1. *Vérifier qu'une fonction est une primitive*

Ex. 1 ★☆☆ **Vérifier en dérivant**

(a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 4x^3 - 6x + 7 = f(x)$: oui, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (là où ln est défini) et $F'(x) = \frac{1}{x} + 2 = f(x)$: oui, sur $]0\,;+\infty[$.

(c) $F = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$, donc $F'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2x\mathrm{e}^{x^2} \neq f(x)$ (par exemple en $x = 1$: $2\mathrm{e} \neq \mathrm{e}$). Non, F n'est pas une primitive de f.

(d) $(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, donc $F'(x) = f(x)$: oui, sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $F'(x) = 3\cos(3x) - \sin(x) = f(x)$: oui, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(f) Dérivée d'un produit : $F'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + (x+3) \times 2\mathrm{e}^{2x} = (2x+7)\mathrm{e}^{2x}$. En 0 : $F'(0) = 7$ alors que $f(0) = 6$. Non, F n'est pas une primitive de f : f oublie la dérivée du premier facteur.

Ex. 2 ★☆☆ **Deux primitives diffèrent d'une constante**

(a) $F(x) = x^2 - 6x + 9$, donc $F(x) - G(x) = 8$. $F - G$ est constante, donc $(F-G)' = 0$, soit $F' = G'$. F et G sont deux primitives de la même fonction $x \mapsto 2x - 6$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $H(x) = 2 + \frac{1}{x}$, donc $H(x) - K(x) = 2$: constante. Donc $H' = K'$, avec $K'(x) = -\frac{1}{x^2}$. H et K sont deux primitives de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Faux. $(-\mathrm{e}^{-x})' = \mathrm{e}^{-x}$, donc $-\mathrm{e}^{-x}$ est bien une primitive de f. Mais $-\mathrm{e}^{-x} + 5$ en est une autre, par exemple. f a une infinité de primitives : les $-\mathrm{e}^{-x} + k$, k réel.

(d) $(\sin(x) + x)' = \cos(x) + 1$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto \sin(x) + x + k$, k réel.

Ex. 3 ★★☆ **Forme imposée et piège du produit**

(a) Dérivée d'un produit : $G'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x} = \left(-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right)\mathrm{e}^{-x}$.

(b) Comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, il suffit que $-ax^2 + (2a-b)x + b - c = x^2 - 3x + 4$ pour tout x : $-a = 1$, $2a - b = -3$, $b - c = 4$.
Donc $a = -1$, $b = 1$, $c = -3$, et $G(x) = (-x^2 + x - 3)\mathrm{e}^{-x}$.

Ex. 3 (suite)

(c) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (-x^2 + x - 3)\mathrm{e}^{-x} + k$, k réel.

(d) $L'(x) = -(x^2 - 3x + 4)\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\mathrm{e}^{-x}$, donc $L'(0) = -4$. Or $f(0) = 4$: $L' \neq f$. L n'est pas une primitive de f : le produit des primitives n'est pas une primitive du produit.

Ex. 4 ★★☆ **L'erreur de Sacha**

(a) Sacha a dérivé f. Pour montrer que F est une primitive de f, il faut dériver F et vérifier que $F' = f$; on ne dérive jamais f.

(b) $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$: on travaille sur $I =]0\,;+\infty[$, où F et f sont définies et F est dérivable.

(c) Dérivée d'un produit : $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $G(x) = x\ln(x) + k$ avec k réel.
$G(1) = 1 \times \ln(1) + k = k$, donc $k = 3$. Ainsi $G(x) = x\ln(x) + 3$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $G' = f$ et
$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
Donc G est décroissante sur $]0\,;\mathrm{e}^{-1}]$ et croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.

Ex. 5 ★★★ **Exponentielle et sinus : identifier puis ajuster**

(a) H est un produit : $H'(x) = -2\mathrm{e}^x\cos x + (-2\mathrm{e}^x) \times (-\sin x) = 2\mathrm{e}^x\sin x - 2\mathrm{e}^x\cos x$. En 0, on a $H'(0) = -2$ alors que $f(0) = 0$.
Donc $H' \neq f$: Léa a tort. Le produit des primitives n'est pas une primitive du produit.

(b) $G'(x) = (-a\sin x + b\cos x)\mathrm{e}^x + (a\cos x + b\sin x)\mathrm{e}^x = ((a+b)\cos x + (b-a)\sin x)\,\mathrm{e}^x$.
Donc $\alpha = a + b$ et $\beta = b - a$.

(c) Il faut $G'(x) = f(x)$ pour tout réel x. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, cela revient à $(a+b)\cos x + (b-a)\sin x = 2\sin x$ pour tout x. Pour $x = 0$: $a + b = 0$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $b - a = 2$.
On obtient $b = 1$ et $a = -1$. Vérification : avec $a = -1$ et $b = 1$, $G'(x) = (0 \times \cos x + 2\sin x)\mathrm{e}^x = f(x)$.
Donc $G(x) = (\sin x - \cos x)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (\sin x - \cos x)\mathrm{e}^x + k$, avec k réel. Or $G(0) = (0-1) \times 1 = -1$, donc $-1 + k = 1$ et $k = 2$. Conclusion : $F(x) = (\sin x - \cos x)\mathrm{e}^x + 2$.

(e) $F' = f$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $F'(x)$ a le signe de $\sin x$: positif sur $[0\,;\pi]$, négatif sur $[\pi\,;2\pi]$. F est donc croissante sur $[0\,;\pi]$ puis décroissante sur $[\pi\,;2\pi]$. $F(\pi) = (0 - (-1))\mathrm{e}^\pi + 2 = \mathrm{e}^\pi + 2$: c'est le maximum de F sur $[0\,;2\pi]$.

Ex. 6 ★★★ **Logarithme : quelle primitive, sur quel intervalle ?**

(a) Pour $x > 2$, on a $x^2 > 4$, donc $u(x) = x^2 - 4 > 0$. Ainsi $F = \ln u$ est définie et dérivable sur I, avec $u'(x) = 2x$. On obtient $F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2-4} = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur I.

(b) Pour $x > 2$, on a $3x - 6 > 0$ et $x + 2 > 0$.
Donc $G(x) = \ln\left(3(x-2)(x+2)\right) = \ln 3 + \ln(x^2-4)$, d'où $G(x) - F(x) = \ln 3$. Puisque $G - F$ est constante, $(G-F)' = 0$, donc $G' = F' = f$: G est une primitive de f sur I.

(c) C'est faux. Pour $0 < x \leqslant 2$, on a $x^2 - 4 \leqslant 0$. Par exemple, $F(1) = \ln(-3)$ n'existe pas. F n'est donc pas définie sur tout $]0\,;+\infty[$, et ne peut pas être une primitive de f sur cet intervalle. L'intervalle compte autant que la formule.

(d) f a une infinité de primitives sur I : ce sont les fonctions $x \mapsto \ln(x^2-4) + k$, avec k réel. On veut $\ln(9-4) + k = 0$, donc $k = -\ln 5$. La primitive cherchée est $x \mapsto \ln(x^2-4) - \ln 5$ sur I.

(e) Pour $x < -2$, on a $x^2 > 4$, donc $x^2 - 4 > 0$. F est donc dérivable et $F'(x) = \frac{2x}{x^2-4} = f(x)$: F est une primitive de f sur $]-\infty\,;-2[$. En revanche, pour $x < -2$, on a $3x - 6 < 0$, donc $\ln(3x-6)$ n'existe pas. G n'est pas définie sur cet intervalle, ce n'est donc pas une primitive de f sur cet intervalle.

Ex. 7 ★★★ **Le chariot sur son rail**

(a) $P'(t) = a\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 0{,}5(at+b)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = (-0{,}5at + a - 0{,}5b)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$, il suffit d'avoir $-0{,}5at + a - 0{,}5b = 10t$ pour tout t. Par identification : $-0{,}5a = 10$ et $a - 0{,}5b = 0$, d'où $a = -20$ et $b = -40$.
Conclusion : $P(t) = (-20t - 40)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ est une primitive de v sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 7 **(suite)**

(b) P est bien une primitive de v, mais v en a une infinité : les fonctions $P + k$, k réel. Or $P(0) = -40 \times \mathrm{e}^0 = -40$, alors que $x(0) = 0$.
Donc P ne vérifie pas la condition initiale : Malo a tort.

(c) x est une primitive de v sur $[0\,;+\infty[$, donc $x(t) = P(t) + k$ avec k réel. Comme $x(0) = 0$, on a $-40 + k = 0$, soit $k = 40$. Conclusion : $x(t) = (-20t - 40)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 40$.

(d) $x'(t) = v(t) = 10t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$, donc x est croissante. Le chariot avance toujours dans le même sens. La distance parcourue vaut donc $x(4) - x(0) = 40 - 120\mathrm{e}^{-2} \approx 23{,}76$ m.

(e) Pour $t \geqslant 0$, on a $-20t - 40 < 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$, donc $(-20t-40)\mathrm{e}^{-0{,}5t} < 0$, c'est-à-dire $x(t) < 40$. Le chariot ne dépasse jamais la position 40 m, même s'il avance sans cesse.

2. *Primitives des fonctions usuelles et linéarité*

Ex. 8 ★☆☆ **Primitives des fonctions de référence**

(a) Terme par terme : $F(x) = 4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^2}{2} + 5x = x^4 - 3x^2 + 5x$ sur $]0\,;+\infty[$. La constante 5 donne $5x$.

(b) Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ (cas $n = -1$, pas de formule $\frac{x^{n+1}}{n+1}$).
Donc $F(x) = 2\ln x + 7x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$.
Donc $F(x) = -\frac{5}{x} - x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) On écrit $f(x) = 4x^{-3}$. Une primitive est $4 \times \frac{x^{-2}}{-2} = -2x^{-2}$, soit $F(x) = -\frac{2}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$.
Donc $F(x) = 3 \times 2\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} = 6\sqrt{x} + \frac{x^3}{3}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) Une primitive de cos est sin, une primitive de sin est $-\cos$.
Donc $F(x) = 3\sin x - 2 \times (-\cos x) = 3\sin x + 2\cos x$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 9 ★☆☆ **Fonctions de la forme f(ax + b)**

(a) Ici $a = \frac{1}{2}$: diviser par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par 2. Une primitive de cos est sin, donc $F(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Ici $a = -4$: $F(x) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$ sur $\mathbb{R}$. Contrôle : $-\frac{1}{4} \times (-4)\mathrm{e}^{1-4x} = \mathrm{e}^{1-4x}$.

(c) Une primitive de sin est $-\cos$, et $a = 2$: $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 9 **(suite)**

(d) Une primitive de cos est sin, et $a = 5$: $F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x+1)$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Une primitive de X^4 est $\frac{X^5}{5}$, et $a = 3$: $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x-2)^5}{5} = \frac{(3x-2)^5}{15}$ sur $\mathbb{R}$.

(f) On garde le coefficient 6 et on divise par $a = 2$: $F(x) = 6 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 10 ★★☆ **Transformer avant de primitiver**

(a) On développe : $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$. Terme par terme : $F(x) = 3x^3 - 3x^2 + x$. C'est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(b) On sépare le quotient : $g(x) = \frac{2x^2}{x} - \frac{5}{x} = 2x - \frac{5}{x}$. Donc $G(x) = x^2 - 5\ln x$ est une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$.

(c) On sépare : $h(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{8}{x^2} = x + \frac{8}{x^2}$. Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$, donc $H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x}$ est une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$.

(d) On développe : $k(x) = x^2 - x - 6$. Donc $K(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$ est une primitive de k sur $]0\,;+\infty[$. On ne primitive jamais facteur par facteur.

Ex. 11 ★★☆ **Les primitives d'Inès**

(a) Faux : $(\ln(x^2))' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \neq \frac{1}{x^2}$. Comme $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, une primitive est $\frac{x^{-1}}{-1}$, soit $F(x) = -\frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Faux : $(4\cos x)' = -4\sin x$. Une primitive de sin est $-\cos$, donc $F(x) = -4\cos x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Faux : $(5\mathrm{e}^{5x})' = 25\mathrm{e}^{5x}$. Il faut diviser par 5, pas multiplier : $F(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) Faux : on ne primitive pas un produit facteur par facteur. $F'(x) = x\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x \neq x\mathrm{e}^x$. En revanche, $((x-1)\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$: $(x-1)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(e) Vrai : $F'(x) = 2x + \frac{1}{x} = f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, où ln est bien définie. Inès a raison.

Ex. 12 ★★★ **Un quotient à démonter**

(a) On divise chaque terme du numérateur par x^3 : $f(x) = \frac{3x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{6}{x^3} = 3 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3}$. Donc $a = 3$, $b = -2$, $c = 4$ et $d = 6$.

Ex. 12 **(suite)**

(b) $\frac{1}{x} = x^{-1}$ correspond à $n = -1$, et $n + 1 = 0$: on diviserait par 0. Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est $\ln x$. On primitive ensuite terme à terme, en gardant les coefficients. 3 donne $3x$. $-\frac{2}{x}$ donne $-2\ln x$. $4x^{-2}$ donne $4 \times \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{4}{x}$. $6x^{-3}$ donne $6 \times \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{3}{x^2}$. Une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est donc $F_0(x) = 3x - 2\ln x - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}$.

(c) Les primitives de f sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions $F_0 + k$, avec k réel. Or $F_0(1) = 3 - 0 - 4 - 3 = -4$. La condition $F(1) = 1$ donne $-4 + k = 1$, donc $k = 5$. On conclut : $F(x) = 3x - 2\ln x - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + 5$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) Une telle primitive s'écrit $G = F_0 + k$. La condition $G(1) = 0$ impose $k = 4$. On calcule alors $G(\mathrm{e}) = 3\mathrm{e} - 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} - \frac{3}{\mathrm{e}^2} + 4 = 3\mathrm{e} + 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} - \frac{3}{\mathrm{e}^2} \approx 8{,}28$. Ce nombre n'est pas nul. Aucune primitive de f ne s'annule à la fois en 1 et en e.

Ex. 13 ★★★ **La position d'un drone**

(a) Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$. Ici $a = 2$ et $b = 1$, donc une primitive de $\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$ est $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2t+1} = \sqrt{2t+1}$. Le coefficient 6 se conserve. Une primitive de $t \mapsto \frac{6}{\sqrt{2t+1}}$ sur $[0\,;+\infty[$ est donc $t \mapsto 6\sqrt{2t+1}$.

(b) Une primitive de sin est $-\cos$. Ici $a = \pi$, donc une primitive de $\sin(\pi t)$ est $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)$. Celle de $4\sin(\pi t)$ est $-\frac{4}{\pi}\cos(\pi t)$. Par linéarité, les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto 6\sqrt{2t+1} - \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) + k$, avec k réel.

(c) p est l'une de ces primitives : $p(t) = 6\sqrt{2t+1} - \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) + k$. On a $p(0) = 6 - \frac{4}{\pi} + k = 0$, donc $k = \frac{4}{\pi} - 6$. On conclut : $p(t) = 6\sqrt{2t+1} - \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) + \frac{4}{\pi} - 6$.

(d) $\cos(\pi) = -1$, donc $p(1) = 6\sqrt{3} + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} - 6 = 6\sqrt{3} - 6 + \frac{8}{\pi} \approx 6{,}94$ m. $\cos(4\pi) = 1$, donc $p(4) = 6 \times 3 - \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} - 6 = 12$. À $t = 4$ s, le drone se trouve à 12 m de son point de départ.

Ex. 14 ★★★ **Le coût total d'un atelier de vélos**

(a) La constante 3 a pour primitive $3q$, et non 0 ni 3. Une primitive de e^{aq} est $\frac{1}{a}\mathrm{e}^{aq}$. Avec $a = -0{,}5$, on divise par $-0{,}5$, ce qui revient à multiplier par -2. Une primitive de $6\mathrm{e}^{-0{,}5q}$ est donc $6 \times (-2)\mathrm{e}^{-0{,}5q} = -12\mathrm{e}^{-0{,}5q}$. Une primitive de C_m sur $[0\,;10]$ est $q \mapsto 3q - 12\mathrm{e}^{-0{,}5q}$.

(b) On a $C(q) = 3q - 12\mathrm{e}^{-0{,}5q} + k$, avec k réel. Or $C(0) = -12 + k = 10$, donc $k = 22$. On conclut : $C(q) = 3q - 12\mathrm{e}^{-0{,}5q} + 22$.

Ex. 14 (suite)

(c) 400 vélos correspondent à $q = 4$. On calcule $C(4) = 12 - 12\mathrm{e}^{-2} + 22 = 34 - 12\mathrm{e}^{-2} \approx 32{,}376$. Le coût total vaut environ 32 376 €.

(d) $C(6) - C(4) = (18 - 12\mathrm{e}^{-3}) - (12 - 12\mathrm{e}^{-2}) = 6 + 12\mathrm{e}^{-2} - 12\mathrm{e}^{-3} \approx 7{,}027$. Le coût total augmente d'environ 7 027 €.

(e) Faux. Si $C(0) = 20$, on a $-12 + k = 20$, donc $k = 32$. Le nouveau coût est $3q - 12\mathrm{e}^{-0{,}5q} + 32 = C(q) + 10$. Deux primitives de C_m ne diffèrent que d'une constante : le coût augmente de 10 milliers d'euros, il ne double pas. Par exemple, en $q = 4$ il passe d'environ 32,4 à 42,4, et non à 64,8.

3. *Formes u′uⁿ, u′/u² et u′/√u*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : la forme u′uⁿ**

(a) $u(x) = 2x - 5$ et $u'(x) = 2$, donc $f = \frac{1}{2}u'u^4$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-5)^5}{5} = \frac{(2x-5)^5}{10}$.

(b) $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$, donc $f = 3u'u^2$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = 3 \times \frac{(x^2-1)^3}{3} = (x^2-1)^3$.

(c) $u(x) = x^3 + 2$ et $u'(x) = 3x^2$, donc $f = \frac{1}{3}u'u^4$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(x^3+2)^5}{5} = \frac{(x^3+2)^5}{15}$.

(d) $u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \cos x$, donc $f = u'u^3$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{(\sin x)^4}{4}$.

(e) Avec $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$, mais aucun x n'apparaît en facteur. Or on ne peut pas ajuster un x, seulement une constante. On développe : $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x$.

(f) $u(x) = \mathrm{e}^x + 3$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f = u'u^2$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{(\mathrm{e}^x+3)^3}{3}$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : u′/u², u′uⁿ avec n < 0, u′/√u**

(a) $u(x) = 3x + 2$ et $u'(x) = 3$. Sur $]-\frac{2}{3}\,;+\infty[$, $u(x) > 0$, donc $u(x) \neq 0$. On a $f = \frac{u'}{u^2}$, donc $F(x) = -\frac{1}{3x+2}$ (attention au signe $-$).

(b) $u(x) = x^2 + 4$, avec $u(x) \geqslant 4$ donc $u(x) \neq 0$, et $u'(x) = 2x$. Ici $f = \frac{1}{2}u'u^{-3}$, avec $n = -3$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+4)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2}$.

(c) $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$. Sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$, $u(x) > 0$. On a $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2x+1} = \sqrt{2x+1}$.

(d) $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$, avec $u(x) > 0$, et $u'(x) = \mathrm{e}^x$. On a $f = \frac{u'}{u^2}$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

Ex. 16 (suite)

(e) $u(x) = \sin x + 2$, avec $u(x) \geqslant 1 > 0$, et $u'(x) = \cos x$. On a $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{\sin x + 2}$.

(f) $u(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$ et $u'(x) = 2x + 2$. On a $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+2x+3}$.

Ex. 17 ★★☆ **Les propositions de Léa**

(a) Non. Le dénominateur est au carré : f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + 3$, et non $\frac{u'}{u}$. On vérifie : $F'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, alors que $f(1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$. Comme $u(x) \neq 0$, une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = -\frac{1}{x^2+3}$.

(b) Non, Léa a oublié le signe $-$. Avec $u(x) = 2x + 1$, on a $u'(x) = 2$ et $g = 3 \times \frac{u'}{u^2}$. Sa proposition donne $G'(x) = -\frac{6}{(2x+1)^2} = -g(x)$. Comme $u(x) \neq 0$ sur l'intervalle, la bonne réponse est $G(x) = -\frac{3}{2x+1}$.

(c) Non, Léa a oublié d'ajuster la constante. Avec $u(x) = x^2 + 9 > 0$, on a $u'(x) = 2x$, donc $h = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Sa proposition donne $H'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} = 2h(x)$. La bonne réponse est $H(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+9} = \sqrt{x^2+9}$.

(d) Oui. Avec $u(x) = 5x + 1$ et $u'(x) = 5$, on a $k = \frac{1}{5}u'u^3$, d'où $K(x) = \frac{1}{5} \times \frac{(5x+1)^4}{4}$. Contrôle : $K'(x) = \frac{4 \times 5(5x+1)^3}{20} = k(x)$. La proposition de Léa est juste.

(e) Non. Avec $u(x) = x^2 + 5$, on a $u(x) \geqslant 5 > 0$ et $u'(x) = 2x$, donc $m = 2u'u^{-3}$, avec $n = -3$. L'exposant de la primitive est $n + 1 = -2$, mais Léa a pris -4 (elle a calculé $n - 1$). Sa proposition donne $M'(x) = \frac{4x}{(x^2+5)^5} \neq m(x)$. Une primitive de m sur $\mathbb{R}$ est $M(x) = 2 \times \frac{(x^2+5)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{(x^2+5)^2}$.

Ex. 18 ★★☆ **Le robot sur son rail**

(a) On pose $u(t) = t^2 + 16$. Alors $u(t) \geqslant 16 > 0$ et $u'(t) = 2t$, donc $v = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Une primitive est $\frac{3}{2} \times 2\sqrt{t^2+16} = 3\sqrt{t^2+16}$. Les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions $t \mapsto 3\sqrt{t^2+16} + k$, avec k réel.

(b) On a $d(t) = 3\sqrt{t^2+16} + k$ et $d(0) = 3 \times 4 + k = 12 + k$. Comme $d(0) = 0$, on obtient $k = -12$.
Donc $d(t) = 3\sqrt{t^2+16} - 12$.

(c) $d(3) = 3\sqrt{25} - 12 = 15 - 12 = 3$. Pendant les 3 premières secondes, le robot parcourt donc 3 m.

(d) On résout $3\sqrt{t^2+16} - 12 = 13{,}5$, soit $\sqrt{t^2+16} = 8{,}5$. On obtient $t^2 + 16 = 72{,}25$, donc $t^2 = 56{,}25$. Comme $t \geqslant 0$, $t = 7{,}5$. Le robot a parcouru 13,5 m au bout de 7,5 s.

Ex. 19 ★★★ **Un dénominateur qui s'annule**

(a) Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 8 = 1$. Les racines sont donc $x = 1$ et $x = 2$. En ces points, f n'est pas définie. Une primitive se cherche sur un intervalle où f est continue, c'est-à-dire où u ne s'annule pas : $]-\infty\,;1[$, $]1\,;2[$ ou $]2\,;+\infty[$. Sur $]2\,;+\infty[$, on a $u(x) > 0$, donc $u(x) \neq 0$.

(b) $u'(x) = 2x - 3$, donc $4x - 6 = 2(2x - 3)$ et $f = 2 \times \frac{u'}{u^2}$ avec $\lambda = 2$. Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$ (attention au signe $-$). Les primitives de f sur $]2\,;+\infty[$ sont donc les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{x^2-3x+2} + k$, avec k réel.

(c) $F(x) = -\frac{2}{x^2-3x+2} + k$. Comme $u(3) = 9 - 9 + 2 = 2$, on a $F(3) = -1 + k$. La condition $F(3) = 0$ donne $k = 1$. Conclusion : $F(x) = 1 - \frac{2}{x^2-3x+2}$ sur $]2\,;+\infty[$.

(d) $2x^2 - 6x + 2 = 2(x^2 - 3x + 2) - 2$, donc $G(x) = 2 - \frac{2}{x^2-3x+2}$. On a $a = 2$ et $b = -2$.

(e) $G(x) = 2 - \frac{2}{u(x)}$ est de la forme $-\frac{2}{u} + k$ avec $k = 2$. C'est donc une primitive de f sur $]2\,;+\infty[$. De plus, $G(x) - F(x) = 2 - 1 = 1$: deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Ex. 20 ★★★ **Ajuster une constante, pas un x**

(a) La dérivée de $\frac{(x^2+2)^3}{3}$ vaut $\frac{3(x^2+2)^2 \times 2x}{3} = 2x(x^2+2)^2$. Ce n'est pas $g(x)$, donc Malik a tort. Son erreur : g n'est pas de la forme $\lambda u' u^2$, car $u'(x) = 2x$ n'apparaît pas. On ne peut ajuster qu'une constante, jamais un facteur x.

(b) On développe : $g(x) = x^4 + 4x^2 + 4$. Par linéarité, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x$.

(c) On pose $u(x) = x^2 + 2$, donc $u'(x) = 2x$. Alors $h = \frac{1}{2} \times 2x(x^2+2)^2 = \frac{1}{2} u' u^2$, avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Une primitive de $u'u^2$ est $\frac{u^3}{3}$. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc $H(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+2)^3}{3} = \frac{(x^2+2)^3}{6}$.

(d) On pose $u(x) = 4x - 3$, donc $u'(x) = 4$ et $(4x-3)^5 = \frac{1}{4} u' u^5$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = \frac{1}{4} \times \frac{(4x-3)^6}{6} + k = \frac{(4x-3)^6}{24} + k$, avec k réel. La condition $y(1) = \frac{1}{24} + k = 0$ donne $k = -\frac{1}{24}$. La solution cherchée est $y(x) = \frac{(4x-3)^6}{24} - \frac{1}{24}$.

(e) On pose $u(x) = 4x - 3$, donc $u'(x) = 4$. Pour $x > \frac{3}{4}$, on a $u(x) > 0$. Comme $6 = \frac{3}{2} \times 4$, on écrit $p = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Une primitive de p sur $]\frac{3}{4}\,;+\infty[$ est donc $P(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{4x-3} = 3\sqrt{4x-3}$.

Ex. 21 ★★★ **L'atelier de bijoux**

(a) Pour tout q, on a $q^2 \geqslant 0$, donc $u(q) \geqslant 1 > 0$: u ne s'annule pas. De plus, $u'(q) = 2q$, donc $\frac{8q}{(q^2+1)^3} = 4 \times 2q \times (q^2+1)^{-3}$. On obtient $\lambda = 4$ et $n = -3$.

(b) Une primitive de $u'u^{-3}$ est $\frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2u^2}$. Une primitive de $\frac{8q}{(q^2+1)^3}$ est donc $4 \times \left(-\frac{1}{2(q^2+1)^2}\right) = -\frac{2}{(q^2+1)^2}$. Les primitives de C_m sur $[0\,;10]$ sont les fonctions $q \mapsto 3q - \frac{2}{(q^2+1)^2} + k$, avec k réel.

(c) $C(0) = 0 - \frac{2}{1} + k = k - 2$. La condition $C(0) = 5$ donne $k = 7$. Conclusion : $C(q) = 3q + 7 - \frac{2}{(q^2+1)^2}$ sur $[0\,;10]$.

(d) $C(q) = 3q + 7 - 2(q^2+1)^{-2}$, donc $C'(q) = 3 - 2 \times (-2) \times 2q \times (q^2+1)^{-3} = 3 + \frac{8q}{(q^2+1)^3} = C_m(q)$. Le résultat est vérifié.

(e) 200 bijoux correspondent à $q = 2$. On calcule $C(2) = 6 + 7 - \frac{2}{25} = 12{,}92$. Le coût total de fabrication de 200 bijoux est de 12 920 euros.

4. *Formes u′/u et u′e^u*

Ex. 22 ★★★ **Automatismes : forme $u'\mathrm{e}^u$**

(a) On pose $u(x) = -x$, donc $u'(x) = -1$. Alors $f = -5\,u'\mathrm{e}^u$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = -5\mathrm{e}^{-x}$.

(b) On pose $u(x) = 3x - 2$, donc $u'(x) = 3$. Alors $f = \frac{1}{3}\,u'\mathrm{e}^u$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-2}$.

(c) On pose $u(x) = x^2 + x$, donc $u'(x) = 2x + 1$. On a exactement $f = u'\mathrm{e}^u$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}$.

(d) On pose $u(x) = \cos x$, donc $u'(x) = -\sin x$. Alors $f = -u'\mathrm{e}^u$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = -\mathrm{e}^{\cos x}$.

(e) On pose $u(x) = x^3$, donc $u'(x) = 3x^2$. Alors $f = \frac{1}{3}\,u'\mathrm{e}^u$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}$.

(f) On pose $u(x) = \sin(2x)$, donc $u'(x) = 2\cos(2x)$. Alors $f = \frac{1}{2}\,u'\mathrm{e}^u$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sin(2x)}$.

Ex. 23 ★★★ **Automatismes : forme $\frac{u'}{u}$**

(a) On pose $u(x) = x^2 + 5$, donc $u'(x) = 2x$ et $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Alors $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+5)$.

(b) On pose $u(x) = 2x - 6$, donc $u'(x) = 2$ et $u(x) > 0$ pour $x > 3$. Alors $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$. Sur $]3\,;+\infty[$, $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-6)$.

(c) On pose $u(x) = \mathrm{e}^x + 2$, donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. On a $f = \frac{u'}{u}$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$.

Ex. 23 **(suite)**

(d) On pose $u(x) = 1 + \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$. Pour $x > \mathrm{e}^{-1}$, $\ln x > -1$, donc $u(x) > 0$. On a $f = \frac{u'}{u}$. Sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$, $F(x) = \ln(1 + \ln x)$.

(e) On pose $u(x) = x^2 + 3x + 4$, donc $u'(x) = 2x + 3$. $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$, donc $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$.

(f) On pose $u(x) = 2 + \sin x$, donc $u'(x) = \cos x$. Comme $\sin x \geqslant -1$, on a $u(x) \geqslant 1 > 0$. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln(2 + \sin x)$.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux ? Justifie.**

(a) Faux : $F'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x+1} = \frac{1}{3x+1} \neq f(x)$. Le dénominateur est au carré : avec $u = 3x + 1$, $f = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u^2}$. Donc sur $]0\,;+\infty[$, une primitive est $-\frac{1}{3(3x+1)}$.

(b) Vrai : avec $u(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1 > 0$ et $u'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$, on a $g = \frac{u'}{u}$, donc $x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{2x} + 1)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Or $G(x) = \ln\big(3(\mathrm{e}^{2x} + 1)\big) = \ln 3 + \ln(\mathrm{e}^{2x} + 1)$. G en diffère d'une constante : c'est aussi une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(c) Faux : $H'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}(4x^2-2)}{4x^2}$, et par exemple $H'(1) = \frac{\mathrm{e}}{2} \neq \mathrm{e} = h(1)$. Il manque le facteur $u' = 2x$ devant e^{x^2} : ce n'est pas la forme $u'\mathrm{e}^u$. h a des primitives, mais aucune ne s'écrit explicitement avec les fonctions du programme.

(d) Vrai : $u(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x - 2$, donc $k = \frac{u'}{u}$. On a bien $K' = k$: K est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

Ex. 25 ★★☆ **Primitives avec une condition**

(a) On pose $u(x) = x^3 + 8$, donc $u'(x) = 3x^2$. Si $x > -2$, alors $x^3 > -8$, donc $u(x) > 0$. Ainsi $f = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u}$. Les primitives de f sur $]-2\,;+\infty[$ sont $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(x^3 + 8) + c$, c réel. $F(0) = \frac{1}{3}\ln 8 + c = \ln 2 + c$, donc $c = 0$. Conclusion : $F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3 + 8)$ sur $]-2\,;+\infty[$.

(b) Sur $]-\infty\,;5[$, $x - 5 < 0$: $\ln(x-5)$ n'existe pas. On pose $u(x) = 5 - x > 0$, donc $u'(x) = -1$, et $\frac{u'}{u} = \frac{-1}{5-x} = \frac{1}{x-5}$. Conclusion : les solutions sur $]-\infty\,;5[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(5-x) + c$, c réel.

(c) On pose $u(x) = 1 - x^2$, donc $u'(x) = -2x$ et $k = -\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$. Les primitives de k sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + c$, c réel. $K(1) = -\frac{1}{2} + c = 0$ donne $c = \frac{1}{2}$. Conclusion : $K(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 26 ★★★ **Coût total d'une production de vélos**

(a) On pose $u(q) = q^2 + 4$, donc $u'(q) = 2q$. Alors $\frac{6q}{q^2+4} = 3 \times \frac{2q}{q^2+4} = 3 \times \frac{u'}{u}$. Pour tout q, $q^2 \geqslant 0$ donc $u(q) \geqslant 4 > 0$. Une primitive sur $[0\,;10]$ est $q \mapsto 3\ln(q^2 + 4)$.

(b) Les primitives de C_m sur $[0\,;10]$ sont les fonctions $q \mapsto 2q + 3\ln(q^2 + 4) + k$, avec k réel. On a $C(0) = 3\ln 4 + k = 5$, donc $k = 5 - 3\ln 4 = 5 - 6\ln 2$. Conclusion : $C(q) = 2q + 3\ln(q^2 + 4) + 5 - 6\ln 2$.

(c) $C(4) = 8 + 3\ln 20 + 5 - 6\ln 2 = 13 + 3\ln 20 - 3\ln 4 = 13 + 3\ln\frac{20}{4} = 13 + 3\ln 5$. Comme $C(4) \approx 17{,}828$, produire 400 vélos coûte environ 17 828 €.

(d) $\frac{8}{(2q+1)^2} = 4 \times \frac{2}{(2q+1)^2} = 4 \times \frac{u'}{u^2}$, avec $u(q) = 2q + 1$ et $u'(q) = 2$. On a $u \neq 0$ sur $[0\,;10]$. C'est la forme $\frac{u'}{u^2}$, pas $\frac{u'}{u}$. Malik a tort : sa fonction a pour dérivée $1 + \frac{16}{2q+1}$, qui vaut 17 en 0, alors que $D_m(0) = 9$. Une primitive correcte de D_m sur $[0\,;10]$ est $q \mapsto q - \frac{4}{2q+1}$.

(e) $C'(q) = C_m(q) = 2 + \frac{6q}{q^2+4}$. Sur $[0\,;10]$, on a $6q \geqslant 0$ et $q^2 + 4 > 0$, donc $C'(q) \geqslant 2 > 0$. Conclusion : le coût total C est strictement croissant sur $[0\,;10]$.

Ex. 27 ★★★ **Le vol d'un drone**

(a) On a $v = 4 \times \frac{u'}{u}$ avec $u(t) = \mathrm{e}^t + 1$ et $u'(t) = \mathrm{e}^t$. Condition : $u(t) > 0$. C'est vrai car $\mathrm{e}^t > 0$. Une primitive de v sur $[0\,;5]$ est $t \mapsto 4\ln(\mathrm{e}^t + 1)$.

(b) Les primitives de v sur $[0\,;5]$ sont $t \mapsto 4\ln(\mathrm{e}^t + 1) + k$, k réel. $h(0) = 4\ln 2 + k = 0$, donc $k = -4\ln 2$. Ainsi $h(t) = 4\ln(\mathrm{e}^t + 1) - 4\ln 2$. Alors $h(5) = 4\ln(\mathrm{e}^5 + 1) - 4\ln 2 \approx 17{,}3$: en fin de montée, le drone est à environ 17,3 m.

(c) $h' = v > 0$, donc h est strictement croissante sur $[0\,;5]$. On résout $h(t) = 10$: $4\ln\frac{\mathrm{e}^t+1}{2} = 10$, soit $\frac{\mathrm{e}^t+1}{2} = \mathrm{e}^{5/2}$, donc $\mathrm{e}^t = 2\mathrm{e}^{5/2} - 1$. Conclusion : $t_0 = \ln(2\mathrm{e}^{5/2} - 1) \approx 3{,}15$ s, qui est bien dans $[0\,;5]$.

(d) On pose $u(s) = -s^2$, donc $u'(s) = -2s$. Alors $w(s) = 4 \times (-2s)\,\mathrm{e}^{-s^2} = 4u'\mathrm{e}^u$. Une primitive de w sur $[0\,;+\infty[$ est $s \mapsto 4\mathrm{e}^{-s^2}$.

(e) Les primitives de w sont $s \mapsto 4\mathrm{e}^{-s^2} + k$, k réel. $a(0) = 4 + k = h(5)$, donc $a(s) = 4\mathrm{e}^{-s^2} + h(5) - 4$. Comme $\mathrm{e}^{-s^2} > 0$, on a $a(s) > h(5) - 4 \approx 13{,}3 > 0$. Conclusion : le drone ne touche jamais le sol.

Ex. 28 ★★★ **Formes cachées avec $\ln x$**

(a) Si $x > 2$, alors $x > 1$, donc $\ln x > 0$. On pose $u(x) = \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$. Alors $f = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$ sur I. Une primitive de f sur I est $F(x) = \ln(\ln x)$.

(b) $g(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u'u$ avec $u = \ln$. C'est la forme $u'u^n$ avec $n = 1$, et non $\frac{u'}{u}$. Une primitive de g sur I est $G(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$.

(c) $h(x) = \frac{2}{x \ln x} + \frac{(\ln x)^2}{x \ln x} = 2f(x) + g(x)$. Par linéarité, $H(x) = 2\ln(\ln x) + \frac{(\ln x)^2}{2} + c$, avec c réel. On a $H(\mathrm{e}) = 2\ln 1 + \frac{1}{2} + c = 1$, donc $c = \frac{1}{2}$. Conclusion : $H(x) = 2\ln(\ln x) + \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{1}{2}$ sur I.

(d) Sur I, $\ln x > 0$, donc $P(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x)$ et $P'(x) = \frac{1}{2x \ln x}$. En e : $P'(\mathrm{e}) = \frac{1}{2\mathrm{e}} \neq \frac{1}{\mathrm{e}} = p(\mathrm{e})$. Sacha a tort. Avec $u = \ln x > 0$ sur I et $u' = \frac{1}{x}$, on a $p = \frac{u'}{\sqrt{u}}$: c'est la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, pas $\frac{u'}{u}$. Conclusion : une primitive de p sur I est $x \mapsto 2\sqrt{\ln x}$.

(e) $f(1)$ n'existe pas car $\ln 1 = 0$: f n'est donc pas définie (ni continue) sur tout $]0\,;+\infty[$. De plus, $\ln x \leqslant 0$ sur $]0\,;1]$, donc $\ln(\ln x)$ n'y a pas de sens. Il faut travailler sur $]1\,;+\infty[$ ou sur un intervalle inclus dans celui-ci.

5. *Formes u'cos u, u'sin u et (v'∘u) × u'*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : primitives trigonométriques en ligne**

(a) Une primitive de cos est sin, une primitive de sin est $-\cos$.
Donc $F(x) = 5\sin x - 2 \times (-\cos x) = 5\sin x + 2\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$: $f = \frac{1}{2} \times u' \cos u$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$, $u'(x) = \frac{1}{2}$: $f = 2 \times u' \sin u$.
Donc $F(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$
(avec le signe moins !).

(d) $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $f = \frac{1}{2} \times u' \cos u$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$: $f = u' \sin u$.
Donc $F(x) = -\cos(x^3)$ sur $\mathbb{R}$.

(f) $u(x) = \mathrm{e}^x$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$: $f = u' \cos u$.
Donc $F(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : repérer u, puis la forme**

(a) $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$: $f = u'u$, forme $u'u^n$ avec $n = 1$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$, et $u(x) > 0$ donc $u(x) \neq 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $f = -\frac{u'}{u^2}$. Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$.
Donc $F(x) = \frac{1}{\cos x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

(c) $u(x) = \cos(2x)$, $u'(x) = -2\sin(2x)$: $f = -\frac{1}{2} \times u'\mathrm{e}^u$.
Donc $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\cos(2x)}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $u(x) = 3 - \cos x$, $u'(x) = \sin x$: $f = \frac{u'}{u}$. Comme $\cos x \leqslant 1$, on a $u(x) \geqslant 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $F(x) = \ln(3 - \cos x)$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$, et $u(x) > 0$ sur $]0\,;\pi[$: $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$.
Donc $F(x) = 2\sqrt{\sin x}$ sur $]0\,;\pi[$.

(f) $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v = \sin$, donc $v' = \cos$: $f = (v' \circ u) \times u'$.
Donc $F(x) = v(u(x)) = \sin(\ln x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 31 ★★☆ **Trois affirmations à contrôler**

(a) $F'(x) = \frac{1}{4} \times (-4\sin(4x)) = -\sin(4x)$, car la dérivée de cos est $-\sin$.
Donc $F' \neq f$: Léna a tort, elle s'est trompée de signe.
Une primitive correcte est $-\frac{1}{4}\cos(4x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On dérive un quotient : $G'(x) = \frac{2x\cos(x^2) \times 2x - 2\sin(x^2)}{4x^2} = \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{2x^2}$. Pour $x = \sqrt{\pi/2}$, on a $\sin(x^2) = 1$, donc $G'(x) \neq g(x)$. Yanis a tort : on ne divise pas par u'. Ici, g n'est pas de la forme $u' \cos u$.

(c) $F'(x) = 2 \times 2\cos x \times (-\sin x) = -4\sin x \cos x$ et $G'(x) = -2\sin(2x) = -4\sin x \cos x$.
Donc $F' = G'$: F et G sont deux primitives de $x \mapsto -4\sin x \cos x$. D'ailleurs, $F(x) - G(x) = 2\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1) = 1$ est constante. C'est vrai.

Ex. 32 ★★☆ **Le bouchon qui oscille**

(a) $u(t) = 2t$, $u'(t) = 2$: $v = \frac{3}{2} \times u' \cos u$. Les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{3}{2}\sin(2t) + k$, k réel.

(b) $h(t) = \frac{3}{2}\sin(2t) + k$ et $h(0) = 0 + k = 1$, donc $k = 1$.
Ainsi $h(t) = \frac{3}{2}\sin(2t) + 1$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = 2{,}5$. À $t = \frac{\pi}{4}$ s, le bouchon est à 2,5 cm.

Ex. 32 **(suite)**

(d) $h(t) = 1$ équivaut à $\frac{3}{2}\sin(2t) = 0$, c'est-à-dire $\sin(2t) = 0$.
Donc $2t = n\pi$, avec n entier, soit $t = \frac{n\pi}{2}$. Le premier instant $t > 0$ est $t = \frac{\pi}{2}$ s : le bouchon repasse alors à 1 cm.

Ex. 33 ★★★ **Démasquer v et u**

(a) On pose $u(x) = x^2 + 2x$, donc $u'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$, et $v = -\cos$, donc $v' = \sin$. Alors $f(x) = \frac{1}{2} \times \sin(x^2 + 2x) \times (2x + 2)$, c'est-à-dire $k = \frac{1}{2}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 2x)$.
Contrôle : $F'(x) = -\frac{1}{2} \times (-\sin(x^2 + 2x)) \times (2x + 2) = f(x)$.

(b) On pose $u(x) = \cos x$, donc $u'(x) = -\sin x$, et $v = \sin$, donc $v' = \cos$. Alors $h(x) = -\cos(\cos x) \times (-\sin x)$, c'est-à-dire $h = -(v' \circ u) \times u'$ et $k = -1$. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = -\sin(\cos x)$. Contrôle : $H'(x) = -\cos(\cos x) \times (-\sin x) = h(x)$.

(c) On pose $u(x) = \cos x$, donc $u'(x) = -\sin x$. Alors $g = -u'u^2$, donc $k = -1$. Une primitive de $u'u^2$ est $\frac{u^3}{3}$. Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$, avec c réel. Contrôle : $\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)' = -\frac{1}{3} \times 3\cos^2 x \times (-\sin x) = g(x)$.

(d) $G(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$ et $G(0) = -\frac{1}{3} + c = 0$, donc $c = \frac{1}{3}$ et $G(x) = \frac{1-\cos^3 x}{3}$. Comme $\cos x \leqslant 1$ et que la fonction cube est croissante, on a $\cos^3 x \leqslant 1$.
Donc $G(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.

Ex. 34 ★★★ **Un logarithme, une exponentielle et une condition initiale**

(a) Pour tout réel x, $\sin x \geqslant -1$, donc $2 + \sin x \geqslant 1 > 0$.
On pose $u(x) = 2 + \sin x$, donc $u'(x) = \cos x$ et $g = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$ sur $\mathbb{R}$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc $G(x) = \ln(2 + \sin x)$.

(b) Nora a tort : $H'(x) = -\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x} = -h(x)$, à cause du signe de $(\cos x)' = -\sin x$. Avec $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$, donc $h = -u'\mathrm{e}^u$. Une primitive correcte de h sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = -\mathrm{e}^{\cos x}$.

(c) y est une primitive de $g + h$, donc $y(x) = \ln(2 + \sin x) - \mathrm{e}^{\cos x} + c$ avec c réel. On a $y(0) = \ln 2 - \mathrm{e} + c = \ln 2$, donc $c = \mathrm{e}$. Ainsi, $y(x) = \ln(2 + \sin x) - \mathrm{e}^{\cos x} + \mathrm{e}$.

(d) $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln(2 + 1) - \mathrm{e}^0 + \mathrm{e} = \ln 3 - 1 + \mathrm{e}$.

Ex. 35 ★★★ **La membrane du haut-parleur**

(a) On pose $u(t) = 3t + \frac{\pi}{4}$, donc $u'(t) = 3$. Alors $v = \frac{2}{3} \times u' \sin u$, et une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$. Les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions $t \mapsto -\frac{2}{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) + k$, avec k réel.

(b) $p(0) = -\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{4} + k = -\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + k = 0$, donc $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Ainsi, $p(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ pour $t \geqslant 0$.

(c) Sacha a tort : la condition $p(0) = 0$ est bien vérifiée, mais sa fonction a pour dérivée $18\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \neq v(t)$. Il a multiplié par 3 au lieu de diviser par $u' = 3$. Sa fonction n'est donc pas une primitive de v.

(d) Comme $-1 \leqslant \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, on a $\frac{\sqrt{2}-2}{3} \leqslant p(t) \leqslant \frac{\sqrt{2}+2}{3}$. Le maximum est atteint quand $\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, par exemple pour $3t + \frac{\pi}{4} = \pi$, soit $t = \frac{\pi}{4}$ ms. On a alors $p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{3}$ mm.

6. *Primitive vérifiant une condition initiale, équation $y' = f$*

Ex. 36 ★☆☆ **Primitive prenant une valeur donnée**

(a) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = x^4 - 3x^2 + x + k$, k réel. $F(1) = 1 - 3 + 1 + k = -1 + k = 0$ donne $k = 1$:
$F(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$.

(b) $f = u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x - 2$, $u'(x) = 1$: $F(x) = \mathrm{e}^{x-2} + k$ sur $\mathbb{R}$. $F(2) = \mathrm{e}^0 + k = 1 + k = 4$, donc $k = 3$:
$F(x) = \mathrm{e}^{x-2} + 3$.

(c) $F(x) = -\cos x + k$ sur $\mathbb{R}$.
$F(0) = -\cos 0 + k = -1 + k = 2$, donc $k = 3$:
$F(x) = 3 - \cos x$.

(d) $F(x) = \ln x + k$ sur $]0\,;+\infty[$.
$F(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} + k = 1 + k = 0$, donc $k = -1$:
$F(x) = \ln x - 1$.

(e) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$: $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ sur $]0\,;+\infty[$.
$F(1) = -1 + k = 3$, donc $k = 4$: $F(x) = 4 - \frac{1}{x}$.

(f) $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ sur $]0\,;+\infty[$.
$F(4) = 2 \times 2 + k = 4 + k = 1$, donc $k = -3$:
$F(x) = 2\sqrt{x} - 3$.

Ex. 37 ★☆☆ **Équations y′ = f avec condition initiale**

(a) $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$: $(2x - 1)^3 = \frac{1}{2}u'u^3$, donc $y(x) = \frac{(2x-1)^4}{8} + k$ sur $\mathbb{R}$. $y(1) = \frac{1}{8} + k = 2$ donne $k = \frac{15}{8}$: $y(x) = \frac{(2x-1)^4+15}{8}$.

(b) $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $y(x) = \mathrm{e}^{x^2} + k$ sur $\mathbb{R}$.
$y(0) = \mathrm{e}^0 + k = 1 + k = -1$, donc $k = -2$:
$y(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 2$.

Ex. 37 (suite)

(c) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x)$: $y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + k$ sur $\mathbb{R}$. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + k = \frac{1}{2} + k = 0$, donc $k = -\frac{1}{2}$: $y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}$.

(d) $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3x + 1 > 0$ sur l'intervalle : $y(x) = \ln(3x+1) + k$. $y(0) = \ln 1 + k = 0 + k = 5$, donc $k = 5$: $y(x) = \ln(3x+1) + 5$.

(e) $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 9 > 0$: $y(x) = \sqrt{x^2+9} + k$ sur $\mathbb{R}$. $y(4) = \sqrt{25} + k = 5 + k = 2$, donc $k = -3$: $y(x) = \sqrt{x^2+9} - 3$.

(f) $4 \times \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x + 2 \neq 0$ sur l'intervalle : $y(x) = -\frac{4}{x+2} + k$. $y(0) = -2 + k = 1$, donc $k = 3$: $y(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$.

Ex. 38 ★★☆ L'erreur d'Hugo

(a) Première erreur : $\mathrm{e}^0 = 1$, pas 0. Seconde erreur : Hugo utilise une seule primitive, sans la constante k ; il faut écrire toutes les primitives avant d'utiliser la condition. Sa conclusion est donc fausse.

(b) $2\mathrm{e}^{2x} = u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc $F(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3x + k$, k réel.

(c) $F(0) = \mathrm{e}^0 - 0 + k = 1 + k$, et $1 + k = 5$ donne $k = 4$. La primitive cherchée est $F(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3x + 4$.

(d) Faux. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ avec c réel ; $G(0) = 5 + c = 5$ impose $c = 0$, donc $G = F$. La primitive valant 5 en 0 est unique.

Ex. 39 ★★☆ Une courbe par un point, des tangentes horizontales

(a) $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 3 \geqslant 3 > 0$. Ainsi $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$, $u'(x) = 2x$: les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = \ln(x^2+3) + k$, k réel.

(b) $F(1) = \ln 4 + k$, et $\ln 4 + k = 3$ donne $k = 3 - \ln 4$. La primitive dont la courbe passe par A est $F(x) = \ln(x^2+3) + 3 - \ln 4$.

(c) Non. Le coefficient directeur de la tangente en 1 est $F'(1) = f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$, quel que soit k : la constante ne change pas la dérivée. Chloé a donc tort.

(d) Pour toute primitive F, on a $F'(x) = f(x)$, et $f(x) = 0$ équivaut à $2x = 0$, soit $x = 0$. Toutes les courbes ont donc une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Ex. 40 ★★★ Le décollage d'un drone

(a) On reconnaît la forme e^{mt} avec $m = -0{,}5$: une primitive de $\mathrm{e}^{-0,5t}$ est $\frac{1}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5t} = -2\mathrm{e}^{-0,5t}$. Les primitives de a sur $[0\,;+\infty[$ sont donc $t \mapsto -8\mathrm{e}^{-0,5t} + k$, k réel. Or $v(0) = -8\mathrm{e}^0 + k = -8 + k$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$), et $-8 + k = 0$ donne $k = 8$. Conclusion : $v(t) = 8 - 8\mathrm{e}^{-0,5t}$.

(b) $v'(t) = a(t) = 4\mathrm{e}^{-0,5t} > 0$, donc v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: la vitesse augmente. De plus $8\mathrm{e}^{-0,5t} > 0$, donc $v(t) = 8 - 8\mathrm{e}^{-0,5t} < 8$. Conclusion : la vitesse augmente et reste inférieure à 8 m/s.

(c) Une primitive de 8 est $8t$. Une primitive de $-8\mathrm{e}^{-0,5t}$ est $-8 \times \frac{1}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5t} = 16\mathrm{e}^{-0,5t}$. Donc $h(t) = 8t + 16\mathrm{e}^{-0,5t} + k$, k réel. Or $h(0) = 0 + 16 \times 1 + k = 16 + k$, et $16 + k = 2$ donne $k = -14$. Conclusion : $h(t) = 8t + 16\mathrm{e}^{-0,5t} - 14$.

(d) $h(10) = 80 + 16\mathrm{e}^{-5} - 14 = 66 + 16\mathrm{e}^{-5} \approx 66{,}1$. Conclusion : au bout de 10 s, le drone est à environ 66,1 m d'altitude.

(e) h_2 est aussi une primitive de v : $h_2(t) = 8t + 16\mathrm{e}^{-0,5t} + k$, k réel. La condition porte en $t = 2$: $h_2(2) = 16 + 16\mathrm{e}^{-1} + k$, et $16 + 16\mathrm{e}^{-1} + k = 10$ donne $k = -6 - 16\mathrm{e}^{-1}$. Conclusion : $h_2(t) = 8t + 16\mathrm{e}^{-0,5t} - 6 - 16\mathrm{e}^{-1}$.

Ex. 41 ★★★ Une famille de courbes et son point bas

(a) On pose $u(x) = x^2 - 4x$, donc $u'(x) = 2x - 4$ et $f = u'\mathrm{e}^u$. Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u. Conclusion : les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-4x} + k$, k réel.

(b) On cherche k tel que $F(4) = 3$. Or $4^2 - 4 \times 4 = 0$, donc $F(4) = \mathrm{e}^0 + k = 1 + k$, et $1 + k = 3$ donne $k = 2$. Conclusion : $F(x) = \mathrm{e}^{x^2-4x} + 2$.

(c) $0^2 - 4 \times 0 = 0$, donc $F(0) = \mathrm{e}^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ (et non $0 + 2$). Le point B est donc sur la courbe de F : Inès a raison.

(d) $\mathrm{e}^{x^2-4x} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $2x - 4$: négatif sur $]-\infty\,;2]$, positif sur $[2\,;+\infty[$. Chaque primitive est décroissante puis croissante, de minimum $\mathrm{e}^{4-8} + k = \mathrm{e}^{-4} + k$ en $x = 2$. $\mathrm{e}^{-4} + k = 0$ donne $k = -\mathrm{e}^{-4}$. Conclusion : $G(x) = \mathrm{e}^{x^2-4x} - \mathrm{e}^{-4}$.

Ex. 42 ★★★ **Équation $y' = f$ et forme imposée**

(a) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$. On veut $G' = g$: par identification des coefficients, $a = 3$ et $a + b = 5$, donc $b = 2$. Conclusion : $G(x) = (3x+2)e^x$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(b) Les solutions de $y' = g$ sont exactement les primitives de g. Conclusion : les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (3x+2)e^x + k$, k réel.

(c) $y(0) = (0+2)e^0 + k = 2 + k$ (car $e^0 = 1$), et $2 + k = 4$ donne $k = 2$. Conclusion : $y(x) = (3x+2)e^x + 2$.

(d) Faux. La condition $h(0) = 4$ impose $k = 2$: la seule solution qui convient est $y(x) = (3x+2)e^x + 2$. Or $y(-1) = -e^{-1} + 2 = 2 - \frac{1}{e} \neq 0$ (car $\frac{1}{e} < 1$). Conclusion : aucune solution ne vérifie les deux conditions.

7. *Primitives en situation : problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ **Primitive prenant une valeur donnée**

(a) Sur $\mathbb{R}$, les primitives de f sont $F(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$, k réel.
$F(1) = 1 - 2 + 1 + k = k$, donc $k = 2$:
$F(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

(b) Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + k$. $F(0) = \frac{1}{3} + k$ (car $e^0 = 1$), donc $\frac{1}{3} + k = 1$ et $k = \frac{2}{3}$: $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$.

(c) Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + k$.
$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + k = \frac{1}{2} + k = 0$, donc $k = -\frac{1}{2}$:
$F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}$.

(d) $f(x) = x^{-2}$: sur $]0;+\infty[$, $F(x) = -\frac{1}{x} + k$.
$F(1) = -1 + k = 0$, donc $k = 1$: $F(x) = -\frac{1}{x} + 1$.

(e) Sur $]0;+\infty[$, $F(x) = 2\sqrt{x} + k$.
$F(4) = 2 \times 2 + k = 4 + k = 1$, donc $k = -3$:
$F(x) = 2\sqrt{x} - 3$.

(f) $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ et $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: $F(x) = \ln(x^2+1) + k$. $F(0) = \ln 1 + k = k$, donc $k = 5$: $F(x) = \ln(x^2+1) + 5$.

Ex. 44 ★☆☆ **Coût, position, volume : la valeur initiale fixe la constante**

(a) C est une primitive de C' sur $[0;+\infty[$: $C(q) = 0{,}3q^2 + 40q + k$, k réel. Les coûts fixes sont $C(0) = k = 15$, donc $C(q) = 0{,}3q^2 + 40q + 15$, en milliers d'euros.

Ex. 44 (suite)

(b) La position est une primitive de la vitesse sur $[0;+\infty[$: $x(t) = 0{,}2t^2 + 5t + k$, k réel. $x(0) = k = 20$, donc $x(t) = 0{,}2t^2 + 5t + 20$, en mètres.

(c) Sur $[0;+\infty[$, $x(t) = 6 \times \frac{e^{-0,5t}}{-0,5} + k = -12e^{-0,5t} + k$, k réel. $x(0) = -12 + k = 0$ (car $e^0 = 1$), donc $k = 12$: $x(t) = 12 - 12e^{-0,5t}$, en mètres.

(d) Le volume est une primitive du débit. $d(t) = 3 \times \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, donc sur $[0;+\infty[$, $V(t) = 6\sqrt{t+1} + k$, k réel.
$V(0) = 6\sqrt{1} + k = 6 + k = 40$, donc $k = 34$:
$V(t) = 6\sqrt{t+1} + 34$, en litres.

Ex. 45 ★★☆ **Équation $y' = f$: erreurs à corriger**

(a) La forme des solutions est juste ($u'e^u$ avec $u(x) = x^2$), mais $y(0) = e^0 + k = 1 + k$, pas k.
Donc $1 + k = 3$, $k = 2$: la solution est $y(x) = e^{x^2} + 2$.

(b) Non. Elle oublie la constante k et le coefficient : $f = \frac{1}{2}u'u^3$ avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, donc $F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} + k$. $F(0) = \frac{1}{8} + k = 1$ donne $k = \frac{7}{8}$: $F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} + \frac{7}{8}$.

(c) Faux. Les solutions sont les primitives de sin : $y(x) = -\cos x + k$, k réel. Il y en a une infinité ; seule une condition initiale rend la solution unique.

(d) $y(x) = -\cos x + k$ et $y(\pi) = -\cos\pi + k = 1 + k$.
Donc $1 + k = 0$ et $k = -1$: la solution est $y(x) = -\cos x - 1$.

Ex. 46 ★★☆ **Remplissage puis vidange d'un bassin**

(a) On dérive un produit : $G'(t) = -e^t + (3-t)e^t = (2-t)e^t = d(t)$. Conclusion : G est une primitive de d sur $[0;4]$.

(b) $V(t) = (3-t)e^t + k$. $V(0) = 3 \times e^0 + k = 3 + k = 60$, donc $k = 57$: $V(t) = (3-t)e^t + 57$.

(c) $e^t > 0$, donc $d(t)$ a le signe de $2 - t$: $d(t) \geqslant 0$ sur $[0;2]$ et $d(t) \leqslant 0$ sur $[2;4]$. Comme $V' = d$, V est croissante sur $[0;2]$ puis décroissante sur $[2;4]$.

(d) Le maximum est atteint en $t = 2$: $V(2) = e^2 + 57 \approx 64{,}39$ m³. Au bout de 2 h, le bassin contient le plus d'eau : il cesse de se remplir et commence à se vider.

Ex. 47 ★★★ **Fabrique de skis : du coût marginal au bénéfice maximal**

(a) C est une primitive de C' sur $[0;15]$, donc $C(q) = q^3 - 18q^2 + 120q + k$ avec k réel. Les coûts fixes correspondent à $C(0) = 50$, et $C(0) = k$, donc $k = 50$. Conclusion : $C(q) = q^3 - 18q^2 + 120q + 50$.

Ex. 47 (suite)

(b) $C'(q) = 3(q^2 - 12q + 40)$. Le discriminant de $q^2 - 12q + 40$ vaut $\Delta = 144 - 160 = -16 < 0$, donc ce trinôme est du signe de son coefficient dominant : il est strictement positif. Ainsi $C'(q) > 0$ sur $[0\,;15]$. Conclusion : C est strictement croissante, plus on produit, plus le coût total est élevé.

(c) $C(10) = 1000 - 1800 + 1200 + 50 = 450$. Conclusion : produire 10 centaines, soit 1 000 paires de skis, coûte 450 milliers d'euros, soit 450 000 €.

(d) $B'(q) = 60 - C'(q) = -3q^2 + 36q - 60 = -3(q^2 - 12q + 20) = -3(q-2)(q-10)$. Ce trinôme est négatif à l'extérieur de ses racines 2 et 10, et positif entre elles. Conclusion : B est décroissante sur $[0\,;2]$, croissante sur $[2\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;15]$.

(e) D'après les variations, le maximum de B est atteint en $q = 0$ ou en $q = 10$. On a $B(0) = -50$ et $B(10) = 600 - 450 = 150$. Conclusion : le bénéfice est maximal pour 1 000 paires de skis par mois et vaut 150 milliers d'euros, soit 150 000 €.

Ex. 48 ★★★ Le robot sur son rail : avance, recul, retour

(a) On dérive un produit : $P'(t) = (2at + b)\mathrm{e}^{-t} - (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-t} = \left(-at^2 + (2a - b)t + b - c\right)\mathrm{e}^{-t}$. On identifie avec $v(t) = (-t^2 + 0t + 1)\mathrm{e}^{-t}$: $-a = -1$, $2a - b = 0$ et $b - c = 1$, donc $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$. Conclusion : $P(t) = (t^2 + 2t + 1)\mathrm{e}^{-t} = (t+1)^2\mathrm{e}^{-t}$.

(b) p est une primitive de v, donc $p(t) = (t+1)^2\mathrm{e}^{-t} + k$ avec k réel. On a $p(0) = 1 \times \mathrm{e}^0 + k = 1 + k$ (attention, $\mathrm{e}^0 = 1$), et $1 + k = 0$ donne $k = -1$. Conclusion : $p(t) = (t+1)^2\mathrm{e}^{-t} - 1$.

(c) Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, $v(t)$ a le signe de $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$. Sur $[0\,;+\infty[$, on a $1 + t > 0$, donc $v(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$ et $v(t) \leqslant 0$ sur $[1\,;+\infty[$. Conclusion : p est croissante sur $[0\,;1]$ puis décroissante sur $[1\,;+\infty[$. Le robot avance pendant 1 s, puis il recule.

(d) Le maximum de p est atteint en $t = 1$: $p(1) = 4\mathrm{e}^{-1} - 1 = \frac{4}{\mathrm{e}} - 1 \approx 0{,}47$. Conclusion : le robot va au plus loin à l'abscisse $\frac{4}{\mathrm{e}} - 1$ m, soit environ 0,47 m (47 cm).

Ex. 48 (suite)

(e) $p(3) = 16\mathrm{e}^{-3} - 1 \approx -0{,}20$. Sur $[1\,;3]$, p est continue et strictement décroissante, avec $p(1) \approx 0{,}47 > 0$ et $p(3) \approx -0{,}20 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, p s'annule une seule fois sur $]1\,;3[$. Conclusion : oui, le robot repasse par son point de départ ; à $t = 3$, il est à environ 20 cm derrière ce point.

Ex. 49 ★★★ La citerne pendant l'orage : débordera, débordera pas ?

(a) $d(t) = 4 \times \frac{2t}{t^2+4} = 4 \times \frac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = t^2 + 4 > 0$ et $u'(t) = 2t$: la dérivée de $4\ln(t^2+4) + 10$ est bien $d(t)$. Mais pour la fonction d'Élise, $V(0) = 4\ln 4 + 10 \neq 10$, car $\ln 4 \neq 0$: la constante est fausse. On écrit $V(t) = 4\ln(t^2+4) + k$, avec $V(0) = 4\ln 4 + k = 10$, donc $k = 10 - 4\ln 4$. Conclusion : $V(t) = 4\ln(t^2+4) + 10 - 4\ln 4 = 4\ln\left(\frac{t^2+4}{4}\right) + 10$.

(b) Pour $t \in [0\,;12]$, $8t \geqslant 0$ et $t^2 + 4 > 0$, donc $V'(t) = d(t) \geqslant 0$ (nul seulement en $t = 0$). Conclusion : V est croissante sur $[0\,;12]$, le volume d'eau ne fait qu'augmenter pendant l'orage.

(c) $V(6) = 4\ln\left(\frac{40}{4}\right) + 10 = 4\ln 10 + 10 \approx 19{,}2$. Conclusion : au bout de 6 heures d'orage, la citerne contient environ 19,2 m³ d'eau.

(d) $V(12) = 4\ln 37 + 10 \approx 24{,}4 > 22$: la citerne déborde. On résout $V(t) = 22$: $4\ln\left(\frac{t^2+4}{4}\right) = 12$, donc $\frac{t^2+4}{4} = \mathrm{e}^3$, d'où $t^2 = 4(\mathrm{e}^3 - 1)$ et $t = 2\sqrt{\mathrm{e}^3 - 1} \approx 8{,}737$ h, car $t \geqslant 0$. Or $0{,}737 \times 60 \approx 44$. Conclusion : la citerne déborde au bout d'environ 8 h 44 min.

(e) $d'(t) = \frac{8(t^2+4) - 8t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{8(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$. Ce quotient a le signe de $4 - t^2 = (2-t)(2+t)$, donc il est positif sur $[0\,;2]$ et négatif sur $[2\,;12]$. d est croissante puis décroissante, avec un maximum $d(2) = \frac{16}{8} = 2$. Conclusion : le volume augmente le plus vite à $t = 2$ h, au rythme de 2 m³/h. Il continue ensuite d'augmenter, mais moins vite.