_3 forment une partition, avec $P(A_1) = 0{,}4$, $P(A_2) = 0{,}35$, $P(A_3) = 0{,}25$, et $P_{A_1}(B) = 0{,}1$, $P_{A_2}(B) = 0{,}2$, $P_{A_3}(B) = 0{,}4$. Alors $P(B)$ vaut :

Réponse C : $0{,}21$
Probabilités totales : $0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}35 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}04 + 0{,}07 + 0{,}1 = 0{,}21$.

2. $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$. Alors $P_A(B)$ vaut :

Réponse A : $0{,}3$
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3$.

3. On sait seulement que $P_A(B) = 0{,}35$. Alors $P_{\overline{A}}(B)$:

Réponse D : ne peut pas être calculée
$P_{\overline{A}}(B)$ part du nœud $\overline{A}$: aucune donnée ne la fixe. C'est $P_A(\overline{B})$ qui vaut $0{,}65$.

4. $P(A) = 0{,}1$, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}1$. Alors $P_B(A)$ vaut :

Réponse B : $\dfrac{8}{17}$
$P(B) = 0{,}08 + 0{,}09 = 0{,}17$, puis $P_B(A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}17} = \dfrac{8}{17}$.

5. A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers lorsque :

Réponse D : ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers
Pas de chevauchement et aucun cas oublié. Des événements qui se chevauchent peuvent avoir des probabilités de somme 1 sans couvrir tous les cas.

6. $P(A) = 0{,}25$, $P_A(B) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}55$. Alors $P_{\overline{A}}(B)$ vaut :

Réponse B : $0{,}6$
$0{,}1 + 0{,}75y = 0{,}55 \iff 0{,}75y = 0{,}45 \iff y = 0{,}6$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).