Terminale maths complémentaires / Primitives — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Vérifier qu'une fonction est une primitive, équation $y' = f$*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : je dérive F**

(a) $F'(x) = 4x^3 - 3 \times 2x + 0 = 4x^3 - 6x = f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, donc $F'(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} = f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $F'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} = f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) Forme e^{ax+b} avec $a = 5$: $F'(x) = \frac{1}{5} \times 5e^{5x-2} = e^{5x-2} = f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(e) ln n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$. Produit : $(x \ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$, donc $F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$.

(f) Sur I, $2x + 3 > 0$. Forme $\ln u$ avec $u(x) = 2x + 3$: $F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x+3} = f(x)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Vrai : $(F + 5)' = F' + 0 = f$. Par exemple, x^3 et $x^3 + 5$ ont la même dérivée $3x^2$.

(b) Faux : $4x^2$ est une primitive, mais $4x^2 + 1$ aussi, car sa dérivée vaut $8x$. Les primitives sont les $4x^2 + k$: on ne dit « la » primitive qu'avec une condition.

(c) Vrai : les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f, et $(e^x + 4x + k)' = e^x + 4$.

(d) Faux : ln n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$. C'est sur cet intervalle seulement que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

(e) Faux : par la dérivée d'un produit, $F'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x \neq 2xe^x$.

(f) Faux : on a $F' = f$, pas $f' = F$. Ici $f'(x) = 4e^{2x} \neq e^{2x}$.

Ex. 3 ★★☆ **L'erreur de Malik**

(a) Son calcul de $f'(x)$ est juste, mais il ne sert à rien. La définition demande $F' = f$, pas $f' = F$: il faut dériver F, jamais f.

(b) Produit avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = 2e^{2x}$: $F'(x) = 2e^{2x} + (2x - 1) \times 2e^{2x} = (2 + 4x - 2)e^{2x} = 4xe^{2x} = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3 (suite)

(c) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (2x - 1)e^{2x} + k$, k réel.

(d) $G(0) = (0 - 1)e^0 + k = -1 + k = 5$, donc $k = 6$ et $G(x) = (2x - 1)e^{2x} + 6$. Cette primitive est unique.

Ex. 4 ★★☆ **Trouver a et b**

(a) Produit avec $u(x) = ax + b$ et $v(x) = e^x$: $F'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

(b) $F' = f$ pour tout réel x, et $e^x > 0$, donc $ax + a + b = 3x - 1$ pour tout x. Par identification, $a = 3$ et $a + b = -1$, soit $b = -4$. Contrôle : $((3x - 4)e^x)' = 3e^x + (3x - 4)e^x = (3x - 1)e^x$.

(c) Les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f : ce sont les fonctions $x \mapsto (3x - 4)e^x + k$, k réel.

(d) Les solutions sont les $(3x - 4)e^x + k$. Or $y(1) = (3 - 4)e^1 + k = -e + k$, donc $-e + k = 0$, soit $k = e$. Ainsi $y(x) = (3x - 4)e^x + e$: cette solution est unique.

Ex. 5 ★★☆ **Deux primitives, une constante**

(a) $F'(x) = \frac{4x \times x - (2x^2+1) \times 1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$.

(b) $G'(x) = \frac{(4x-3) \times x - (2x^2-3x+1)}{x^2} = \frac{4x^2-3x-2x^2+3x-1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$.

(c) $F' = G'$: F et G sont deux primitives sur I de la même fonction $x \mapsto \frac{2x^2-1}{x^2}$.

(d) $F(x) - G(x) = \frac{2x^2+1-2x^2+3x-1}{x} = \frac{3x}{x} = 3$. C'est cohérent : sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

(e) Les primitives de f sur I sont les $F(x) + k$. Or $F(1) = 3$, donc $3 + k = 0$ et $k = -3$. Ainsi $H = F - 3 = G$, et on a bien $G(1) = \frac{2-3+1}{1} = 0$.

Ex. 6 ★★★ **Type bac : une primitive avec ln**

(a) $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$, donc on travaille sur $I =]0\,;+\infty[$. Sur cet intervalle, F est dérivable. On dérive le produit $2x^2 \ln(x)$ avec $u(x) = 2x^2$, $u'(x) = 4x$, $v(x) = \ln(x)$, $v'(x) = \frac{1}{x}$: $F'(x) = 4x \ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x} - 2x = 4x \ln(x) + 2x - 2x = 4x \ln(x)$.
Donc $F' = f$: F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$. On a dérivé F, pas f.

Ex. 6 (suite)

(b) Non. F est une primitive de f, mais ce n'est pas la seule. Par exemple, $H(x) = 2x^2\ln(x) - x^2 + 7$ vérifie aussi $H'(x) = 4x\ln(x)$. Sans condition, on dit « une » primitive.

(c) Sur I, $g = \frac{1}{4}f$. Par linéarité, $\frac{1}{4}F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$. Contrôle : $\left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right)' = x\ln(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x\ln(x)$.

(d) Les primitives de f sur I sont les $2x^2\ln(x) - x^2 + k$, k réel. Comme $\ln(1) = 0$, on a $G(1) = 0 - 1 + k = k - 1$. Alors $G(1) = 3$ donne $k = 4$. Cette primitive existe et elle est unique : $G(x) = 2x^2\ln(x) - x^2 + 4$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $\ln(e) = 1$, donc $G(e) = 2e^2 \times 1 - e^2 + 4 = e^2 + 4$.

Ex. 7 ★★★ Le réservoir de Saint-Malo

(a) F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. On prend $u(t) = -(8t+16)$, donc $u'(t) = -8$, et $v(t) = e^{-0{,}5t}$, donc $v'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t}$ (forme e^{at+b}). Alors $F'(t) = -8e^{-0{,}5t} + 0{,}5(8t + 16)e^{-0{,}5t} = (-8 + 4t + 8)e^{-0{,}5t} = 4t\,e^{-0{,}5t}$.
Donc $F' = q$: F est une primitive de q sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Les solutions de $y' = q$ sont exactement les primitives de q. Ce sont les fonctions $t \mapsto -(8t+16)e^{-0{,}5t} + k$, où k est un réel.

(c) Non. $V(t) = F(t) + k$, et la condition porte sur $V(0)$, pas sur k. Or $F(0) = -16 \times e^0 = -16$, donc $V(0) = -16 + k$. Alors $V(0) = 2$ donne $k = 18$, et non 2.
Donc $V(t) = 18 - (8t+16)e^{-0{,}5t}$.

(d) $V(4) = 18 - (32+16)e^{-2} = 18 - 48e^{-2} \approx 11{,}5$. Au bout de 4 heures, la cuve contient environ 11,5 m³.

(e) $V'(t) = q(t) = 4t\,e^{-0{,}5t}$. Pour $t \geqslant 0$, on a $4t \geqslant 0$ et $e^{-0{,}5t} > 0$, donc $V'(t) \geqslant 0$. Ainsi V est croissante sur $[0\,;+\infty[$: le volume ne diminue jamais.

2. *Primitives des fonctions usuelles et linéarité*

Ex. 8 ★☆☆ Automatismes : fonctions de référence

(a) Une constante k a pour primitive kx (et non 0) : $F(x) = 7x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$: $F(x) = \frac{x^7}{7}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Par linéarité : $F(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 3x = 2x^3 - 2x^2 + 3x$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Par linéarité : $F(x) = 4e^x - 2 \times \frac{x^4}{4} = 4e^x - \frac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 8 (suite)

(e) $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$, donc $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) $\frac{1}{x} \to \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$, donc $F(x) = 8\ln x$.

(g) $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 2\sqrt{x}$, donc $F(x) = 6 \times 2\sqrt{x} = 12\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 9 ★★☆ Automatismes : fonctions de $ax+b$

(a) Forme $\frac{1}{ax+b}$ avec $a = 4$ et $4x + 1 > 0$ sur cet intervalle : $F(x) = 5 \times \frac{1}{4}\ln(4x+1) = \frac{5}{4}\ln(4x+1)$.

(b) Forme e^{ax+b} avec $a = -1$: $F(x) = -e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Forme $(ax+b)^n$ avec $a = 3$, $n = 4$: $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x-2)^5}{5} = \frac{(3x-2)^5}{15}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Forme $\frac{1}{ax+b}$ avec $a = 2$ et $2x + 5 > 0$ sur cet intervalle : $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+5)$.

(e) Forme e^{ax+b} avec $a = -2$: $F(x) = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+5} = -3e^{-2x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

(f) Forme $(ax+b)^n$ avec $a = -1$, $n = 2$: $F(x) = -\frac{(1-x)^3}{3}$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 10 ★★☆ Les erreurs de Léna

(a) Non : $F'(x) = 20x^3 \neq x^5$ (elle a dérivé au lieu de primitiver). Avec $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$: $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Contrôle : $F'(x) = x^5$. C'est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Non : $F'(x) = x^2 \neq x^2 + 2$. La constante 2 a pour primitive $2x$: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$. Contrôle : $F'(x) = x^2 + 2$. C'est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Non : $F'(x) = 25e^{5x+1}$. Pour e^{ax+b}, on divise par a : $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x+1}$. Contrôle : $F'(x) = e^{5x+1}$. C'est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(d) Non : $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$, il y a une erreur de signe. Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $F(x) = -\frac{1}{x}$. Contrôle : $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) Oui : $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 2\sqrt{x}$, donc $4 \times 2\sqrt{x} = 8\sqrt{x}$. Contrôle : $F'(x) = 8 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$. Sa proposition est donc juste sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 11 ★★☆ Vrai ou faux avec Hugo

(a) Faux. Une primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives : $F'(x) = x^3 - 3x^2 - 6x \neq f(x)$. On développe : $f(x) = x^2 - 2x - 3$, d'où une primitive $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$. Contrôle : sa dérivée vaut bien $x^2 - 2x - 3$.

(b) Vrai. $G'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = g(x)$: G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$
(les primitives de g sont les $\frac{x^3}{3} + k$).

Ex. 11 (suite)

(c) Vrai. $H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x = h(x)$: H est bien une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$.

(d) Vrai. $P'(x) = 2(x+2) = 2x+4$ et $Q'(x) = 2x+4$: même dérivée. D'ailleurs $P(x) - Q(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x = 4$, une constante. Ce sont deux primitives de $x \mapsto 2x+4$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 12 ★★☆ Transformer en somme avant de primitiver

(a) On développe : $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Par linéarité : $F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x$. Contrôle : $F'(x) = 2x^2 + 5x - 3 = f(x)$. C'est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x + \frac{4}{x}$. Usuelles x et $\frac{1}{x}$: $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln x$. Contrôle : $F'(x) = x + \frac{4}{x} = f(x)$. C'est donc une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(c) $f(x) = 5x - \frac{2}{x^2}$. Comme $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$: $F(x) = \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{x}$. Contrôle : $F'(x) = 5x - \frac{2}{x^2} = f(x)$. C'est donc une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $f(x) = 3 + \frac{\sqrt{x}}{x} = 3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Donc $F(x) = 3x + 2\sqrt{x}$. Contrôle : $F'(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$. C'est donc une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = e^{2x} + 2e^x$. Forme e^{ax+b} avec $a = 2$: $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x$. Contrôle : $F'(x) = e^{2x} + 2e^x = f(x)$. C'est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13 ★★★ Le réservoir d'une ferme près de Gap

(a) Sur $[0\,;+\infty[$, on a $3t+2 > 0$. Le terme constant 5 a pour primitive $5t$ (et pas 0). Pour le deuxième terme, on reconnaît une forme $\frac{1}{at+b}$ avec $a = 3$: $\frac{6}{3t+2} = 2 \times \frac{3}{3t+2}$, qui a pour primitive $2\ln(3t+2)$. Pour le troisième terme, on reconnaît e^{at+b} avec $a = -1$: une primitive de e^{-t} est $\frac{1}{-1}e^{-t} = -e^{-t}$, donc une primitive de $-4e^{-t}$ est $4e^{-t}$. Contrôle : $(2\ln(3t+2))' = \frac{6}{3t+2}$ et $(4e^{-t})' = -4e^{-t}$. Ces primitives conviennent.

(b) Par linéarité, $V(t) = 5t + 2\ln(3t+2) + 4e^{-t} + k$, avec k un réel. La condition $V(0) = 50$ donne $0 + 2\ln 2 + 4 + k = 50$, donc $k = 46 - 2\ln 2$.
Conclusion : $V(t) = 5t + 2\ln(3t+2) + 4e^{-t} + 46 - 2\ln 2$. C'est l'unique primitive de d qui vaut 50 en 0.

(c) $V(10) = 50 + 2\ln 32 + 4e^{-10} + 46 - 2\ln 2 = 96 + 2\ln 16 + 4e^{-10} \approx 101{,}5$. Au bout de 10 h, le réservoir contient environ 101,5 m³.

Ex. 13 (suite)

(d) Pour $t \geqslant 0$, on a $0 < e^{-t} \leqslant 1$, donc $5 - 4e^{-t} \geqslant 1$. De plus, $\frac{6}{3t+2} > 0$.
Donc $d(t) \geqslant 1 > 0$. Comme $V' = d > 0$, la fonction V est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: le réservoir ne fait que se remplir.

(e) $V(13) \approx 117{,}0 < 120$ et $V(14) \approx 122{,}2 > 120$. Comme V est croissante, le volume dépasse 120 m³ pour la première fois entre 13 h et 14 h. La première heure entière où le réservoir a débordé est donc $t = 14$.

Ex. 14 ★★★ Deux méthodes, deux primitives : où est le problème ?

(a) $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. On primitive terme à terme avec $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$: $F_1(x) = 8 \times \frac{x^4}{4} - 12 \times \frac{x^3}{3} + 6 \times \frac{x^2}{2} - x$, soit $F_1(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$. Contrôle : $F_1'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = f(x)$. F_1 est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) On reconnaît $(ax+b)^n$ avec $a = 2$ et $n = 3$. Une primitive de x^3 est $\frac{x^4}{4}$. On ajuste avec le facteur $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$: $F_2(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^4}{4} = \frac{(2x-1)^4}{8}$. Contrôle : $F_2'(x) = \frac{4 \times 2(2x-1)^3}{8} = (2x-1)^3$. F_2 est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(c) $(2x-1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$, donc $F_2(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + \frac{1}{8}$. On obtient $F_2(x) - F_1(x) = \frac{1}{8}$ pour tout réel x. Les deux résultats ne se contredisent pas : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Ici, cette constante vaut $\frac{1}{8}$, et les deux réponses sont justes.

(d) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{(2x-1)^4}{8} + k$, avec k réel. Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$, donc $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + k = 3$, d'où $k = 3$. La primitive cherchée est unique : $F(x) = \frac{(2x-1)^4}{8} + 3$.

(e) On ne divise pas une primitive par une autre : il n'y a pas de règle pour un quotient. On divise chaque terme par x^2, en utilisant $\frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On obtient $h(x) = 8x - 12 + 6 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 4 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$. Sur $]0\,;+\infty[$, avec $\frac{1}{x} \to \ln x$, $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 2\sqrt{x}$: $H(x) = 4x^2 - 12x + 6\ln x + \frac{1}{x} + 8\sqrt{x}$. Contrôle : $H'(x) = 8x - 12 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} = h(x)$. H est donc une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$.

3. *Formes $2u'u$ et $u'e^u$*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : la forme $2u'u$**

(a) On pose $u(x) = 3x - 2$, donc $u'(x) = 3$ et $f = 2u'u$. Une primitive est $F(x) = (3x-2)^2$.

(b) On pose $u(x) = x^2 + 6$, donc $u'(x) = 2x$ et $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Alors $f = \frac{1}{2}u'u = \frac{1}{4} \times 2u'u$. Une primitive est $F(x) = \frac{(x^2+6)^2}{4}$.

(c) On pose $u(x) = 2x^3 - 1$, donc $u'(x) = 6x^2$ et $f = u'u = \frac{1}{2} \times 2u'u$. Une primitive est $F(x) = \frac{1}{2}(2x^3-1)^2$.

(d) On pose $u(x) = x^2 + x - 5$, donc $u'(x) = 2x + 1$ et $f = u'u = \frac{1}{2} \times 2u'u$. Une primitive est $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 5)^2$.

(e) On pose $u(x) = e^x + 1$, donc $u'(x) = e^x$ et $f = 2u'u$. Une primitive est $F(x) = (e^x+1)^2$.

(f) On pose $u(x) = 5 - x^2$, donc $u'(x) = -2x$ et $x = -\frac{1}{2}u'(x)$. Alors $f = -\frac{1}{4} \times 2u'u$. Une primitive est $F(x) = -\frac{1}{4}(5-x^2)^2$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : la forme $u'e^u$**

(a) On pose $u(x) = 2x^3 - 5x$, donc $u'(x) = 6x^2 - 5$ et $f = u'e^u$ sans ajustement. Une primitive est $F(x) = e^{2x^3-5x}$.

(b) On pose $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$ et $3x = \frac{3}{2} \times 2x$. Ainsi $f = \frac{3}{2}u'e^u$ et une primitive est $F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2}$.

(c) On pose $u(x) = 1 - x^2$, donc $u'(x) = -2x$: attention au signe. Comme $4x = -2 \times (-2x)$, on a $f = -2u'e^u$ et une primitive est $F(x) = -2e^{1-x^2}$.

(d) On pose $u(x) = x^2 + 2x$, donc $u'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$ et $f = \frac{1}{2}u'e^u$. Une primitive est $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+2x}$.

(e) On pose $u(x) = x^3 + 1$, donc $u'(x) = 3x^2$ et $f = \frac{1}{3}u'e^u$. Une primitive est $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$.

(f) On pose $u(x) = x^4$, donc $u'(x) = 4x^3$ et $f = 3u'e^u$. Une primitive est $F(x) = 3e^{x^4}$.

Ex. 17 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) $F'(x) = \frac{3(x^2-3x+2)^2(2x-3)}{3} = (2x-3)(x^2-3x+2)^2$. Donc $F'(-1) = (-5) \times 6^2 = -180$, alors que $f(-1) = (-10) \times 6 = -60$. Comme $F'(-1) \neq f(-1)$, $F' \neq f$ et F n'est pas une primitive de f. Léna a utilisé $\frac{u^3}{3}$, une formule qui ne correspond pas à la forme de f.

(b) On pose $u(x) = x^2 - 3x + 2$, donc $u'(x) = 2x - 3$ et $f = 2u'u$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = (x^2-3x+2)^2$. Contrôle : $G'(x) = 2(2x-3)(x^2-3x+2) = (4x-6)(x^2-3x+2) = f(x)$. Une primitive de $2u'u$ est donc u^2, et non $\frac{u^3}{3}$.

Ex. 17 (suite)

(c) $H'(x) = -6x\,e^{2-3x^2} = -h(x)$: Malo a oublié le signe moins de u'. Avec $u(x) = 2 - 3x^2$, on a $u'(x) = -6x$, donc $h = -u'e^u$. Une primitive correcte est $K(x) = -e^{2-3x^2}$. Contrôle : $K'(x) = 6x\,e^{2-3x^2} = h(x)$.

Ex. 18 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Vrai. Avec $u(x) = x - x^2$, on a $u'(x) = 1 - 2x$, donc $f = u'e^u$. Contrôle : $F'(x) = (1-2x)e^{x-x^2} = f(x)$.

(b) Faux. $G'(x) = 10 \times 2 \times 2x(x^2-4) = 40x(x^2-4) \neq g(x)$. Avec $u(x) = x^2 - 4$, on a $u'(x) = 2x$, donc $2u'u = 4x(x^2-4)$ et $g = \frac{5}{2} \times 2u'u$. Une primitive est $\frac{5}{2}(x^2-4)^2$.

(c) Faux. La dérivée de e^{x^2} est $2x\,e^{x^2}$: il faudrait que le facteur $2x$ soit présent dans la fonction. On ne peut ajuster qu'un coefficient constant, jamais un facteur en x. La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'a donc aucune primitive qu'on puisse obtenir avec les formes du programme.

(d) Vrai. $F'(x) = G'(x) = -2x\,e^{-x^2}$, donc F et G sont deux primitives de $x \mapsto -2x\,e^{-x^2}$. D'ailleurs, elles diffèrent bien d'une constante : $F(x) - G(x) = 4$.

Ex. 19 ★★☆ **La croissance d'un plant de tomate**

(a) On pose $u(t) = -0{,}1t^2$, donc $u'(t) = -0{,}2t$. Comme $2t = -10 \times (-0{,}2t)$, on a $v = -10\,u'e^u$, donc $k = -10$. Les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto -10e^{-0{,}1t^2} + c$, avec c réel. Contrôle : la dérivée de $-10e^{-0{,}1t^2}$ est $-10 \times (-0{,}2t)e^{-0{,}1t^2} = 2t\,e^{-0{,}1t^2}$.

(b) On a $h(t) = -10e^{-0{,}1t^2} + c$ et $h(0) = -10 + c = 5$, donc $c = 15$. Ainsi $h(t) = 15 - 10e^{-0{,}1t^2}$. C'est la seule primitive de v qui vérifie $h(0) = 5$.

(c) $h(3) = 15 - 10e^{-0{,}9} \approx 10{,}9$. Au bout de 3 semaines, le plant mesure environ 10,9 cm.

(d) Pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-0{,}1t^2} > 0$, donc $15 - h(t) = 10e^{-0{,}1t^2} > 0$. Le plant mesure donc toujours moins de 15 cm.

Ex. 20 ★★★ **Type bac : deux formes composées et une condition initiale**

(a) Avec $u(x) = x^2 - 1$, on a $u'(x) = 2x$, donc $2u'(x)u(x) = 4x(x^2-1)$. Ainsi $g(x) = \frac{3}{4} \times 4x(x^2-1) = \frac{3}{4} \times 2u'(x)u(x)$, donc $k = \frac{3}{4}$. C'est la forme $2u'u$, dont une primitive est u^2. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc $G_1(x) = \frac{3}{4}(x^2-1)^2$. Contrôle : $G_1'(x) = \frac{3}{4} \times 2 \times 2x(x^2-1) = 3x(x^2-1)$. Le résultat est juste.

Ex. 20 (suite)

(b) On pose $u(x) = -2x^2$. Alors $u'(x) = -4x$, et $-8x = 2 \times (-4x)$.
Donc $h(x) = 2 \times u'(x)e^{u(x)}$: c'est la forme $u'e^u$ avec $k = 2$. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H_1(x) = 2e^{-2x^2}$.
Contrôle : $H_1'(x) = 2 \times (-4x)e^{-2x^2} = -8x\,e^{-2x^2}$. Le résultat est juste.

(c) Par linéarité, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{3}{4}(x^2-1)^2 + 2e^{-2x^2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. On veut $F(0) = 3$: $\frac{3}{4}(0-1)^2 + 2e^0 + c = 3$, donc $\frac{3}{4} + 2 + c = 3$ et $c = \frac{1}{4}$. Il existe une seule primitive qui convient : $F(x) = \frac{3}{4}(x^2-1)^2 + 2e^{-2x^2} + \frac{1}{4}$. Contrôle : $F'(x) = 3x(x^2-1) - 8x\,e^{-2x^2} = f(x)$. Le résultat est juste.

(d) On écrit $G(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{x} \times e^{-2x^2}$ et on dérive le produit : $G'(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}e^{-2x^2} + \frac{1}{x} \times (-4x)e^{-2x^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)e^{-2x^2}$. On trouve $G'(x) \neq e^{-2x^2}$, donc Noé a tort. Son erreur : il a divisé par $-4x$, alors qu'on ne peut ajuster qu'un coefficient constant. Dans e^{-2x^2} seul, le facteur $-4x$ manque, et cette fonction n'est pas de la forme $u'e^u$.

Ex. 21 ★★★ Le coût de production d'une fromagerie

(a) On a $u'(q) = 0{,}2q$, donc $2u'(q)u(q) = 0{,}4q(0{,}1q^2+3)$. Comme $q = 2{,}5 \times 0{,}4q$, on obtient $q(0{,}1q^2+3) = 2{,}5 \times 2u'(q)u(q)$, donc $k = 2{,}5$. C'est la forme $2u'u$, dont une primitive est u^2. Une primitive sur $[0\,;10]$ est donc $q \mapsto 2{,}5(0{,}1q^2+3)^2$. On a ajusté le coefficient constant 2,5 et on n'a pas divisé par q.

(b) Par linéarité, une primitive de $q \mapsto 2$ est $q \mapsto 2q$. Donc $C(q) = 2{,}5(0{,}1q^2+3)^2 + 2q + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. La condition $C(0) = 20$ donne $2{,}5 \times 9 + c = 20$, soit $22{,}5 + c = 20$ et $c = -2{,}5$. On obtient $C(q) = 2{,}5(0{,}1q^2+3)^2 + 2q - 2{,}5$. Contrôle : $C'(q) = 2{,}5 \times 2 \times 0{,}2q(0{,}1q^2+3) + 2 = q(0{,}1q^2+3) + 2 = C_m(q)$. Le résultat est juste.

(c) $C(10) = 2{,}5 \times (0{,}1 \times 100 + 3)^2 + 20 - 2{,}5 = 2{,}5 \times 169 + 17{,}5 = 422{,}5 + 17{,}5 = 440$. Produire 10 tonnes coûte 440 milliers d'euros, soit 440 000 euros.

(d) $C(4) = 2{,}5 \times 4{,}6^2 + 8 - 2{,}5 = 52{,}9 + 5{,}5 = 58{,}4$ et $C(6) = 2{,}5 \times 6{,}6^2 + 12 - 2{,}5 = 108{,}9 + 9{,}5 = 118{,}4$. Passer de 4 à 6 tonnes coûte $C(6) - C(4) = 60$ milliers d'euros. Passer de 0 à 4 tonnes coûte $C(4) - C(0) = 58{,}4 - 20 = 38{,}4$ milliers d'euros. Comme $60 > 38{,}4$, Yanis a raison.

4. Forme u'/u : primitives avec ln

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : la forme u'/u exacte

(a) $u(x) = 3x + 1 > 0$ car $x > -\frac{1}{3}$, et $u'(x) = 3$: forme $\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \ln(3x+1)$.

(b) $u(x) = x^2 + 7 > 0$ sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 2x$: forme $\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \ln(x^2+7)$.

(c) $u(x) = e^x + 3 > 0$ car $e^x > 0$, et $u'(x) = e^x$: forme $\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \ln(e^x+3)$.

(d) $u(x) = 2x - 4 > 0$ seulement si $x > 2$, d'où l'intervalle. $u'(x) = 2$: forme $\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \ln(2x-4)$.

(e) $u(x) = x^3 + 2x = x(x^2+2) > 0$ pour $x > 0$, et $u'(x) = 3x^2 + 2$: forme $\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \ln(x^3+2x)$.

(f) $u(x) = x^2 - 3x + 5$: son discriminant vaut $9 - 20 = -11 < 0$ et le coefficient de x^2 est positif, donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$. $u'(x) = 2x - 3$, donc $F(x) = \ln(x^2 - 3x + 5)$.

Ex. 23 ★☆☆ Automatismes : ajuster le coefficient

(a) $u(x) = 5x + 2 > 0$ sur l'intervalle, $u'(x) = 5$: $f = \frac{1}{5} \times \frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \frac{1}{5}\ln(5x+2)$.

(b) $u(x) = x^2 + 9 > 0$ sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$: $3x = \frac{3}{2} \times 2x$, donc $f = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u}$ et $F(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+9)$.

(c) $u(x) = x^3 + 1 > 0$ car $x^3 > -1$, $u'(x) = 3x^2$: $f = 2 \times \frac{u'}{u}$, donc $F(x) = 2\ln(x^3+1)$.

(d) $u(x) = e^{2x} + 5 > 0$, $u'(x) = 2e^{2x}$: $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+5)$.

(e) $u(x) = x^2 + 2x + 3$: discriminant $4 - 12 = -8 < 0$, donc $u > 0$. $u'(x) = 2x + 2$: $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)$.

(f) $u(x) = 4 - x^2 > 0$ sur $]-2\,;2[$, $u'(x) = -2x$, donc $-x = \frac{1}{2}u'(x)$: $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln(4-x^2)$.

Ex. 24 ★★☆ Vrai ou faux : les pièges du logarithme

(a) Vrai. $e^x + 1 > 0$, donc F est définie sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$: $F'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - 1 = \frac{e^x-(e^x+1)}{e^x+1} = -\frac{1}{e^x+1} = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f, alors que f n'est pas directement de la forme $\frac{u'}{u}$.

(b) Vrai. $u(x) = 5x > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x) = 5$: $F'(x) = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x} = f(x)$. D'ailleurs $\ln(5x) = \ln x + \ln 5$: F diffère de $\ln x$ d'une constante.
Donc F est bien une primitive de f.

(c) Faux. $\ln(x-3)$ n'est défini que si $x - 3 > 0$, soit $x > 3$: H n'est pas définie sur $]0\,;3]$. Elle est une primitive de h seulement sur $]3\,;+\infty[$, où $H'(x) = \frac{1}{x-3}$.

Ex. 24 (suite)

(d) Faux. La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$, et non $\ln x$. C'est la dérivée de $\ln x$ qui vaut $\frac{1}{x}$: on ne confond pas $\ln u$ et $\frac{1}{u}$.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) $u(x) = x^2 + 4 > 0$ et $u'(x) = 2x$, donc $F'(x) = \frac{2x}{x^2+4} = 2f(x) \neq f(x)$. Inès a tort : elle a oublié d'ajuster le coefficient.

(b) $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u > 0$ sur $\mathbb{R}$: forme $\frac{u'}{u}$. Une primitive est $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$. Contrôle : sa dérivée vaut $\frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4} = f(x)$.

(c) Les primitives de f sont $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + k$. $G(0) = \frac{1}{2}\ln 4 + k = 0$ donne $k = -\frac{1}{2}\ln 4 = -\ln 2$.
Donc $G(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \ln 2$.

(d) Pour obtenir $u'(x) = 2x$ au numérateur, il faudrait multiplier par $2x$, qui dépend de x. On n'ajuste qu'un nombre, jamais un facteur en x : g n'est pas de la forme $k \times \frac{u'}{u}$.

Ex. 26 ★★☆ **Coût total d'une brasserie**

(a) Pour $q \geqslant 0$, $2q + 1 \geqslant 1 > 0$. Avec $u(q) = 2q + 1$, $u'(q) = 2$, donc $\frac{6}{2q+1} = 3 \times \frac{2}{2q+1} = 3 \times \frac{u'(q)}{u(q)}$.

(b) Par linéarité : 2 a pour primitive $2q$, et $3 \times \frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$) a pour primitive $3\ln(2q+1)$. Une primitive est $q \mapsto 2q + 3\ln(2q+1)$. Contrôle : sa dérivée vaut $2 + 3 \times \frac{2}{2q+1} = C_m(q)$.

(c) $C(q) = 2q + 3\ln(2q+1) + k$, et $C(0) = 0 + 3\ln 1 + k = k = 5$.
Donc $C(q) = 2q + 3\ln(2q+1) + 5$.

(d) 400 litres correspondent à $q = 4$: $C(4) = 8 + 3\ln 9 + 5 = 13 + 3\ln 9 \approx 19{,}592$. Le coût total est d'environ 19 592 €.

Ex. 27 ★★★ **Logarithme du logarithme**

(a) Sur $]1\,;+\infty[$, $x > 1$ donc $\ln x > \ln 1 = 0$. On pose $u(x) = \ln x$, dérivable avec $u'(x) = \frac{1}{x}$, donc $g(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$: forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$. Une primitive est $G(x) = \ln(\ln x)$. Contrôle : $G'(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$.
Donc G est bien une primitive de g sur $]1\,;+\infty[$.

(b) $F'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2\ln x}{x} = 2f(x)$. Maël a tort : il y a un facteur 2 en trop. Avec $u(x) = \ln x$, on a $f = u'u = \frac{1}{2} \times 2u'u$: forme $2u'u$, avec un coefficient à ajuster. Une primitive de f est $\frac{(\ln x)^2}{2}$. Contrôle : $\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \times \frac{2\ln x}{x} = f(x)$.

Ex. 27 (suite)

(c) Par linéarité, les primitives de h sont $H(x) = 4 \times \frac{(\ln x)^2}{2} - 3\ln(\ln x) + k = 2(\ln x)^2 - 3\ln(\ln x) + k$, où k est un réel. Comme $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$: $H(e) = 2 - 0 + k = 2 + k$. On veut $2 + k = 5$, donc $k = 3$. La primitive cherchée est $H(x) = 2(\ln x)^2 - 3\ln(\ln x) + 3$.

(d) Non. Sur $]0\,;1[$, $\ln x < 0$, donc $u = \ln x$ n'est pas strictement positive et $\ln(\ln x)$ n'y est pas défini. La formule « $\ln u$ » exige $u > 0$ sur tout l'intervalle : l'expression de G ne vaut que sur $]1\,;+\infty[$.

Ex. 28 ★★★ **Remplissage d'une citerne à Colmar**

(a) Pour tout t, $e^{0{,}5t} > 0$, donc $e^{0{,}5t} + 4 > 4 > 0$. On pose $u(t) = e^{0{,}5t} + 4$: $u'(t) = 0{,}5e^{0{,}5t}$. Alors $60e^{0{,}5t} = 120 \times 0{,}5e^{0{,}5t} = 120u'(t)$, donc $d(t) = 120 \times \frac{u'(t)}{u(t)}$: forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, et le coefficient ajusté est $k = 120$.

(b) Les primitives de d sur $[0\,;10]$ sont $V(t) = 120\ln(e^{0{,}5t} + 4) + c$, où c est un réel. Contrôle : $V'(t) = 120 \times \frac{0{,}5e^{0{,}5t}}{e^{0{,}5t}+4} = d(t)$. Comme $e^0 = 1$, $V(0) = 120\ln 5 + c$. On veut $V(0) = 200$, donc $c = 200 - 120\ln 5$. Ainsi $V(t) = 120\ln(e^{0{,}5t} + 4) + 200 - 120\ln 5$.

(c) $V(10) = 120\ln(e^5 + 4) + 200 - 120\ln 5 \approx 610$. Au bout de 10 heures, la citerne contient environ 610 litres.

(d) $W(t) = 120 \times \frac{1}{u(t)}$, donc $W'(t) = -120 \times \frac{u'(t)}{u(t)^2} = -\frac{60e^{0{,}5t}}{(e^{0{,}5t}+4)^2}$. Ce nombre est strictement négatif, alors que $d(t) > 0$: $W'(t) \neq d(t)$. W n'est donc pas une primitive de d. C'est $\ln u$, et pas $\frac{1}{u}$, qui a pour dérivée $\frac{u'}{u}$.

5. *Primitive vérifiant une condition initiale*

Ex. 29 ★☆☆ **Condition initiale : fonctions de référence**

(a) Fonctions usuelles et linéarité : sur $\mathbb{R}$, les primitives sont $F(x) = 2x^3 + 2x + k$. $F(1) = 2 + 2 + k = 4 + k = 3$, donc $k = -1$: $F(x) = 2x^3 + 2x - 1$.

(b) Sur $\mathbb{R}$, les primitives sont $F(x) = x^4 - 5x + k$.
$F(0) = k = -2$, donc $F(x) = x^4 - 5x - 2$.

(c) Sur $]0\,;+\infty[$, les primitives de $\frac{1}{x^2}$ sont $F(x) = -\frac{1}{x} + k$.
$F(1) = -1 + k = 0$, donc $k = 1$: $F(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

(d) Sur $]0\,;+\infty[$, les primitives sont $F(x) = 3\ln x + k$.
$F(1) = 3\ln 1 + k = k$ car $\ln 1 = 0$, donc $k = 5$:
$F(x) = 3\ln x + 5$.

(e) Sur $]0\,;+\infty[$, les primitives sont $F(x) = 2\sqrt{x} + k$.
$F(4) = 2 \times 2 + k = 4 + k = 1$, donc $k = -3$:
$F(x) = 2\sqrt{x} - 3$.

Ex. 29 **(suite)**

(f) Sur $\mathbb{R}$, les primitives sont $F(x) = 3e^x + k$. $F(0) = 3e^0 + k = 3 + k$ car $e^0 = 1$.
Donc $3 + k = -1$, d'où $k = -4$: $F(x) = 3e^x - 4$ (et non $3e^x - 1$).

Ex. 30 ★☆☆ **Équations y′ = f avec condition initiale**

(a) Forme e^{ax+b} avec $a = 2$: les solutions sont $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + k$. $y(0) = \frac{1}{2} + k = 1$, donc $k = \frac{1}{2}$: $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$.

(b) Forme e^{ax+b} avec $a = 3$, on ajuste par $\frac{1}{3}$: sur $\mathbb{R}$, $y(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} + k$. $y(0) = \frac{1}{3}e^1 + k = \frac{e}{3} + k = 0$, donc $k = -\frac{e}{3}$: $y(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} - \frac{e}{3}$.

(c) Forme $\frac{1}{ax+b}$ avec $x + 1 > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$: $y(x) = \ln(x+1) + k$. $y(1) = \ln 2 + k = 0$, donc $k = -\ln 2$: $y(x) = \ln(x+1) - \ln 2$.

(d) Forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$: sur $\mathbb{R}$, $y(x) = e^{x^3} + k$. $y(0) = e^0 + k = 1 + k = 3$, donc $k = 2$: $y(x) = e^{x^3} + 2$.

(e) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3x^2 + 1$, $u'(x) = 6x$, et $u(x) \geqslant 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$: $y(x) = \ln(3x^2+1) + k$. $y(0) = \ln 1 + k = k$ car $\ln 1 = 0$, donc $k = 4$: $y(x) = \ln(3x^2+1) + 4$.

(f) Forme $2u'u$ avec $u(x) = x^2 - 3$, $u'(x) = 2x$: $2u'u = 4x(x^2-3)$, donc $y(x) = (x^2-3)^2 + k$. $y(1) = (-2)^2 + k = 4 + k = 0$, donc $k = -4$: $y(x) = (x^2-3)^2 - 4$.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) Avec $F(x) = 2e^{2x} - x + 5$: $F(0) = 2e^0 - 0 + 5 = 2 + 5 = 7$. Comme $7 \neq 5$, la réponse d'Inès est fausse.

(b) Inès a cru que $F(0) = k$. Or $e^0 = 1$, donc le terme $2e^{2x}$ vaut 2 en 0 : $F(0) = 2 + k$, pas k.

(c) Forme e^{ax+b} avec $a = 2$: $4 \times \frac{1}{2}e^{2x} = 2e^{2x}$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = 2e^{2x} - x + k$. $F(0) = 2 + k = 5$, donc $k = 3$: $F(x) = 2e^{2x} - x + 3$.

(d) $F'(x) = 2 \times 2e^{2x} - 1 = 4e^{2x} - 1 = f(x)$ et $F(0) = 2 - 0 + 3 = 5$.
Donc $F(x) = 2e^{2x} - x + 3$ est bien la primitive cherchée.

Ex. 32 ★★☆ **Vrai ou faux : unicité et contrôle**

(a) Vrai. $F'(x) = 1 - \frac{1}{x} = f(x)$ et $G'(x) = 1 - \frac{1}{x} = f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$. Elles diffèrent de la constante 2, comme deux primitives d'une même fonction.

Ex. 32 **(suite)**

(b) Faux. Les primitives de f sont les $x - \ln x + k$. La condition donne $1 - \ln 1 + k = 1 + k = 1$, donc $k = 0$: une seule valeur de k, donc une unique primitive, $x \mapsto x - \ln x$.

(c) Faux. $-e^{-x}$ est bien une primitive de g, mais $H(0) = -e^0 = -1 \neq 0$. Les primitives sont $-e^{-x} + k$; $-1 + k = 0$ donne $k = 1$, donc $H(x) = 1 - e^{-x}$.

(d) Vrai. $y'(x) = 2x + 3$ et $y(2) = 4 + 6 - 10 = 0$. Par unicité, c'est bien la solution cherchée.

Ex. 33 ★★☆ **Coût total d'une fromagerie**

(a) Par linéarité et avec les primitives des fonctions usuelles, les primitives de C_m sur $[0\,;20]$ sont $q \mapsto q^3 - 12q^2 + 60q + k$, avec k réel.

(b) $C(10) = 1\,000 - 1\,200 + 600 + k = 400 + k$. Comme $C(10) = 900$, on obtient $k = 500$.
Donc $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 500$. Contrôle : $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60 = C_m(q)$.

(c) $C(0) = 500$: ce sont les coûts fixes, soit 50 000 €, payés même sans production.

(d) $C(20) = 8\,000 - 4\,800 + 1\,200 + 500 = 4\,900$ centaines d'euros, soit 490 000 € pour 20 tonnes.

Ex. 34 ★★★ **Extrait de bac : une exponentielle composée**

(a) On pose $u(x) = x^2 - 1$, donc $u'(x) = 2x$. Alors $f(x) = 2 \times 2x\, e^{x^2-1} = 2u'(x)e^{u(x)}$: c'est la forme $u'e^u$ avec un coefficient 2. Une primitive de $u'e^u$ est e^u, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 2e^{x^2-1} + k$, avec k réel. Contrôle : $(2e^{x^2-1})' = 2 \times 2x\, e^{x^2-1} = 4x\, e^{x^2-1}$.

(b) $F(x) = 2e^{x^2-1} + k$. On remplace x par 0 : $F(0) = 2e^{-1} + k$.
Donc $2e^{-1} + k = 0$, d'où $k = -2e^{-1}$, une constante négative. Conclusion : $F(x) = 2e^{x^2-1} - 2e^{-1}$. Contrôle : $F(0) = 2e^{-1} - 2e^{-1} = 0$, et $F'(x) = 4x\, e^{x^2-1} = f(x)$.

(c) Toute primitive de f s'écrit $2e^{x^2-1} + k$. La condition en 0 donne une seule valeur, $k = -2e^{-1}$: F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Or $F(1) = 2e^0 - 2e^{-1} = 2 - 2e^{-1} \approx 1{,}26 \neq -1$.
Donc aucune primitive de f ne vaut 0 en 0 et -1 en 1.

(d) $G(x) = 2e^{x^2-1} + k$. On remplace x par 1 : $G(1) = 2e^0 + k = 2 + k$, car $e^0 = 1$.
Donc $2 + k = -1$, d'où $k = -3$. Conclusion : $G(x) = 2e^{x^2-1} - 3$. Contrôle : $G(1) = 2 - 3 = -1$.

Ex. 34 **(suite)**

(e) F et G sont deux primitives de la même fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elles diffèrent d'une constante. On calcule : $G(x) - F(x) = (2e^{x^2-1} - 3) - (2e^{x^2-1} - 2e^{-1}) = -3 + 2e^{-1}$. La constante vaut $2e^{-1} - 3 \approx -2{,}26$.

Ex. 35 ★★★ **Le tournesol de Malo**

(a) On pose $u(t) = t^2 + 1$, donc $u'(t) = 2t$, et $u(t) \geqslant 1 > 0$ sur $[0\,;10]$. Alors $v(t) = 5 \times \frac{2t}{t^2+1} = 5\frac{u'(t)}{u(t)}$: forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, coefficient 5. Les primitives de v sur $[0\,;10]$ sont les fonctions $t \mapsto 5\ln(t^2+1) + k$, k réel. Contrôle : $(5\ln(t^2+1))' = 5 \times \frac{2t}{t^2+1} = v(t)$.

(b) $h(t) = 5\ln(t^2+1) + k$. La condition est $h(1) = 12$. On remplace t par 1 : $h(1) = 5\ln 2 + k$.
Donc $5\ln 2 + k = 12$, d'où $k = 12 - 5\ln 2$. Conclusion : $h(t) = 5\ln(t^2+1) + 12 - 5\ln 2$. Contrôle : $h(1) = 5\ln 2 + 12 - 5\ln 2 = 12$.

(c) $h(0) = 5\ln 1 + 12 - 5\ln 2 = 12 - 5\ln 2$, car $\ln 1 = 0$. Ici $h(0)$ est égal à la constante. $h(0) \approx 8{,}5$: le tournesol mesurait environ 8,5 cm le jour de la plantation.

(d) $h(7) = 5\ln 50 + 12 - 5\ln 2 = 12 + 5\ln\frac{50}{2} = 12 + 5\ln 25 = 12 + 10\ln 5$.
Donc $a = 12$, $b = 10$, et $h(7) \approx 28{,}1$ cm.

(e) On résout $h(t) = 22$: $5\ln(t^2+1) + 12 - 5\ln 2 = 22$, soit $\ln(t^2+1) = 2 + \ln 2$.
Donc $t^2 + 1 = e^{2+\ln 2} = 2e^2$, puis $t^2 = 2e^2 - 1$. Comme $t \geqslant 0$, $t = \sqrt{2e^2-1} \approx 3{,}7$, qui appartient bien à $[0\,;10]$. Le tournesol atteint 22 cm au bout d'environ 3,7 semaines.

6. *Primitives en situation : coût, position, quantité*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : retrouver la grandeur à partir de son taux**

(a) Fonction constante : $Q(t) = 3t + k$. $Q(0) = k = 7$, donc $Q(t) = 3t + 7$.

(b) Linéarité : $Q(t) = 2t^2 - t + k$. $Q(0) = k = 2$, donc $Q(t) = 2t^2 - t + 2$.

(c) Forme e^{at+b} avec $a = 0{,}5$: $Q(t) = \frac{1}{0{,}5}e^{0{,}5t} + k = 2e^{0{,}5t} + k$. $Q(0) = 2 + k = 5$, donc $k = 3$ et $Q(t) = 2e^{0{,}5t} + 3$.

(d) Linéarité : $Q(t) = 2t^3 + t^2 + k$. $Q(1) = 3 + k = 10$, donc $k = 7$ et $Q(t) = 2t^3 + t^2 + 7$. Attention, la condition est donnée en 1, pas en 0.

Ex. 36 **(suite)**

(e) Forme $\frac{1}{at+b}$ avec $a = 2$ et $2t + 1 > 0$ sur $[0\,;+\infty[$: une primitive de $\frac{1}{2t+1}$ est $\frac{1}{2}\ln(2t+1)$.
Donc $Q(t) = 2 \times \frac{1}{2}\ln(2t+1) + k = \ln(2t+1) + k$.
$Q(0) = \ln 1 + k = k = 4$, donc $Q(t) = \ln(2t+1) + 4$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : variation d'une grandeur entre deux instants**

(a) $F(t) = t^2 + 3t$: $F(4) - F(0) = 28 - 0 = 28$.

(b) $F(t) = t^3$: $F(2) - F(1) = 8 - 1 = 7$.

(c) $F(t) = e^t$: $F(\ln 3) - F(0) = 3 - 1 = 2$.

(d) $F(t) = \ln t$ sur $]0\,;+\infty[$: $\ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.

(e) $F(t) = -2t^2$: $F(3) - F(1) = -18 - (-2) = -16$. La variation est négative : la grandeur diminue de 16 (normal, $q < 0$ sur $[1\,;3]$).

(f) Forme $(at+b)^n$ avec $a = 2$: $F(t) = \frac{(2t-1)^3}{3\times 2} = \frac{(2t-1)^3}{6}$.
$F(2) - F(1) = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$.

Ex. 38 ★★☆ **Coût total d'une usine de granulés**

(a) C est une primitive de C_m sur $[0\,;40]$ (linéarité) : $C(q) = 0{,}4q^2 + 15q + k$. Les coûts fixes donnent $C(0) = k = 1\,200$, donc $C(q) = 0{,}4q^2 + 15q + 1\,200$.
Contrôle : $C'(q) = 0{,}8q + 15 = C_m(q)$.

(b) Sur $[0\,;40]$, $C_m(q) = 0{,}8q + 15 \geqslant 15 > 0$, donc C est strictement croissante : plus l'usine produit, plus le coût total augmente.

(c) $C(30) - C(20) = 2\,010 - 1\,660 = 350$. Produire les tonnes de la 21^e à la 30^e coûte 350 €. Ici les coûts fixes s'éliminent.

(d) $C(25) = 0{,}4 \times 625 + 15 \times 25 + 1\,200 = 250 + 375 + 1\,200 = 1\,825$ €. Lina trouve $625 = 250 + 375$: elle a pris la primitive nulle en 0 et a oublié les coûts fixes, car $C(0) = 1\,200$ et non 0.

Ex. 39 ★★☆ **Altitude d'un drone**

(a) h est la primitive de v sur $[0\,;8]$ telle que $h(0) = 20$: $h(t) = 12t - 1{,}5t^2 + k$ et $h(0) = k = 20$, donc $h(t) = 12t - 1{,}5t^2 + 20$. Contrôle : $h'(t) = 12 - 3t = v(t)$.

(b) $v(t) > 0$ pour $t < 4$ et $v(t) < 0$ pour $t > 4$: h est croissante sur $[0\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;8]$. L'altitude maximale est $h(4) = 48 - 24 + 20 = 44$ m.

(c) $h(8) - h(4) = 20 - 44 = -24$. La variation est négative car $v < 0$: entre $t = 4$ s et $t = 8$ s, le drone descend de 24 m.

Ex. 39 **(suite)**

(d) Non. $h(8) - h(0) = 0$ veut seulement dire que le drone revient à son altitude de départ. Il monte de $44 - 20 = 24$ m puis descend de 24 m : il parcourt 48 m en tout.

Ex. 40 ★★☆ **Remplissage d'une cuve de récupération d'eau**

(a) Forme $\frac{1}{at+b}$, avec $t + 2 > 0$ sur $[0\,;48]$:
$V(t) = 60\ln(t+2) + k$. $V(0) = 60\ln 2 + k = 200$, donc $k = 200 - 60\ln 2$ et $V(t) = 60\ln(t+2) - 60\ln 2 + 200$.
Contrôle : $V'(t) = \frac{60}{t+2} = d(t)$.

(b) $V(6) = 60\ln 8 - 60\ln 2 + 200 = 60\ln 4 + 200 \approx 283{,}2$ L.

(c) $d(t) > 0$ sur $[0\,;48]$, donc V est strictement croissante. $V(t) > 320 \iff 60\ln\left(\frac{t+2}{2}\right) > 120 \iff \frac{t+2}{2} > e^2 \iff t > 2e^2 - 2 \approx 12{,}78$. La cuve dépasse 320 L au bout d'environ 12 h 47 min.

(d) $V(22) - V(6) = 60\ln 24 - 60\ln 8 = 60\ln 3 \approx 65{,}9$ L : la cuve reçoit environ 65,9 L entre la 6^e et la 22^e heure. Ce n'est pas $V(22)$, qui compte aussi l'eau déjà présente.

Ex. 41 ★★★ **Coût de production d'un atelier de céramique**

(a) On développe : $3(q-2)^2 + 8 = 3(q^2 - 4q + 4) + 8 = 3q^2 - 12q + 20 = C_m(q)$. Un carré est positif, donc $C_m(q) \geqslant 8 > 0$ sur $[0\,;10]$. Comme $C' = C_m$, $C'(q) > 0$: la fonction C est strictement croissante sur $[0\,;10]$.
Dans le contexte : chaque bol supplémentaire augmente le coût total.

(b) On a $C' = C_m$ sur $[0\,;10]$, donc C est une primitive de C_m. Avec les primitives usuelles de q^2 et de q, et par linéarité : $C(q) = 3 \times \frac{q^3}{3} - 12 \times \frac{q^2}{2} + 20q + k = q^3 - 6q^2 + 20q + k$. Les coûts fixes ne sont pas nuls : $C(0) = k = 15$.
Donc $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 15$. Contrôle : $C'(q) = 3q^2 - 12q + 20 = C_m(q)$. On a bien le coût total, en centaines d'euros.

(c) $C(6)$ est le coût total de 6 centaines de bols, coûts fixes compris. Ce n'est pas le coût de ce qu'on ajoute en passant de 4 à 6 centaines. Le coût supplémentaire vaut $C(6) - C(4)$. On calcule $C(6) = 216 - 216 + 120 + 15 = 135$ et $C(4) = 64 - 96 + 80 + 15 = 63$, donc $C(6) - C(4) = 72$ centaines d'euros. Passer de 4 à 6 centaines de bols coûte 7 200 €.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Faux. Avec 25 centaines d'euros de coûts fixes, le coût total devient $C(q) + 10$. Alors $(C(6) + 10) - (C(4) + 10) = C(6) - C(4) = 72$: la constante disparaît. Le coût supplémentaire reste 7 200 €, quels que soient les coûts fixes.

Ex. 42 ★★★ **Vidange d'un bassin de rétention**

(a) Pour tout t, $e^{-0{,}2t} > 0$, donc $d(t) = -6e^{-0{,}2t} < 0$ sur $[0\,;24]$. Comme $V' = d < 0$, la fonction V est strictement décroissante sur $[0\,;24]$: le débit est négatif, donc le volume d'eau du bassin diminue tout le temps.

(b) V est une primitive de d sur $[0\,;24]$. On reconnaît la forme e^{at+b} avec $a = -0{,}2$: une primitive de $e^{-0{,}2t}$ est $\frac{e^{-0{,}2t}}{-0{,}2} = -5e^{-0{,}2t}$. Par linéarité, $V(t) = -6 \times (-5)e^{-0{,}2t} + k = 30e^{-0{,}2t} + k$. Comme $V(0) = 30 + k = 50$, on obtient $k = 20$.
Donc $V(t) = 30e^{-0{,}2t} + 20$. Contrôle : $V'(t) = 30 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2t} = -6e^{-0{,}2t} = d(t)$.

(c) La variation du volume vaut $V(5) - V(0) = (30e^{-1} + 20) - 50 = -30(1 - e^{-1}) \approx -18{,}96$. Le débit est en m^3 par heure et le temps en heures, donc ce résultat est en m^3. Le volume a baissé : environ 18,96 m^3 d'eau se sont écoulés pendant les 5 premières heures.

(d) On résout $V(t) = 35$, c'est-à-dire $30e^{-0{,}2t} + 20 = 35$, soit $e^{-0{,}2t} = \frac{1}{2}$. Alors $-0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, donc $t = 5\ln 2 \approx 3{,}466$ h. Comme V est strictement décroissante, cet instant est unique. Avec $0{,}466 \times 60 \approx 28$ min, le bassin ne contient plus que 35 m^3 au bout d'environ 3 h 28 min.

(e) Non. Pour tout t, $30e^{-0{,}2t} > 0$, donc $V(t) > 20$: il reste toujours plus de 20 m^3 d'eau. Le minimum est atteint en $t = 24$, puisque V est décroissante : $V(24) = 30e^{-4{,}8} + 20 \approx 20{,}25$ m^3. Au bout de 24 heures, le bassin contient encore environ 20 m^3, soit 40 % de son volume initial. Il n'est donc pas presque vide.