Corrigé – Probabilités conditionnelles dans un tableau

Mathématiques – Seconde

Probabilités conditionnelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Lire un tableau croisé ★

On choisit au hasard un des 400 abonnés d'une salle de sport. J : « moins de 25 ans » ; A : « formule annuelle ». Donne la valeur décimale exacte, ou un arrondi au centième si elle n'en a pas.

	Annuelle A	**Mensuelle $\overline{A}$**	**Total**
Moins de 25 ans J	36	84	120
25 ans et plus $\overline{J}$	154	126	280
Total	190	210	400

a) Pas de condition : on lit le total de la ligne J (120) et on divise par le total général (400).

$$P(J) = \frac{\text{Card}(J)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(J) = \frac{120}{400} = 0{,}3.$$

b) Pas de condition : total de la colonne A (190) sur le total général (400).

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(A) = \frac{190}{400} = 0{,}475.$$

c) On lit la case à la croisée de la ligne J et de la colonne A (36).

Pas de « parmi » : on divise par le total général.

$$P(J \cap A) = \frac{\text{Card}(J \cap A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(J \cap A) = \frac{36}{400} = 0{,}09.$$

d) Case à la croisée de la ligne $\overline{J}$ et de la colonne $\overline{A}$ (126), sur le total général.

$$P(\overline{J} \cap \overline{A}) = \frac{\text{Card}(\overline{J} \cap \overline{A})}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(\overline{J} \cap \overline{A}) = \frac{126}{400} = 0{,}315.$$

e) Condition J : on se place dans la ligne J, parmi les 120 moins de 25 ans.

Parmi eux, 36 ont une formule annuelle.

$$P_J(A) = \frac{\text{Card}(J \cap A)}{\text{Card}(J)}$$

$$P_J(A) = \frac{36}{120} = 0{,}3.$$

f) Condition A : on se place dans la colonne A, parmi les 190 formules annuelles.

Parmi elles, 36 abonnés ont moins de 25 ans.

$$P_A(J) = \frac{\text{Card}(A \cap J)}{\text{Card}(A)}$$

$$P_A(J) = \frac{36}{190} = \frac{18}{95} \approx 0{,}19.$$

g) Condition $\overline{J}$: ligne $\overline{J}$, parmi les 280 abonnés de 25 ans et plus.
Parmi eux, 126 ont une formule mensuelle.
$P_{\overline{J}}(\overline{A}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{J} \cap \overline{A})}{\text{Card}(\overline{J})}$
$P_{\overline{J}}(\overline{A}) = \dfrac{126}{280} = 0{,}45.$

h) Condition $\overline{A}$: colonne $\overline{A}$, parmi les 210 formules mensuelles.
Parmi elles, 84 abonnés ont moins de 25 ans.
$P_{\overline{A}}(J) = \dfrac{\text{Card}(\overline{A} \cap J)}{\text{Card}(\overline{A})}$
$P_{\overline{A}}(J) = \dfrac{84}{210} = 0{,}4.$

Exercice 2 – Traduire par une phrase ★

Avec le tableau de l'exercice 1, traduis chaque résultat par une phrase « … % des … ».

a) La condition J est en indice : on se place parmi les abonnés de moins de 25 ans.
70 % des abonnés de moins de 25 ans ont une formule mensuelle.

b) Pas d'indice : on se place parmi tous les abonnés, et « ∩ » se dit « et ».
38,5 % des abonnés ont 25 ans ou plus **et** une formule annuelle.

c) Condition A : parmi les abonnés à formule annuelle.
Environ 81 % des abonnés à formule annuelle ont 25 ans ou plus.

d) Condition $\overline{A}$: parmi les abonnés à formule mensuelle.
60 % des abonnés à formule mensuelle ont 25 ans ou plus.

e) Pas de condition : parmi tous les abonnés.
52,5 % des abonnés ont une formule mensuelle.

f) Condition $\overline{J}$: parmi les abonnés de 25 ans et plus.
55 % des abonnés de 25 ans et plus ont une formule annuelle.

Exercice 3 – Le concert ★

	Moins de 30 ans M	**30 ans et plus**	**Total**
En ligne L	216	144	360
Autre	132	308	440
Total	348	452	800

1. En ligne : 45 % des 800, soit $800 \times 0{,}45 = 360$ spectateurs.
   Les 60 % s'appliquent aux 360 acheteurs en ligne : $360 \times 0{,}6 = 216$ ont moins de 30 ans, et $360 - 216 = 144$ ont 30 ans et plus.
   Autres : $800 - 360 = 440$ spectateurs, dont $440 \times 0{,}3 = 132$ de moins de 30 ans et $440 - 132 = 308$ de 30 ans et plus.
   Dernière ligne : on additionne chaque colonne.

2. $\text{Card}(M)$ est le total de la colonne M : $216 + 132 = 348$.
   $P(M) = \dfrac{\text{Card}(M)}{800} = \dfrac{348}{800} = 0{,}435.$

3. Condition M : on se place parmi les 348 spectateurs de moins de 30 ans ; 216 d'entre eux ont acheté en ligne.
   $P_M(L) = \dfrac{\text{Card}(M \cap L)}{\text{Card}(M)} = \dfrac{216}{348} = \dfrac{18}{29} \approx 0{,}62$.
   Environ 62 % des spectateurs de moins de 30 ans ont acheté leur billet en ligne.

Exercice 4 – La collecte de sang ★★

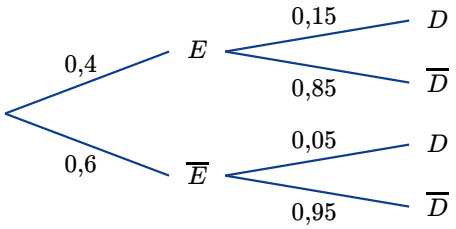
1. Total de la colonne O : $360 + 60 = 420$.
   Total de la ligne R^- : 150.
   Pas de condition : on divise par le total général 1 000.
   $P(O) = \dfrac{420}{1\,000} = 0{,}42$ et $P(R^-) = \dfrac{150}{1\,000} = 0{,}15$.

2. Condition R^- : on se place parmi les 150 donneurs R^- (ligne R^-) ; 60 d'entre eux sont du groupe O.
   $P_{R^-}(O) = \dfrac{\text{Card}(R^- \cap O)}{\text{Card}(R^-)} = \dfrac{60}{150} = 0{,}4$.
   40 % des donneurs de rhésus négatif sont du groupe O.

3. Condition O : on se place parmi les 420 donneurs du groupe O (colonne O) ; 60 sont R^-.
   $P_O(R^-) = \dfrac{\text{Card}(O \cap R^-)}{\text{Card}(O)} = \dfrac{60}{420} = \dfrac{1}{7} \approx 0{,}14$.
   Même numérateur (60), mais la condition a changé : on divise par 420 et non par 150.

4. $P(AB \cap R^-)$: la case AB et R^- (10) sur le total général : $P(AB \cap R^-) = \dfrac{10}{1\,000} = 0{,}01$.
   $P_{AB}(R^-)$: parmi les 40 donneurs AB ($30 + 10$) : $P_{AB}(R^-) = \dfrac{10}{40} = 0{,}25$.
   La question porte sur les donneurs AB, donc on se place parmi eux : c'est $P_{AB}(R^-)$, un donneur AB sur quatre est de rhésus négatif.

Exercice 5 – Les vélos en libre-service ★★



1. Premier niveau : $P(E) = \dfrac{240}{600} = 0{,}4$ (total de la ligne E sur le total général).
   Second niveau : $P_E(D) = \dfrac{36}{240} = 0{,}15$ (parmi les 240 vélos de la ligne E), $P_{\overline{E}}(D) = \dfrac{18}{360} = 0{,}05$ (parmi les 360 de la ligne $\overline{E}$).
   On complète chaque nœud pour que la somme des branches qui en partent fasse 1 : $1 - 0{,}4 = 0{,}6$, $1 - 0{,}15 = 0{,}85$, $1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

2. Tableau : total de la colonne D sur le total général, $P(D) = \dfrac{54}{600} = 0{,}09$.
   Arbre : deux chemins mènent à D, $E \to D$ et $\overline{E} \to D$; on multiplie le long de chaque chemin, puis on additionne.
   $P(D) = P(E) \times P_E(D) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(D)$
   $P(D) = 0{,}4 \times 0{,}15 + 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}06 + 0{,}03 = 0{,}09$.
   Les deux méthodes donnent le même résultat.

3. Condition D : parmi les 54 vélos en panne (colonne D), 36 sont électriques.
   $P_D(E) = \dfrac{\text{Card}(D \cap E)}{\text{Card}(D)} = \dfrac{36}{54} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$: deux vélos en panne sur trois sont électriques.
   Non : sur l'arbre, la condition des branches du second niveau est toujours E ou $\overline{E}$, jamais D.

4. $P(D) = 0{,}09$ (question 2) et $P_D(E) = \dfrac{2}{3}$ (question 3).
   Vélos en état de marche : $204 + 342 = 546$, dont 204 électriques.
   $P_{\overline{D}}(E) = \dfrac{204}{546} = \dfrac{34}{91} \approx 0{,}37$.

Exercice 6 – Le standard téléphonique ★★

	Attente longue L	**Attente courte**	**Total**
Matin M	140	560	700
Après-midi	105	195	300
Total	245	755	1 000

1. Matin : $1\,000 \times 0{,}7 = 700$ appels.
   Sur l'arbre, $P_M(L) = 0{,}2$: $700 \times 0{,}2 = 140$ attentes longues, et $700 - 140 = 560$ courtes.
   Après-midi : $1\,000 - 700 = 300$ appels.
   $P_{\overline{M}}(L) = 0{,}35$: $300 \times 0{,}35 = 105$ attentes longues, et $300 - 105 = 195$ courtes.

2. $\text{Card}(L)$ est le total de la colonne L : $140 + 105 = 245$.
   $P(L) = \dfrac{245}{1\,000} = 0{,}245$.

3. Condition L : on se place parmi les 245 attentes longues ; 140 ont lieu le matin.
   $P_L(M) = \dfrac{\text{Card}(L \cap M)}{\text{Card}(L)} = \dfrac{140}{245} = \dfrac{4}{7} \approx 0{,}57$.

4. Environ $57\,\%$ des attentes longues ont lieu le matin.
   Pourtant, le risque d'attendre longtemps est plus faible le matin : $P_M(L) = 0{,}2$ contre $P_{\overline{M}}(L) = 0{,}35$.
   Il y a simplement beaucoup plus d'appels le matin.

Exercice 7 – Le job d'été ★★

	Terminale T	**Autre**	**Total**
Job J	120	280	400
Pas de job	130	470	600
Total	250	750	1 000

1. Totaux : $\text{Card}(J) = 1\,000 \times 0{,}4 = 400$ et $\text{Card}(T) = 1\,000 \times 0{,}25 = 250$.
   Les 30 % portent sur les 400 lycéens de J, pas sur les 1 000 : $\text{Card}(J \cap T) = 400 \times 0{,}3 = 120$.
   Le reste par différence.
   Job, pas terminale : $400 - 120 = 280$.
   Terminale sans job : $250 - 120 = 130$.
   Ni l'un ni l'autre : $1\,000 - 400 - 130 = 470$.

2. Condition T : parmi les 250 élèves de terminale, 120 ont un job.
   $P_T(J) = \dfrac{\text{Card}(T \cap J)}{\text{Card}(T)} = \dfrac{120}{250} = 0{,}48$.
   48 % des élèves de terminale ont un job d'été.

3. Condition $\overline{T}$: parmi les $1\,000 - 250 = 750$ autres lycéens, 280 ont un job.
   $P_{\overline{T}}(J) = \dfrac{280}{750} = \dfrac{28}{75} \approx 0{,}37$.
   $0{,}48 > 0{,}37$: un élève de terminale a plus souvent un job d'été qu'un autre lycéen.

Exercice 8 – Le filtre anti-spam ★★★

	Indésirable D	**Réception**	**Total**
Spam S	2 850	150	3 000
Vrai e-mail	140	6 860	7 000
Total	2 990	7 010	10 000

1. Spams : $10\,000 \times 0{,}3 = 3\,000$.
   95 % des spams vont dans D : $3\,000 \times 0{,}95 = 2\,850$; les $3\,000 - 2\,850 = 150$ autres arrivent en réception.
   Vrais e-mails : $10\,000 - 3\,000 = 7\,000$.
   2 % d'entre eux vont dans D : $7\,000 \times 0{,}02 = 140$; les $7\,000 - 140 = 6\,860$ autres arrivent en réception.
   Total de D : $2\,850 + 140 = 2\,990$; boîte de réception : $10\,000 - 2\,990 = 7\,010$.

2. On sait que l'e-mail est dans D : on se place parmi les 2 990 indésirables ; 140 sont de vrais e-mails.
   $P_D(\overline{S}) = \dfrac{\text{Card}(D \cap \overline{S})}{\text{Card}(D)} = \dfrac{140}{2\,990} = \dfrac{14}{299} \approx 0{,}047$.
   Environ 5 indésirables sur 100 sont de vrais e-mails.

3. Bien classés : spams dans D (2 850) ou vrais e-mails hors de D (6 860).
   Ces deux cas n'ont aucun e-mail commun : on additionne.
   $P = \dfrac{2\,850 + 6\,860}{10\,000} = 0{,}971$, soit 97,1 %.
   97,1 % $<$ 98 % : l'annonce est fausse.

Exercice 9 – Les deux auto-écoles ★★★

1. Proportion de reçus = nombre de reçus ÷ nombre de candidats, tous groupes réunis.
   A : $\dfrac{81 + 192}{87 + 263} = \dfrac{273}{350} = 0{,}78$.
   B : $\dfrac{234 + 55}{270 + 80} = \dfrac{289}{350} \approx 0{,}83$.
   $0{,}78 < 0{,}83$: B semble meilleure.

2. Première fois : A $\dfrac{81}{87} = \dfrac{27}{29} \approx 0{,}93$; B $\dfrac{234}{270} = \dfrac{13}{15} \approx 0{,}87$.
   Repassage : A $\dfrac{192}{263} \approx 0{,}73$; B $\dfrac{55}{80} = 0{,}6875$.
   $0{,}93 > 0{,}87$ et $0{,}73 > 0{,}69$: A fait mieux dans les deux groupes !

3. A présente surtout des candidats qui repassent (263 sur 350), qui réussissent moins.
   B présente surtout des candidats en première présentation (270 sur 350), qui réussissent mieux.
   La proportion globale mélange des groupes de tailles très différentes : il faut comparer groupe par groupe.

4. Condition : « reçu de A ».
   On se place parmi les $81 + 192 = 273$ reçus de A ; 81 se présentaient pour la première fois.
   $P = \dfrac{81}{273} = \dfrac{27}{91} \approx 0{,}30$.

Exercice 10 – Le tableau à reconstituer ★★★

	L	$\overline{L}$	**Total**
T	70	130	200
$\overline{T}$	30	270	300
Total	100	400	500

1. « 40 % des salariés » : $P(T) = 0{,}4$.
   « Parmi eux » (T) : $P_T(L) = 0{,}35$.
   « Parmi ceux qui habitent loin » (L) : $P_L(T) = 0{,}7$.
   $\text{Card}(T) = 500 \times 0{,}4 = 200$ et $\text{Card}(T \cap L) = 200 \times 0{,}35 = 70$.
   Ces 70 salariés forment 70 % de L : $\text{Card}(L) \times 0{,}7 = 70$, donc $\text{Card}(L) = \dfrac{70}{0{,}7} = 100$.

2. Ligne T : 70 dans L, $200 - 70 = 130$ dans $\overline{L}$.
   Colonne L : $100 - 70 = 30$ dans $\overline{T}$.
   Ligne $\overline{T}$: $500 - 200 = 300$ salariés, dont $300 - 30 = 270$ dans $\overline{L}$.
   Condition $\overline{T}$: parmi les 300 salariés de la ligne $\overline{T}$, 30 sont dans L.
   $P_{\overline{T}}(L) = \dfrac{30}{300} = 0{,}1$.
   10 % des salariés qui ne télétravaillent pas le lundi habitent à plus de 30 km.

3. Premier niveau : $P(T) = 0{,}4$ et $P(\overline{T}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
   Après T : $P_T(L) = 0{,}35$ et $P_T(\overline{L}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
   Après $\overline{T}$ (question 2) : $P_{\overline{T}}(L) = 0{,}1$ et $P_{\overline{T}}(\overline{L}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Une boulangerie a servi 200 clients (tableau ci-dessous). Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *Sans « parmi », on divise par le total général.*

$P(S \cap C) = \dfrac{\text{Card}(S \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{30}{200} = 0{,}15$.

b) *On se place parmi les clients sur place.*

La condition S est en indice : on divise par le total de la ligne S (50).

$$P_S(C) = \frac{\text{Card}(S \cap C)}{\text{Card}(S)} = \frac{30}{50} = 0{,}6.$$

c) *La condition a changé : on divise par* $\text{Card}(C)$.

Parmi les $30 + 90 = 120$ clients qui achètent un croissant, 30 mangent sur place.

$$P_C(S) = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(C)} = \frac{30}{120} = 0{,}25.$$

d) *Mauvais dénominateur : la condition est C.*

On se place parmi les 120 acheteurs de croissant (colonne C), dont 90 à emporter.

$$P_C(\overline{S}) = \frac{90}{120} = 0{,}75.$$

e) *On n'additionne pas des probabilités « sachant » ; une probabilité ne dépasse pas 1.*

$P(C)$ se lit dans les totaux : colonne C, $30 + 90 = 120$ clients sur 200.

$$P(C) = \frac{120}{200} = 0{,}6.$$

f) *Phrase à l'envers.*

Dans $P_S(C)$, la condition S est en indice : « parmi les clients qui mangent sur place ».

60 % des clients qui mangent sur place achètent un croissant.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Sur 300 personnes, 120 ont un chien (C), dont 45 ont aussi un jardin (J) ; 150 personnes ont un jardin. $P_C(J)$ vaut :

Réponse B : $\dfrac{3}{8}$

Condition C : parmi les 120 propriétaires de chien, 45 ont un jardin.

$$P_C(J) = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

2. « 20 % des latinistes (L) sont en seconde (S) » s'écrit :

Réponse D : $P_L(S) = 0{,}2$

« Parmi les latinistes » : la condition est L, elle va en indice.

On cherche la proportion d'élèves de seconde : $P_L(S) = 0{,}2$.

3. Sur 500 personnes, 40 % fument et 25 % des fumeurs toussent le matin. Le nombre de fumeurs qui toussent le matin est :

Réponse A : 50

$500 \times 0{,}4 = 200$ fumeurs.

Les 25 % s'appliquent aux 200 fumeurs, pas aux 500 personnes : $200 \times 0{,}25 = 50$.

4. $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Alors $P_A(B)$ vaut :

Réponse C : 0,4

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4.$$

5. $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. Dans le tableau pour 1 000 individus, $\text{Card}(B)$ vaut :

Réponse A : 320

$\text{Card}(A) = 300$ et $\text{Card}(\overline{A}) = 700$.

$\text{Card}(B) = 300 \times 0{,}6 + 700 \times 0{,}2 = 180 + 140 = 320$.

6. Dans un tableau de 400 individus : $\text{Card}(A \cap B) = 40$, $\text{Card}(A) = 100$, $\text{Card}(B) = 160$. $P_B(A)$ vaut :

Réponse D : $\dfrac{1}{4}$

Condition B : parmi les 160 individus de B, 40 sont dans A.

$P_B(A) = \dfrac{40}{160} = \dfrac{1}{4}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).