49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Vérifier qu'une fonction est une primitive*

À retenir : F est une primitive de f sur I si $F' = f$: on dérive F, jamais f. Les primitives sont les $F(x) + k$, k réel. Forme imposée : on dérive, on identifie, on résout. Ex. : $(xe^x)' = (x+1)e^x$.

Ex. 1 ★☆☆ **Vérifier en dérivant** — Dans chaque cas, F est-elle une primitive de f sur l'intervalle I ? Justifie en dérivant F.

(a) $F(x) = x^4 - 3x^2 + 7x$, $f(x) = 4x^3 - 6x + 7$, $I = \mathbb{R}$.

(b) $F(x) = \ln(x) + 2x$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$, $I =]0\,;+\infty[$.

(c) $F(x) = e^{x^2}$, $f(x) = e^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

(d) $F(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0\,;+\infty[$.

(e) $F(x) = \sin(3x) + \cos(x)$, $f(x) = 3\cos(3x) - \sin(x)$, $I = \mathbb{R}$.

(f) $F(x) = (x+3)e^{2x}$, $f(x) = 2(x+3)e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Deux primitives diffèrent d'une constante** — Réponds à chaque question en justifiant.

(a) Soit $F(x) = (x-3)^2$ et $G(x) = x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Calcule $F(x) - G(x)$, puis déduis-en, sans dériver, que $F' = G'$.

(b) Soit $H(x) = \frac{2x+1}{x}$ et $K(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Montre que $H - K$ est constante, puis donne une fonction dont H et K sont des primitives.

(c) Vrai ou faux : $f(x) = e^{-x}$ admet une seule primitive sur $\mathbb{R}$, qui est $-e^{-x}$. Justifie.

(d) Donne toutes les primitives de $f(x) = \cos(x) + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3 ★★☆ **Forme imposée et piège du produit** — Soit $f(x) = (x^2 - 3x + 4)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On cherche une primitive de f de la forme $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a, b, c sont des réels.

(a) Montre que $G'(x) = \left(-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right)e^{-x}$.

(b) Par identification, écris le système vérifié par a, b, c, puis résous-le.

(c) Donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

(d) Lina prend une primitive de chaque facteur et propose $L(x) = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)e^{-x}$. Calcule $L'(0)$ et conclus.

Ex. 4 ★★☆ **L'erreur de Sacha** — Sacha doit montrer que $F(x) = x\ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \ln(x) + 1$. Il écrit : « $f'(x) = \frac{1}{x}$, ce n'est pas $F(x)$, donc F n'est pas une primitive de f. »

(a) Explique l'erreur de méthode de Sacha.

(b) Sur quel intervalle faut-il travailler ? Justifie.

(c) Montre que F est une primitive de f sur cet intervalle.

(d) Déduis-en la primitive G de f sur cet intervalle telle que $G(1) = 3$.

(e) Étudie le signe de f et déduis-en les variations de G.

Ex. 5 ★★★ **Exponentielle et sinus : identifier puis ajuster** — Soit $f(x) = 2e^x \sin x$ sur $\mathbb{R}$. On cherche une primitive de f de la forme $G(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x$, où a et b sont des réels.

(a) Léa écrit : « $-\cos x$ est une primitive de $\sin x$, donc $H(x) = -2e^x\cos x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. » A-t-elle raison ? Justifie en dérivant H.

(b) Calcule $G'(x)$ et écris-le sous la forme $(\alpha\cos x + \beta\sin x)e^x$, avec α et β exprimés en fonction de a et b.

(c) En prenant deux valeurs de x bien choisies, détermine a et b. Vérifie ensuite que la fonction G obtenue convient.

(d) Donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$, puis la primitive F de f telle que $F(0) = 1$.

(e) Déduis du signe de f les variations de F sur $[0\,;2\pi]$, puis calcule $F(\pi)$.

Ex. 6 ★★★ **Logarithme : quelle primitive, sur quel intervalle ?** — Sur $I =]2\,;+\infty[$, on considère $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$, $F(x) = \ln(x^2 - 4)$ et $G(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 2)$.

(a) Justifie que F est définie et dérivable sur I, puis montre que F est une primitive de f sur I.

(b) Montre que $G(x) - F(x)$ est constante sur I. Déduis-en, sans dériver G, que G est une primitive de f sur I.

(c) Inès affirme : « F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Combien f a-t-elle de primitives sur I ? Écris-les toutes, puis donne celle qui s'annule en 3.

(e) Montre que F est aussi une primitive de f sur $]-\infty\,;-2[$. Est-ce aussi le cas pour G ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Le chariot sur son rail** — Un chariot se déplace sur un rail rectiligne. À l'instant t (en s), sa vitesse est $v(t) = 10t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (en m/s), pour $t \geqslant 0$. Sa position $x(t)$, en m, vérifie $x' = v$ sur $[0\,;+\infty[$ et $x(0) = 0$.

(a) Détermine les réels a et b tels que $P(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ soit une primitive de v sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Malo affirme : « P est une primitive de v, donc la position du chariot est $x(t) = P(t)$. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Déduis-en l'expression de $x(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(d) Justifie que x est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donne ensuite la distance parcourue pendant les 4 premières secondes, au cm près.

(e) Montre que $x(t) < 40$ pour tout $t \geqslant 0$. Interprète ce résultat.

2. *Primitives des fonctions usuelles et linéarité*

À retenir : Je découpe en somme et je garde les coefficients : $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$, $\frac{1}{x} \to \ln x$, $\sin \to -\cos$. Pour $f(ax+b)$, je divise par a : $\cos(4x) \to \frac{1}{4}\sin(4x)$. Produit ou quotient : je transforme d'abord.

Ex. 8 ★☆☆ **Primitives des fonctions de référence** — Pour chaque fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$, donne une primitive F sur $]0\,;+\infty[$.

(a) $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 7$

(c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2} - 1$ (d) $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$

(e) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} + x^2$ (f) $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$

Ex. 9 ★☆☆ **Fonctions de la forme f(ax + b)** — Pour chaque fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, donne une primitive F sur $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{1-4x}$

(c) $f(x) = \sin(2x)$ (d) $f(x) = \cos(5x+1)$

(e) $f(x) = (3x-2)^4$ (f) $f(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$

Ex. 10 ★★☆ **Transformer avant de primitiver** — Chaque fonction est définie sur $]0\,;+\infty[$. Écris-la d'abord comme une somme de fonctions usuelles, puis donne une primitive sur $]0\,;+\infty[$.

(a) $f(x) = (1-3x)^2$

(b) $g(x) = \dfrac{2x^2-5}{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2}$

(d) $k(x) = (x+2)(x-3)$

Ex. 11 ★★☆ **Les primitives d'Inès** — Inès cherche une primitive F de chaque fonction f sur $]0\,;+\infty[$. Pour chaque ligne : a-t-elle raison ? Justifie en dérivant et corrige si besoin.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; Inès écrit $F(x) = \ln(x^2)$.

(b) $f(x) = 4\sin x$; Inès écrit $F(x) = 4\cos x$.

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$; Inès écrit $F(x) = 5\mathrm{e}^{5x}$.

(d) $f(x) = x\mathrm{e}^x$; Inès écrit $F(x) = \frac{x^2}{2} \times \mathrm{e}^x$. Corrige en vérifiant que $(x-1)\mathrm{e}^x$ convient.

(e) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$; Inès écrit $F(x) = x^2 + \ln x$.

Ex. 12 ★★★ **Un quotient à démonter** — On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^3-2x^2+4x+6}{x^3}$.

(a) Écris $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}$, avec a, b, c, d réels.

(b) Explique pourquoi la formule $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ne s'applique pas au terme en $\frac{1}{x}$. Donne ensuite une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Détermine la primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = 1$.

(d) Existe-t-il une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule à la fois en 1 et en e ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **La position d'un drone** — Un drone se déplace sur un axe. Sa vitesse, en m/s, à l'instant t (en secondes, $t \geqslant 0$) est $v(t) = \frac{6}{\sqrt{2t+1}} + 4\sin(\pi t)$. Sa position $p(t)$, en mètres, vérifie $p'(t) = v(t)$ et $p(0) = 0$.

(a) Donne une primitive sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{6}{\sqrt{2t+1}}$. Justifie le coefficient obtenu.

(b) Déduis-en toutes les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$. Attention au signe et au coefficient du terme en sin.

(c) Détermine l'expression de $p(t)$.

(d) Calcule la valeur exacte de $p(1)$ et celle de $p(4)$.

Ex. 14 ★★★ **Le coût total d'un atelier de vélos** — Un atelier fabrique q centaines de vélos, avec $q \in [0\,;10]$. Le coût marginal, en milliers d'euros, est $C_m(q) = 3 + 6\mathrm{e}^{-0{,}5q}$. Le coût total C est la primitive de C_m sur $[0\,;10]$ telle que $C(0) = 10$ (coûts fixes).

(a) Donne une primitive de C_m sur $[0\,;10]$. Justifie le coefficient devant l'exponentielle.

(b) Détermine l'expression de $C(q)$.

(c) Calcule le coût total pour 400 vélos, en valeur exacte, puis arrondi à l'euro.

(d) Calcule la hausse du coût total quand la production passe de 400 à 600 vélos, arrondie à l'euro.

(e) Vrai ou faux : « Si les coûts fixes doublaient, le coût total $C(q)$ doublerait. » Justifie.

3. Formes $u'u^n$, u'/u^2 et $u'/\sqrt{u}$

À retenir : $u'u^n$ ($n \neq -1$; $u \neq 0$ si $n < 0$) donne $\frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u^2}$ donne $-\frac{1}{u}$ ($u \neq 0$) ; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ donne $2\sqrt{u}$ ($u > 0$). On n'ajuste qu'une constante, jamais un x : $(4x+1)^3$ a pour primitive $\frac{(4x+1)^4}{16}$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : la forme $u'u^n$** — Pour chaque fonction, nomme u, calcule $u'(x)$, écris $f = \lambda \times u'u^n$, puis donne une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Si u' n'apparaît pas en facteur, change de méthode.

(a) $f(x) = (2x-5)^4$ (b) $f(x) = 6x(x^2-1)^2$

(c) $f(x) = x^2(x^3+2)^4$ (d) $f(x) = \cos x \times (\sin x)^3$

(e) $f(x) = (x^2+1)^2$ (f) $f(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3)^2$

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : u'/u^2, $u'u^n$ avec $n<0$, $u'/\sqrt{u}$** — Pour chaque fonction, nomme u et vérifie que u ne s'annule pas (ou que $u>0$) sur l'intervalle indiqué. Donne ensuite une primitive F de f sur cet intervalle.

(a) $f(x) = \dfrac{3}{(3x+2)^2}$ sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^3}$ sur $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$

(d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+2}}$ sur $\mathbb{R}$

(f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ sur $\mathbb{R}$

Ex. 17 ★★☆ **Les propositions de Léa** — Léa a cherché une primitive de plusieurs fonctions. Pour chaque proposition, dis si Léa a raison et justifie. Si elle se trompe, explique son erreur et corrige-la.

(a) Pour $f(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$, Léa propose $F(x) = \ln(x^2+3)$. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Pour $g(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$, Léa propose $G(x) = \frac{3}{2x+1}$. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Pour $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$, Léa propose $H(x) = 2\sqrt{x^2+9}$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Pour $k(x) = (5x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$, Léa propose $K(x) = \frac{(5x+1)^4}{20}$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Pour $m(x) = \frac{4x}{(x^2+5)^3}$ sur $\mathbb{R}$, Léa propose $M(x) = -\frac{1}{2(x^2+5)^4}$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 18 ★★☆ **Le robot sur son rail** — Un robot avance sur un rail rectiligne. À l'instant t (en s), avec $t \geqslant 0$, sa vitesse est $v(t) = \frac{3t}{\sqrt{t^2+16}}$ (en m/s). Sa position $d(t)$ (en m) vérifie $d' = v$ sur $[0;+\infty[$ et $d(0) = 0$.

(a) Nomme u, justifie que $u(t) > 0$, puis donne toutes les primitives de v sur $[0;+\infty[$.

Ex. 18 (suite)

(b) Déduis-en l'expression de $d(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(c) Calcule la distance parcourue par le robot pendant les 3 premières secondes.

(d) Au bout de combien de temps le robot a-t-il parcouru 13,5 m ?

Ex. 19 ★★★ **Un dénominateur qui s'annule** — On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x-6}{(x^2-3x+2)^2}$. On pose $u(x) = x^2-3x+2$.

(a) Résous $x^2-3x+2=0$. Explique pourquoi on cherche les primitives de f sur $]2;+\infty[$ et non sur $\mathbb{R}$.

(b) Calcule $u'(x)$ et écris $f = \lambda \times \frac{u'}{u^2}$. Donne ensuite toutes les primitives de f sur $]2;+\infty[$.

(c) Détermine la primitive F de f sur $]2;+\infty[$ telle que $F(3) = 0$.

(d) Soit $G(x) = \frac{2x^2-6x+2}{x^2-3x+2}$ sur $]2;+\infty[$. Écris $G(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x^2-3x+2}$.

(e) Déduis-en que G est une primitive de f sur $]2;+\infty[$, puis calcule $G(x) - F(x)$.

Ex. 20 ★★★ **Ajuster une constante, pas un x** — On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2+2)^2$ et $h(x) = x(x^2+2)^2$.

(a) Malik affirme qu'une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $\frac{(x^2+2)^3}{3}$. A-t-il raison ? Justifie en dérivant, puis explique son erreur.

(b) Donne une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(c) Nomme u et λ pour écrire $h = \lambda \times u'u^2$. Donne ensuite une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

(d) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = (4x-3)^5$. Donne ensuite la solution qui vérifie $y(1) = 0$.

(e) Donne une primitive de $p(x) = \frac{6}{\sqrt{4x-3}}$ sur $]\frac{3}{4};+\infty[$, en justifiant la condition sur u.

Ex. 21 ★★★ **L'atelier de bijoux** — Un atelier fabrique q centaines de bijoux, avec $q \in [0;10]$. Son coût marginal, en milliers d'euros, est $C_m(q) = 3 + \frac{8q}{(q^2+1)^3}$. Le coût total C est la primitive de C_m sur $[0;10]$ telle que $C(0)$ soit égal aux coûts fixes.

(a) On pose $u(q) = q^2+1$. Justifie que u ne s'annule pas, puis écris $\frac{8q}{(q^2+1)^3}$ sous la forme $\lambda \times u'(q) \times u(q)^n$, en précisant λ et n.

(b) Donne toutes les primitives de C_m sur $[0;10]$.

(c) Les coûts fixes s'élèvent à 5 milliers d'euros. Détermine $C(q)$.

(d) Vérifie en dérivant ton expression de $C(q)$ que $C'(q) = C_m(q)$.

(e) Calcule le coût total de fabrication de 200 bijoux, en euros.

4. *Formes u'/u et $u'e^u$*

À retenir : $u'\mathrm{e}^u$ a pour primitive e^u. $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$, seulement si $u>0$ sur I. Ajuste la constante : $\dfrac{x}{x^2+3}$ donne $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$. Piège : $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, pas $\dfrac{u'}{u}$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : forme $u'\mathrm{e}^u$** — Donne une primitive F de chaque fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) $f(x)=5\mathrm{e}^{-x}$ (b) $f(x)=\mathrm{e}^{3x-2}$

(c) $f(x)=(2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x}$ (d) $f(x)=\sin x\,\mathrm{e}^{\cos x}$

(e) $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{x^3}$ (f) $f(x)=\cos(2x)\,\mathrm{e}^{\sin(2x)}$

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : forme $\dfrac{u'}{u}$** — Donne une primitive F de f sur l'intervalle indiqué. Vérifie à chaque fois que $u>0$.

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$ sur $\mathbb{R}$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{2x-6}$ sur $]3\,;+\infty[$

(c) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$ sur $\mathbb{R}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$ sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$

(e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$ sur $\mathbb{R}$

(f) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ sur $\mathbb{R}$

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux ? Justifie.** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie. Si c'est faux, donne une primitive correcte quand c'est possible.

(a) Sur $]0\,;+\infty[$, $F(x)=\frac{1}{3}\ln(3x+1)$ est une primitive de $f(x)=\dfrac{1}{(3x+1)^2}$.

(b) Sur $\mathbb{R}$, $G(x)=\ln(3\mathrm{e}^{2x}+3)$ est une primitive de $g(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

(c) Sur $]0\,;+\infty[$, $H(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ est une primitive de $h(x)=\mathrm{e}^{x^2}$.

(d) Sur $\mathbb{R}$, $K(x)=\ln(x^2-2x+2)$ est une primitive de $k(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$.

Ex. 25 ★★☆ **Primitives avec une condition** — Pour chaque question, reconnais la forme du cours, vérifie la condition sur u, puis utilise la donnée de l'énoncé.

(a) Détermine la primitive F de $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+8}$ sur $]-2\,;+\infty[$ telle que $F(0)=\ln 2$.

(b) Résous sur $]-\infty\,;5[$ l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{x-5}$.

(c) Détermine la primitive K sur $\mathbb{R}$ de $k(x)=x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$ telle que $K(1)=0$.

Ex. 26 ★★★ **Coût total d'une production de vélos** — Un atelier fabrique q centaines de vélos, avec $q\in[0\,;10]$. Le coût marginal, en milliers d'euros, est $C_m(q)=2+\dfrac{6q}{q^2+4}$. Le coût total C est la primitive de C_m sur $[0\,;10]$ telle que $C(0)=5$ (ce sont les coûts fixes).

(a) Écris $\dfrac{6q}{q^2+4}$ sous la forme $k\times\dfrac{u'}{u}$ en précisant u. Justifie que $u>0$ sur $[0\,;10]$, puis donne une primitive de cette fonction.

(b) Déduis-en l'expression de $C(q)$.

(c) Montre que $C(4)=13+3\ln 5$, puis donne le coût de 400 vélos à l'euro près.

(d) Un concurrent a pour coût marginal $D_m(q)=1+\dfrac{8}{(2q+1)^2}$. Malik affirme qu'une primitive de D_m est $q+4\ln\left((2q+1)^2\right)$. A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

(e) Justifie que le coût total C est strictement croissant sur $[0\,;10]$.

Ex. 27 ★★★ **Le vol d'un drone** — Un drone décolle du sol à l'instant $t=0$ (t en secondes). Pendant la montée, pour $t\in[0\,;5]$, sa vitesse verticale en m/s est $v(t)=\dfrac{4\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}$. Son altitude $h(t)$, en mètres, vérifie $h'=v$ et $h(0)=0$.

(a) Reconnais la forme de v en précisant u et la condition à vérifier. Donne ensuite une primitive de v sur $[0\,;5]$.

(b) Déduis-en $h(t)$, puis calcule $h(5)$ arrondi au dixième.

(c) Détermine l'instant t_0 où le drone atteint 10 m d'altitude. Donne sa valeur exacte, puis arrondie au centième.

(d) Le drone redescend ensuite. Au temps s (en secondes) après la fin de la montée, sa vitesse vaut $w(s)=-8s\,\mathrm{e}^{-s^2}$. Donne une primitive de w sur $[0\,;+\infty[$.

(e) L'altitude $a(s)$ vérifie $a'=w$ et $a(0)=h(5)$. Exprime $a(s)$, puis justifie que le drone ne touche jamais le sol.

Ex. 28 ★★★ **Formes cachées avec $\ln x$** — On travaille sur $I=]2\,;+\infty[$. On considère les fonctions $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ et $p(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

(a) Justifie que $\ln x>0$ sur I. Donne ensuite une primitive de f sur I en écrivant f sous la forme $\dfrac{u'}{u}$.

(b) Reconnais dans g une forme du cours et donne une primitive de g sur I.

(c) Détermine la primitive H sur I de $h(x)=\dfrac{2+(\ln x)^2}{x\ln x}$ telle que $H(\mathrm{e})=1$.

(d) Sacha propose $P(x)=\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)$ comme primitive de p sur I. A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

(e) Explique pourquoi on ne peut pas chercher une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. Formes $u'\cos u$, $u'\sin u$ et $(v'\circ u)\times u'$

À retenir : $u'\cos u$ a pour primitive $\sin u$; $u'\sin u$ a pour primitive $-\cos u$ (attention au signe !). Plus généralement, $(v'\circ u)\times u'$ a pour primitive $v\circ u$. Ajuste la constante : $\sin(5x)$ a pour primitive $-\frac{1}{5}\cos(5x)$. Contrôle en dérivant.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : primitives trigonométriques en ligne** — Donne une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) $f(x)=5\cos x-2\sin x$ (b) $f(x)=\cos(2x)$

(c) $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ (d) $f(x)=x\cos(x^2)$

(e) $f(x)=3x^2\sin(x^3)$ (f) $f(x)=\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)$

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : repérer u, puis la forme** — Pour chaque fonction f, précise u et la forme reconnue, ajuste la constante, puis donne une primitive F de f sur l'intervalle indiqué.

(a) $f(x)=\cos x\sin x$ sur $\mathbb{R}$

(b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

(c) $f(x)=\sin(2x)\,\mathrm{e}^{\cos(2x)}$ sur $\mathbb{R}$

(d) $f(x)=\dfrac{\sin x}{3-\cos x}$ sur $\mathbb{R}$

(e) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ sur $]0;\pi[$

(f) $f(x)=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$ sur $]0;+\infty[$ (écris f sous la forme $(v'\circ u)\times u'$)

Ex. 31 ★★☆ **Trois affirmations à contrôler** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie en dérivant. Si l'affirmation est fausse, corrige-la quand c'est possible.

(a) Léna : « Une primitive de $f(x)=\sin(4x)$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\frac{1}{4}\cos(4x)$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Yanis : « Une primitive de $g(x)=\cos(x^2)$ sur $]0;+\infty[$ est $G(x)=\frac{\sin(x^2)}{2x}$. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Chloé : « $F(x)=2\cos^2 x$ et $G(x)=\cos(2x)$ sont deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}$. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Le bouchon qui oscille** — Un bouchon de pêche oscille verticalement sur l'eau. Sa vitesse, en cm/s, est $v(t)=3\cos(2t)$ pour $t\geqslant 0$ en secondes. Sa hauteur $h(t)$, en cm, vérifie $h'=v$ sur $[0;+\infty[$, avec $h(0)=1$.

(a) Détermine toutes les primitives de v sur $[0;+\infty[$.

(b) Déduis-en l'expression de $h(t)$.

(c) Calcule la hauteur du bouchon à l'instant $t=\frac{\pi}{4}$.

(d) Détermine le premier instant $t>0$ où le bouchon repasse à sa hauteur de départ.

Ex. 33 ★★★ **Démasquer v et u** — Toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. On rappelle que si $f=k\times(v'\circ u)\times u'$, avec k réel, alors $k\times(v\circ u)$ est une primitive de f.

(a) Soit $f(x)=(x+1)\sin(x^2+2x)$. Précise u, v et la constante k telles que $f=k\times(v'\circ u)\times u'$, puis donne une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $h(x)=\sin x\cos(\cos x)$. Précise u, v et k, puis donne une primitive H de h sur $\mathbb{R}$. Contrôle en dérivant.

(c) Soit $g(x)=\sin x\cos^2 x$. Écris g sous la forme $k\times u'\times u^2$, puis donne toutes les primitives de g sur $\mathbb{R}$.

(d) Détermine la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0)=0$, puis justifie que $G(x)\geqslant 0$ pour tout réel x.

Ex. 34 ★★★ **Un logarithme, une exponentielle et une condition initiale** — On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$ et $h(x)=\sin x\,\mathrm{e}^{\cos x}$.

(a) Justifie que $2+\sin x>0$ pour tout réel x, puis donne une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

(b) Nora propose $H(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$ comme primitive de h sur $\mathbb{R}$. A-t-elle raison ? Justifie en dérivant, puis corrige si besoin.

(c) Détermine la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ telle que $y'=g+h$ et $y(0)=\ln 2$.

(d) Calcule la valeur exacte de $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ex. 35 ★★★ **La membrane du haut-parleur** — Un point de la membrane d'un haut-parleur se déplace sur un axe. Sa vitesse, en mm/ms, est $v(t)=2\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$ pour $t\geqslant 0$ (en ms). Sa position $p(t)$, en mm, vérifie $p'=v$ et $p(0)=0$.

(a) Donne toutes les primitives de v sur $[0;+\infty[$, en précisant u et la constante d'ajustement.

(b) Déduis-en l'expression de $p(t)$.

(c) Sacha a écrit $p(t)=-6\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}$, et il remarque que $p(0)=0$. A-t-il raison ? Justifie en dérivant et explique son erreur.

(d) Justifie que la position reste entre deux valeurs que tu préciseras, puis donne un instant où elle est maximale.

6. Primitive vérifiant une condition initiale, équation $y'=f$

À retenir : Les primitives de f sont $F(x)+k$: j'écris k AVANT d'utiliser la condition, je trouve k, puis j'écris la fonction complète. Ex. : $F(x)=\mathrm{e}^x+k$, $F(0)=1+k$. Les solutions de $y'=f$ sont les primitives de f.

Ex. 36 ★☆☆ **Primitive prenant une valeur donnée** — Dans chaque cas, détermine la primitive F de f sur l'intervalle indiqué qui vérifie la condition donnée.

(a) $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(1) = 0$.

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(2) = 4$.

(c) $f(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 2$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(\mathrm{e}) = 0$.

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(1) = 3$.

(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(4) = 1$.

Ex. 37 ★☆☆ **Équations y′ = f avec condition initiale** — Les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f. Résous chaque équation différentielle sur l'intervalle donné, avec la condition initiale indiquée.

(a) $y' = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(1) = 2$.

(b) $y' = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0) = -1$.

(c) $y' = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

(d) $y' = \frac{3}{3x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, avec $y(0) = 5$.

(e) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(4) = 2$.

(f) $y' = \frac{4}{(x+2)^2}$ sur $]-2\,;+\infty[$, avec $y(0) = 1$.

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur d'Hugo** — Soit $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 3$ sur $\mathbb{R}$. On cherche la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 5$. Hugo écrit : « $F(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3x$, donc $F(0) = 0 - 0 = 0 \neq 5$: une telle primitive n'existe pas. »

(a) Repère les deux erreurs d'Hugo et explique-les.

(b) Donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 5$.

(d) Vrai ou faux : une autre primitive G de f, différente de F, peut aussi vérifier $G(0) = 5$. Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **Une courbe par un point, des tangentes horizontales** — Soit $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$. On étudie les courbes représentatives des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

(a) Justifie que $x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x, puis donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Détermine la primitive F de f dont la courbe passe par le point $A(1\,;3)$.

(c) Chloé affirme : « on peut choisir la constante pour que la courbe de la primitive ait une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Montre que les courbes de toutes les primitives de f ont une tangente horizontale en un même point, dont tu donneras l'abscisse.

Ex. 40 ★★★ **Le décollage d'un drone** — Un drone décolle verticalement. À l'instant t (en s), $t \geqslant 0$, son accélération est $a(t) = 4\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (en m/s²). Sa vitesse v (en m/s) est une primitive de a sur $[0\,;+\infty[$, et son altitude h (en m) est une primitive de v. À $t = 0$, la vitesse est nulle et l'altitude vaut 2 m.

(a) Donne toutes les primitives de a sur $[0\,;+\infty[$, puis détermine l'expression de $v(t)$.

(b) Justifie que la vitesse du drone augmente et qu'elle reste toujours inférieure à 8 m/s.

(c) Détermine l'expression de l'altitude $h(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(d) Calcule l'altitude du drone au bout de 10 s, arrondie au dixième de mètre.

(e) Un second drone a la même vitesse $v(t)$, mais son altitude vaut 10 m à l'instant $t = 2$. Détermine son altitude $h_2(t)$.

Ex. 41 ★★★ **Une famille de courbes et son point bas** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-4)\mathrm{e}^{x^2-4x}$. On note A le point de coordonnées $(4\,;3)$.

(a) Écris f sous la forme $u'\mathrm{e}^u$ en précisant u, puis donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe passe par A.

(c) Inès affirme : « la courbe de F passe aussi par le point $B(0\,;3)$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Étudie le signe de $f(x)$, puis détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ dont le minimum vaut 0.

Ex. 42 ★★★ **Équation y′ = f et forme imposée** — On considère l'équation différentielle $(E) : y' = (3x+5)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. On note $g(x) = (3x+5)\mathrm{e}^x$.

(a) Détermine les réels a et b tels que $G(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(b) Résous l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

(c) Détermine la solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 4$.

(d) Vrai ou faux : « Il existe une solution h de (E) telle que $h(0) = 4$ et $h(-1) = 0$. » Justifie.

7. *Primitives en situation : problèmes type bac*

À retenir : Avec une condition : j'écris toutes les primitives $F(x) + k$, la condition donne k, puis j'écris la fonction complète. Ex. : $F(x) = \mathrm{e}^{2x} + k$ et $F(0) = 1 + k$, car $\mathrm{e}^0 = 1$. Coûts fixes, position ou volume initial fixent k. F croît là où $f \geqslant 0$.

Ex. 43 ★☆☆ **Primitive prenant une valeur donnée** — Pour chaque fonction f, détermine la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué qui vérifie la condition donnée.

(a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $I = \mathbb{R}$, $F(1) = 2$.

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 1$.

(c) $f(x) = \cos(2x)$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0\,;+\infty[$, $F(1) = 0$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0\,;+\infty[$, $F(4) = 1$.

(f) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 5$.

Ex. 44 ★☆☆ **Coût, position, volume : la valeur initiale fixe la constante** — Dans chaque situation, détermine l'expression de la fonction demandée et précise son unité.

(a) Une usine produit q tonnes d'engrais. Son coût marginal est $C'(q) = 0{,}6q + 40$ (milliers d'euros par tonne) et ses coûts fixes valent 15 milliers d'euros. Donne $C(q)$.

(b) Un cycliste roule à la vitesse $v(t) = 0{,}4t + 5$ (en m/s, t en s). Sa position à $t = 0$ est 20 m. Donne sa position $x(t)$.

(c) Une luge a pour vitesse $v(t) = 6\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (en m/s, t en s). Elle part de la position 0 m. Donne sa position $x(t)$.

(d) Une pompe remplit un aquarium avec le débit $d(t) = \frac{3}{\sqrt{t+1}}$ (en L/min, t en min). À $t = 0$, l'aquarium contient 40 L. Donne le volume $V(t)$.

Ex. 45 ★★☆ **Équation y′ = f : erreurs à corriger** — Les questions portent sur des primitives et des équations différentielles de la forme $y' = f$, sur $\mathbb{R}$.

(a) Hugo résout $y' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ avec $y(0) = 3$: « $y(x) = \mathrm{e}^{x^2} + k$, $y(0) = k = 3$, donc $y(x) = \mathrm{e}^{x^2} + 3$ ». Repère son erreur et corrige.

(b) Inès cherche la primitive F de $f(x) = (2x+1)^3$ telle que $F(0) = 1$. Elle écrit : « $F(x) = \frac{(2x+1)^4}{4}$, $F(0) = \frac{1}{4} \neq 1$, donc pas de solution. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Vrai ou faux ? « L'équation $y' = \sin x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. » Justifie.

(d) Détermine la solution de $y' = \sin x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $y(\pi) = 0$.

Ex. 46 ★★☆ **Remplissage puis vidange d'un bassin** — Pour $t \in [0\,;4]$ (en heures), le débit d'eau d'un bassin est $d(t) = (2 - t)\mathrm{e}^{t}$ (en m³/h). Quand il est positif, le bassin se remplit ; quand il est négatif, il se vide. Le volume $V(t)$ (en m³) est une primitive de d sur $[0\,;4]$, avec $V(0) = 60$.

(a) Vérifie que $G(t) = (3 - t)\mathrm{e}^{t}$ est une primitive de d sur $[0\,;4]$.

(b) Déduis-en l'expression de $V(t)$.

Ex. 46 (suite)

(c) Étudie le signe de $d(t)$ sur $[0\,;4]$, puis donne les variations de V.

(d) Donne le volume maximal, en valeur exacte puis arrondi à 0,01 m³ près. Que se passe-t-il à cet instant ?

Ex. 47 ★★★ **Fabrique de skis : du coût marginal au bénéfice maximal** — Une fabrique produit q centaines de paires de skis par mois, avec $q \in [0\,;15]$. Le coût total, en milliers d'euros, est une fonction C dérivable sur $[0\,;15]$ dont le coût marginal est $C'(q) = 3q^2 - 36q + 120$.

(a) Les coûts fixes s'élèvent à 50 milliers d'euros. Détermine l'expression de $C(q)$ sur $[0\,;15]$.

(b) Sans calculer de valeurs de C, justifie que le coût total est croissant sur $[0\,;15]$.

(c) Calcule $C(10)$ et interprète ce résultat avec les unités.

(d) Chaque centaine de paires est vendue 60 milliers d'euros. Le bénéfice est $B(q) = 60q - C(q)$. Étudie les variations de B sur $[0\,;15]$.

(e) Déduis-en la production qui rend le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice, en euros.

Ex. 48 ★★★ **Le robot sur son rail : avance, recul, retour** — Un robot se déplace sur un rail rectiligne. À l'instant t (en s), $t \geqslant 0$, sa vitesse est $v(t) = (1 - t^2)\mathrm{e}^{-t}$ (en m/s). Son abscisse $p(t)$ (en m) vérifie $p' = v$ sur $[0\,;+\infty[$, et $p(0) = 0$.

(a) Détermine les réels a, b et c tels que $P(t) = (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-t}$ soit une primitive de v sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Déduis-en l'expression de $p(t)$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Étudie le signe de $v(t)$ sur $[0\,;+\infty[$, puis déduis-en les variations de p. Interprète le mouvement du robot.

(d) Donne la valeur exacte de l'abscisse maximale atteinte par le robot, puis son arrondi au centimètre.

(e) Calcule $p(3)$ et arrondis-le au centième. Le robot est-il repassé par son point de départ entre $t = 1$ et $t = 3$? Justifie.

Ex. 49 ★★★ **La citerne pendant l'orage : débordera, débordera pas ?** — Pendant un orage de 12 heures, l'eau de pluie s'écoule dans une citerne d'une capacité de 22 m³. Pour $t \in [0\,;12]$ (en h), le débit entrant est $d(t) = \frac{8t}{t^2+4}$ (en m³/h). Le volume d'eau $V(t)$ (en m³) vérifie $V' = d$ sur $[0\,;12]$, et $V(0) = 10$.

(a) Élise propose $V(t) = 4\ln(t^2 + 4) + 10$. Vérifie que $V' = d$, explique son erreur, puis donne la bonne expression de $V(t)$.

(b) Sans calculer de valeurs de V, justifie que le volume d'eau augmente pendant tout l'orage.

(c) Calcule $V(6)$ en valeur exacte, puis arrondis au dixième. Interprète ce résultat avec les unités.

(d) La citerne déborde-t-elle avant la fin de l'orage ? Si oui, détermine à quel instant, à la minute près.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Étudie les variations de d sur $[0\,;12]$. À quel instant le volume augmente-t-il le plus vite ?