Terminale maths complémentaires / Primitives

benprof particulier.fr

42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Vérifier qu'une fonction est une primitive, équation $y' = f$

À retenir : F est une primitive de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$: je dérive F, jamais f. Les primitives sont les $F(x) + k$. On ne dit « la » primitive qu'avec une condition. Ex. : $(x^2 + 3)' = 2x$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : je dérive F** — Dans chaque cas, montre que F est une primitive de f sur l'intervalle I indiqué, en dérivant F.

a. $F(x) = x^4 - 3x^2 + 7$, $f(x) = 4x^3 - 6x$, $I = \mathbb{R}$.

b. $F(x) = -\dfrac{2}{x}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $I =]0\,;+\infty[$.

c. $F(x) = 4\sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $I =]0\,;+\infty[$.

d. $F(x) = \dfrac{1}{5}e^{5x-2}$, $f(x) = e^{5x-2}$, $I = \mathbb{R}$.

e. $F(x) = x\ln x - x$, $f(x) = \ln x$, $I =]0\,;+\infty[$.

f. $F(x) = \ln(2x+3)$, $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$, $I =]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?** — Dans chaque cas, dis si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifie.

a. Si F est une primitive de f sur I, alors $F + 5$ est aussi une primitive de f sur I.

b. La primitive de $f(x) = 8x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = 4x^2$.

c. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = e^x + 4$ sont les fonctions $x \mapsto e^x + 4x + k$, k réel.

d. $F(x) = \ln x$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

e. $F(x) = x^2e^x$ est une primitive de $f(x) = 2xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

f. $F(x) = e^{2x}$ est une primitive de $f(x) = 2e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = F(x)$.

Ex. 3 ★★☆ **L'erreur de Malik** — Sur $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = 4xe^{2x}$ et $F(x) = (2x-1)e^{2x}$. Pour savoir si F est une primitive de f, Malik calcule $f'(x) = (8x+4)e^{2x}$. Il remarque que ce n'est pas $F(x)$ et conclut que F n'est pas une primitive de f.

a. Explique l'erreur de raisonnement de Malik.

b. Montre que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c. Donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

d. Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 5$.

Ex. 4 ★★☆ **Trouver a et b** — On cherche deux réels a et b tels que $F(x) = (ax+b)e^x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = (3x-1)e^x$.

a. Calcule $F'(x)$ en fonction de a et b.

b. Détermine a et b par identification des coefficients.

c. Déduis-en toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = (3x-1)e^x$.

d. Détermine la solution y de cette équation telle que $y(1) = 0$.

Ex. 5 ★★☆ **Deux primitives, une constante** — Sur $I =]0\,;+\infty[$, on pose $F(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ et $G(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x}$.

a. Calcule $F'(x)$ avec la dérivée d'un quotient.

b. Calcule $G'(x)$.

c. Qu'en déduis-tu pour F et G sur I ?

d. Calcule $F(x) - G(x)$. Ce résultat est-il cohérent avec la question précédente ? Justifie.

e. Détermine la primitive H de $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ sur I telle que $H(1) = 0$.

Ex. 6 ★★★ **Type bac : une primitive avec ln** — On considère la fonction f définie par $f(x) = 4x\ln(x)$ et la fonction F définie par $F(x) = 2x^2\ln(x) - x^2$.

a. Sur quel intervalle I travailler ? Justifie, puis montre que F est une primitive de f sur I.

b. Lina écrit : « La primitive de f sur I est F. » A-t-elle raison ? Justifie.

c. Déduis-en une primitive sur I de $g(x) = x\ln(x)$.

d. Détermine la primitive G de f sur I telle que $G(1) = 3$.

e. Calcule la valeur exacte de $G(e)$.

Ex. 7 ★★★ **Le réservoir de Saint-Malo** — À Saint-Malo, une cuve d'eau de pluie contient 2 m³ à $t = 0$. Son débit d'arrivée est $q(t) = 4t\,e^{-0{,}5t}$ en m³/h (t en heures, $t \geqslant 0$). Son volume $V(t)$, en m³, vérifie $V' = q$. On pose $F(t) = -(8t+16)e^{-0{,}5t}$.

a. Montre que F est une primitive de q sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déduis-en toutes les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = q$.

c. Théo propose $V(t) = F(t) + 2$, « car la cuve contient 2 m³ au départ ». A-t-il raison ? Justifie, puis donne $V(t)$.

d. Calcule le volume d'eau dans la cuve au bout de 4 heures. Donne la valeur exacte, puis une valeur arrondie au dixième.

Ex. 7 **(suite)**

(e) Justifie que le volume d'eau dans la cuve ne diminue jamais.

2. *Primitives des fonctions usuelles et linéarité*

À retenir : Je sors les coefficients et je primitive terme à terme : $k \to kx$, $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $e^{ax+b} \to \frac{1}{a}e^{ax+b}$. Pour un produit, je développe d'abord : $x(x+2) = x^2 + 2x$ a pour primitive $\frac{x^3}{3} + x^2$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : fonctions de référence** — Donne une primitive F de f sur l'intervalle indiqué.

(a) $f(x) = 7$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x^6$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = 4e^x - 2x^3$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) $f(x) = \dfrac{8}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(g) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : fonctions de $ax+b$** — Reconnais une forme $f(ax+b)$, ajuste le coefficient $\frac{1}{a}$ et donne une primitive F de f sur l'intervalle indiqué.

(a) $f(x) = \dfrac{5}{4x+1}$ sur $]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty[$.

(b) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = (3x-2)^4$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x+5}$ sur $]-\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = 6e^{-2x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

(f) $f(x) = (1-x)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 10 ★★☆ **Les erreurs de Léna** — Léna a cherché une primitive F de chaque fonction f. Pour chaque proposition : a-t-elle raison ? Justifie en dérivant et corrige si besoin.

(a) $f(x) = x^5$ sur $\mathbb{R}$; Léna propose $F(x) = 5x^4$.

(b) $f(x) = x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$; Léna propose $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

(c) $f(x) = e^{5x+1}$ sur $\mathbb{R}$; Léna propose $F(x) = 5e^{5x+1}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$; Léna propose $F(x) = \frac{1}{x}$.

(e) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$; Léna propose $F(x) = 8\sqrt{x}$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux avec Hugo** — Hugo a noté quatre affirmations dans son cahier. Pour chacune : vrai ou faux ? Justifie.

(a) Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $f(x) = (x+1)(x-3)$ est $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)$.

(b) Sur $\mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ est une primitive de $g(x) = x^2$.

(c) Sur $]0\,;+\infty[$, $H(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $h(x) = \ln x$.

(d) Sur $\mathbb{R}$, $P(x) = (x+2)^2$ et $Q(x) = x^2 + 4x$ sont deux primitives d'une même fonction.

Ex. 12 ★★☆ **Transformer en somme avant de primitiver** — Chaque fonction est un produit ou un quotient. Écris-la comme une somme de fonctions de référence, puis donne une primitive F sur l'intervalle indiqué.

(a) $f(x) = (x+3)(2x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) $f(x) = \dfrac{5x^3-2}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $f(x) = \dfrac{3x+\sqrt{x}}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = e^x(e^x+2)$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13 ★★★ **Le réservoir d'une ferme près de Gap** — Une source remplit le réservoir d'une ferme près de Gap. Le débit d'entrée est $d(t) = 5 + \frac{6}{3t+2} - 4e^{-t}$ (en m³/h), où t est le temps en heures, avec $t \geqslant 0$. Le volume $V(t)$ (en m³) vérifie $V'(t) = d(t)$, et à l'instant $t = 0$ le réservoir contient 50 m³.

(a) Donne une primitive de chacun des trois termes de d sur $[0\,;+\infty[$. Nomme à chaque fois la forme que tu reconnais.

(b) Déduis-en l'expression de $V(t)$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Calcule le volume du réservoir au bout de 10 heures. Arrondis au dixième.

(d) Justifie que $d(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Qu'en déduis-tu pour les variations de V ?

(e) Le réservoir déborde au-delà de 120 m³. À la calculatrice, détermine la première heure entière où le volume dépasse 120 m³.

Ex. 14 ★★★ **Deux méthodes, deux primitives : où est le problème ?** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^3$. Inès et Malo cherchent chacun une primitive de f, mais ils n'utilisent pas la même méthode.

(a) Méthode de Malo : développe $(2x-1)^3$, puis donne une primitive F_1 de f sur $\mathbb{R}$ en primitivant terme à terme.

(b) Méthode d'Inès : sans développer, reconnais une forme $f(ax+b)$ et donne une primitive F_2 de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Calcule $F_2(x) - F_1(x)$. Les résultats de Malo et d'Inès se contredisent-ils ? Justifie.

Ex. 14 **(suite)**

(d) Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

(e) Sur $]0\,;+\infty[$, on pose $h(x) = \frac{(2x-1)^3+4x\sqrt{x}}{x^2}$. Écris $h(x)$ comme une somme de fonctions de référence, puis donne une primitive H de h.

3. *Formes $2u'u$ et $u'e^u$*

À retenir : Je repère u, je calcule u' et j'ajuste un coefficient constant, jamais un facteur en x. Ex. : $x(x^2-7) = \frac{1}{4} \times 2u'u$ avec $u = x^2-7$, d'où une primitive $\frac{1}{4}(x^2-7)^2$. Une primitive de $2u'u$ est u^2 (pas $\frac{u^3}{3}$) ; de $u'e^u$, c'est e^u.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : la forme $2u'u$** — Chaque fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Repère u et u', ajuste le coefficient constant, puis donne une primitive.

(a) $f(x) = 6(3x-2)$

(b) $f(x) = x(x^2+6)$

(c) $f(x) = 6x^2(2x^3-1)$

(d) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-5)$

(e) $f(x) = 2e^x(e^x+1)$

(f) $f(x) = x(5-x^2)$

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : la forme $u'e^u$** — Chaque fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Repère u et u', ajuste le coefficient constant, puis donne une primitive.

(a) $f(x) = (6x^2-5)e^{2x^3-5x}$

(b) $f(x) = 3x\,e^{x^2}$

(c) $f(x) = 4x\,e^{1-x^2}$

(d) $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$

(e) $f(x) = x^2e^{x^3+1}$

(f) $f(x) = 12x^3e^{x^4}$

Ex. 17 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Léna cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = (4x-6)(x^2-3x+2)$. Elle écrit $F(x) = \frac{(x^2-3x+2)^3}{3}$.

(a) Dérive la fonction F de Léna. Compare $F'(-1)$ et $f(-1)$, puis conclus.

(b) Reconnais la forme de f et donne une primitive correcte. Contrôle ton résultat en dérivant.

(c) Malo cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h(x) = 6x\,e^{2-3x^2}$ et écrit $H(x) = e^{2-3x^2}$. Dérive H, explique son erreur et corrige-la.

Ex. 18 ★★☆ **Vrai ou faux ?** — Toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie.

(a) Une primitive de $f(x) = (1-2x)e^{x-x^2}$ est $F(x) = e^{x-x^2}$.

(b) Une primitive de $g(x) = 10x(x^2-4)$ est $G(x) = 10(x^2-4)^2$.

(c) En divisant par $2x$, on obtient avec les formes du cours une primitive de $x \mapsto e^{x^2}$.

(d) $F(x) = e^{-x^2}+3$ et $G(x) = e^{-x^2}-1$ sont deux primitives d'une même fonction.

Ex. 19 ★★☆ **La croissance d'un plant de tomate** — Sacha suit la croissance d'un plant de tomate. Sa vitesse de croissance, en cm par semaine, est $v(t) = 2t\,e^{-0{,}1t^2}$ pour $t \in [0\,;+\infty[$, où t est en semaines. On note $h(t)$ la hauteur du plant en cm, avec $h' = v$ et $h(0) = 5$.

(a) Écris v sous la forme $k \times u'e^u$ en précisant u et k. Donne ensuite toutes les primitives de v.

(b) Détermine $h(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(c) Calcule la hauteur du plant au bout de 3 semaines, arrondie au millimètre.

(d) Justifie que le plant reste toujours plus petit que 15 cm.

Ex. 20 ★★★ **Type bac : deux formes composées et une condition initiale** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x(x^2-1) - 8x\,e^{-2x^2}$. On note $g(x) = 3x(x^2-1)$ et $h(x) = -8x\,e^{-2x^2}$, de sorte que $f = g + h$.

(a) Avec $u(x) = x^2-1$, écris g sous la forme $k \times 2u'u$, où k est un nombre réel. Donne ensuite une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(b) Choisis une fonction u adaptée et écris h sous la forme $k \times u'e^u$. Attention au signe. Donne ensuite une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

(c) Déduis-en la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 3$. Contrôle ton résultat en dérivant.

(d) Noé affirme : « Sur $]0\,;+\infty[$, une primitive de $x \mapsto e^{-2x^2}$ est $G(x) = \frac{e^{-2x^2}}{-4x}$. » Calcule $G'(x)$. Noé a-t-il raison ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Le coût de production d'une fromagerie** — Une fromagerie de Rodez produit q tonnes de fromage par mois, avec $q \in [0\,;10]$. Le coût marginal, en milliers d'euros par tonne, est $C_m(q) = q(0{,}1q^2+3)+2$. Le coût total C, en milliers d'euros, est une primitive de C_m sur $[0\,;10]$. Les coûts fixes valent $C(0) = 20$ milliers d'euros.

(a) On pose $u(q) = 0{,}1q^2+3$. Écris $q(0{,}1q^2+3)$ sous la forme $k \times 2u'(q)u(q)$, puis donnes-en une primitive sur $[0\,;10]$.

(b) Détermine l'expression de $C(q)$. Contrôle ton résultat en dérivant.

(c) Calcule le coût total de production de 10 tonnes.

Ex. 21 (suite)

(d) Yanis, le gérant, affirme : « Passer de 4 à 6 tonnes coûte plus cher que passer de 0 à 4 tonnes. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

4. *Forme u′/u : primitives avec ln*

À retenir : Si $u > 0$ sur I, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln u$. On n'ajuste qu'un nombre, jamais un facteur en x : $\frac{x}{x^2+2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+2}$ a pour primitive $\frac{1}{2}\ln(x^2+2)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : la forme u′/u exacte** — Pour chaque fonction f, sur l'intervalle indiqué, justifie que le dénominateur $u(x)$ est strictement positif, puis donne une primitive de f.

(a) $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+7}$ sur $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+3}$ sur $\mathbb{R}$

(d) $f(x) = \dfrac{2}{2x-4}$ sur $]2;+\infty[$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}$ sur $]0;+\infty[$

(f) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+5}$ sur $\mathbb{R}$

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : ajuster le coefficient** — Sur l'intervalle indiqué, écris f sous la forme $k \times \frac{u'}{u}$ avec k un nombre, puis donne une primitive de f.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{5x+2}$ sur $\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$

(b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+9}$ sur $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^3+1}$ sur $]-1;+\infty[$

(d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+5}$ sur $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

(f) $f(x) = \dfrac{-x}{4-x^2}$ sur $]-2;2[$

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux : les pièges du logarithme** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse, par exemple en dérivant.

(a) Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln(e^x+1) - x$ est une primitive de $f(x) = -\frac{1}{e^x+1}$.

(b) Sur $]0;+\infty[$, $F(x) = \ln(5x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$.

(c) $H(x) = \ln(x-3)$ est une primitive de $h(x) = \frac{1}{x-3}$ sur $]0;+\infty[$.

(d) Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Pour trouver une primitive de $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$, Inès écrit : « je pose $u(x) = x^2+4$, donc $F(x) = \ln(x^2+4)$ ».

(a) Calcule $F'(x)$ et compare-le à $f(x)$. Inès a-t-elle raison ? Justifie.

(b) Corrige son travail : donne une primitive de f sur $\mathbb{R}$ en ajustant le coefficient.

(c) Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 0$.

(d) Inès veut appliquer la même méthode à $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Explique pourquoi c'est impossible.

Ex. 26 ★★☆ **Coût total d'une brasserie** — Une brasserie de Rodez produit q centaines de litres de bière, avec $q \in [0;10]$. Le coût marginal, en milliers d'euros, est $C_m(q) = 2 + \frac{6}{2q+1}$. Le coût total C vérifie $C' = C_m$ et les coûts fixes valent $C(0) = 5$.

(a) Justifie que $2q+1 > 0$ sur $[0;10]$, puis écris $\frac{6}{2q+1}$ sous la forme $k \times \frac{u'(q)}{u(q)}$.

(b) Détermine une primitive de C_m sur $[0;10]$.

(c) Détermine l'expression de $C(q)$.

(d) Calcule le coût total de production de 400 litres, arrondi à l'euro.

Ex. 27 ★★★ **Logarithme du logarithme** — Sur $]1;+\infty[$, on considère les fonctions $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

(a) Justifie que $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$. Écris g sous la forme $\frac{u'}{u}$ en précisant u, puis donne une primitive G de g.

(b) Maël affirme : « une primitive de f est $F(x) = (\ln x)^2$ ». Calcule $F'(x)$. Maël a-t-il raison ? Justifie, puis corrige en nommant la forme reconnue.

(c) Détermine la primitive H de $h = 4f - 3g$ sur $]1;+\infty[$ telle que $H(e) = 5$.

(d) Peut-on utiliser l'expression de G trouvée sur l'intervalle $]0;1[$? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Remplissage d'une citerne à Colmar** — Une citerne de Colmar se remplit pendant 10 heures. Pour $t \in [0;10]$ (en heures), le débit, en litres par heure, est $d(t) = \frac{60e^{0,5t}}{e^{0,5t}+4}$. Le volume $V(t)$, en litres, est une primitive de d sur $[0;10]$, et la citerne contient 200 litres au départ.

(a) Justifie que $e^{0,5t} + 4 > 0$ sur $[0;10]$, puis écris $d(t)$ sous la forme $k \times \frac{u'(t)}{u(t)}$ avec k un nombre.

(b) Détermine l'expression de $V(t)$ sur $[0;10]$.

(c) Calcule le volume contenu dans la citerne au bout de 10 heures, arrondi au litre.

(d) Lou propose $W(t) = \frac{120}{e^{0,5t}+4}$ pour le volume. Calcule $W'(t)$. W est-elle une primitive de d ? Justifie.

5. *Primitive vérifiant une condition initiale*

À retenir : Les primitives de f sont les $F_0(x)+k$: j'écris d'abord le $+k$, puis je remplace x par x_0 et je résous en k. La primitive obtenue est unique. Piège : $e^0=1$ et $\ln 1=0$, donc avec $F(x)=e^x+k$, on a $F(0)=1+k$.

Ex. 29 ★☆☆ **Condition initiale : fonctions de référence** — Pour chaque fonction f, détermine la primitive F de f sur l'intervalle indiqué qui vérifie la condition donnée.

(a) $f(x)=6x^2+2$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(1)=3$.

(b) $f(x)=4x^3-5$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0)=-2$.

(c) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(1)=0$.

(d) $f(x)=\frac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(1)=5$.

(e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(4)=1$.

(f) $f(x)=3e^x$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0)=-1$.

Ex. 30 ★☆☆ **Équations $y'=f$ avec condition initiale** — Pour chaque équation différentielle, reconnais la forme de f puis détermine l'unique solution y sur l'intervalle indiqué qui vérifie la condition donnée. Donne k en valeur exacte.

(a) $y'=e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0)=1$.

(b) $y'=e^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0)=0$.

(c) $y'=\frac{1}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$, avec $y(1)=0$.

(d) $y'=3x^2e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0)=3$.

(e) $y'=\frac{6x}{3x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0)=4$.

(f) $y'=4x(x^2-3)$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(1)=0$.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — On cherche la primitive F de $f(x)=4e^{2x}-1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=5$. Inès écrit : « Une primitive est $2e^{2x}-x$. Comme $F(0)=5$, on a $k=5$, donc $F(x)=2e^{2x}-x+5$. »

(a) Calcule $F(0)$ pour la fonction proposée par Inès. Sa réponse est-elle correcte ? Justifie.

(b) Explique l'erreur commise par Inès.

(c) Détermine la bonne primitive F en rédigeant les étapes.

(d) Contrôle ta réponse : vérifie que $F'(x)=f(x)$ et que $F(0)=5$.

Ex. 32 ★★☆ **Vrai ou faux : unicité et contrôle** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) $F(x)=x-\ln x$ et $G(x)=x-\ln x+2$ sont deux primitives de $f(x)=1-\frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Il existe deux primitives différentes de $f(x)=1-\frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui valent 1 en $x=1$.

(c) La primitive H de $g(x)=e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(0)=0$ est $H(x)=-e^{-x}$.

Ex. 32 (suite)

(d) La solution de $y'=2x+3$ sur $\mathbb{R}$ telle que $y(2)=0$ est $y(x)=x^2+3x-10$.

Ex. 33 ★★☆ **Coût total d'une fromagerie** — Une fromagerie de Rodez produit q tonnes de tomme par mois, avec $q\in[0\,;20]$. Le coût marginal est $C_m(q)=3q^2-24q+60$, en centaines d'euros. Le coût total C vérifie $C'(q)=C_m(q)$, et produire 10 tonnes coûte 900 centaines d'euros.

(a) Détermine toutes les primitives de C_m sur $[0\,;20]$.

(b) Déduis-en l'expression de $C(q)$.

(c) Calcule $C(0)$. Que représente cette valeur pour la fromagerie ?

(d) Calcule le coût total de production de 20 tonnes, en euros.

Ex. 34 ★★★ **Extrait de bac : une exponentielle composée** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x\,e^{x^2-1}$.

(a) Reconnais la forme $u'e^u$ en précisant u, ajuste le coefficient, puis donne toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$. Donne la valeur exacte de la constante, puis contrôle $F(0)=0$ et $F'=f$.

(c) Existe-t-il une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 en 0 et -1 en 1 ? Justifie à l'aide de l'unicité.

(d) Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1)=-1$.

(e) Sans dériver, justifie que $G-F$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis calcule cette constante sous forme exacte.

Ex. 35 ★★★ **Le tournesol de Malo** — À Quimper, Malo suit la croissance d'un tournesol. À l'instant t (en semaines), $t\in[0\,;10]$, sa vitesse de croissance est $v(t)=\frac{10t}{t^2+1}$ (en cm par semaine). La hauteur $h(t)$, en cm, est une primitive de v sur $[0\,;10]$. Une semaine après la plantation, le tournesol mesure 12 cm.

(a) Reconnais la forme $\frac{u'}{u}$, justifie que $u>0$, ajuste le coefficient et donne toutes les primitives de v sur $[0\,;10]$.

(b) Détermine $h(t)$. Donne la valeur exacte de la constante, puis contrôle la condition.

(c) Calcule la hauteur du tournesol le jour de la plantation, en valeur exacte puis arrondie au dixième.

(d) Calcule $h(7)$ sous la forme $a+b\ln 5$, avec a et b entiers, puis arrondis au dixième.

(e) Au bout de combien de semaines le tournesol atteint-il 22 cm ? Donne la valeur exacte puis arrondie au dixième.

6. *Primitives en situation : coût, position, quantité*

À retenir : Taux q (marginal, vitesse, débit) : la grandeur Q est la primitive de q fixée par la valeur initiale ($C(0)$ = coûts fixes). Ex. : $q(t) = 2t$, $Q(0) = 5$ donne $Q(t) = t^2 + 5$. Variation : $Q(b) - Q(a)$. Si $q < 0$, Q diminue.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : retrouver la grandeur à partir de son taux** — Sur $[0\,;+\infty[$, une grandeur Q a pour taux de variation q : $Q'(t) = q(t)$. Dans chaque cas, détermine $Q(t)$.

a) $q(t) = 3$ et $Q(0) = 7$.

b) $q(t) = 4t - 1$ et $Q(0) = 2$.

c) $q(t) = e^{0{,}5t}$ et $Q(0) = 5$.

d) $q(t) = 6t^2 + 2t$ et $Q(1) = 10$.

e) $q(t) = \dfrac{2}{2t+1}$ et $Q(0) = 4$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : variation d'une grandeur entre deux instants** — Une grandeur Q vérifie $Q' = q$. Si F est une primitive de q, on a $Q(b) - Q(a) = F(b) - F(a)$: la constante disparaît. Calcule $Q(b) - Q(a)$.

a) $q(t) = 2t + 3$, entre $a = 0$ et $b = 4$.

b) $q(t) = 3t^2$, entre $a = 1$ et $b = 2$.

c) $q(t) = e^t$, entre $a = 0$ et $b = \ln 3$.

d) $q(t) = \frac{1}{t}$ sur $]0\,;+\infty[$, entre $a = 2$ et $b = 6$.

e) $q(t) = -4t$, entre $a = 1$ et $b = 3$. La grandeur augmente-t-elle ou diminue-t-elle ? Justifie à l'aide du signe de q.

f) $q(t) = (2t-1)^2$, entre $a = 1$ et $b = 2$.

Ex. 38 ★★☆ **Coût total d'une usine de granulés** — À Épinal, une usine produit q tonnes de granulés de bois, avec $q \in [0\,;40]$. Son coût marginal est $C_m(q) = 0{,}8q + 15$, en euros par tonne. Les coûts fixes s'élèvent à 1 200 €. Le coût total C, en euros, vérifie $C' = C_m$.

a) Détermine $C(q)$ pour $q \in [0\,;40]$.

b) Étudie le sens de variation de C sur $[0\,;40]$ à l'aide du signe de C_m. Interprète.

c) Calcule le coût de production des tonnes produites entre $q = 20$ et $q = 30$.

d) Lina affirme : « Produire 25 tonnes coûte 625 €. » Calcule $C(25)$, puis explique son erreur.

Ex. 39 ★★☆ **Altitude d'un drone** — À Grenoble, un drone monte puis redescend à la verticale. Sa vitesse verticale est $v(t) = 12 - 3t$ (en m/s), pour $t \in [0\,;8]$ en secondes. Au départ, il est à 20 m d'altitude. Son altitude h, en mètres, vérifie $h' = v$.

a) Détermine $h(t)$ pour $t \in [0\,;8]$.

Ex. 39 (suite)

b) Étudie le signe de v, puis déduis-en le sens de variation de h et l'altitude maximale du drone.

c) Calcule $h(8) - h(4)$ et interprète ce résultat, avec l'unité.

d) Nour affirme : « $h(8) - h(0) = 0$, donc le drone n'a parcouru aucune distance. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★☆ **Remplissage d'une cuve de récupération d'eau** — À Rennes, une cuve récupère l'eau de pluie avec un débit $d(t) = \frac{60}{t+2}$, en litres par heure, pour $t \in [0\,;48]$ en heures. Au départ, elle contient 200 L. Le volume V, en litres, vérifie $V' = d$.

a) Détermine $V(t)$ pour $t \in [0\,;48]$.

b) Calcule le volume d'eau dans la cuve au bout de 6 heures. Arrondis au dixième de litre.

c) Justifie que V est croissante sur $[0\,;48]$, puis détermine à partir de quel instant la cuve contient plus de 320 L.

d) Combien de litres la cuve reçoit-elle entre $t = 6$ et $t = 22$? Donne la valeur exacte puis un arrondi au dixième.

Ex. 41 ★★★ **Coût de production d'un atelier de céramique** — À Nantes, un atelier de céramique fabrique q centaines de bols par mois, avec $q \in [0\,;10]$. Son coût marginal est $C_m(q) = 3q^2 - 12q + 20$, en centaines d'euros par centaine de bols. Les coûts fixes s'élèvent à 1 500 €, soit 15 centaines d'euros. On note $C(q)$ le coût total, en centaines d'euros.

a) Vérifie que $C_m(q) = 3(q-2)^2 + 8$. Déduis-en le sens de variation de C sur $[0\,;10]$.

b) Détermine $C(q)$ pour $q \in [0\,;10]$.

c) Malo affirme : « Passer de 4 à 6 centaines de bols coûte $C(6)$. » Repère son erreur, puis calcule ce coût supplémentaire en euros.

d) Vrai ou faux ? « Si les coûts fixes passaient à 2 500 €, le coût pour passer de 4 à 6 centaines de bols augmenterait. » Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Vidange d'un bassin de rétention** — À Montpellier, après un orage, un bassin de rétention se vide. Son débit est $d(t) = -6e^{-0{,}2t}$, en m³ par heure, pour $t \in [0\,;24]$ en heures. Au départ, le bassin contient 50 m³. On note $V(t)$ le volume d'eau du bassin, en m³, avec $V' = d$.

a) Étudie le signe de $d(t)$ sur $[0\,;24]$. Qu'en déduis-tu pour le volume d'eau du bassin ?

b) Détermine $V(t)$ pour $t \in [0\,;24]$.

c) Calcule le volume d'eau écoulé pendant les 5 premières heures, arrondi au centième de m³.

d) Détermine par le calcul l'instant où le bassin ne contient plus que 35 m³. Donne la valeur exacte, puis une durée en heures et minutes.

e) Inès affirme : « Avant la fin des 24 heures, le bassin sera presque vide. » A-t-elle raison ? Justifie.