Démontrer en arithmétique : pairs, impairs, multiples – exercices

Mathématiques – Seconde

Arithmétique · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Deux nombres différents s'écrivent avec deux lettres : $2k$ et $2p$.
- La phrase « K est un entier » doit être écrite : elle fait la démonstration.
- $2K$ = pair, $2K+1$ = impair ; « multiple de 3 » n'est pas « multiple de 6 ».
- Vérifier sur des exemples ne prouve rien ; un seul contre-exemple prouve que c'est faux.
- 0 est pair, et un multiple peut être négatif : k est un entier relatif.
- $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$, pas $4k^2+1$.

Exercice 1 – Traduire avec des lettres ★

Écris avec des lettres (k et p désignent des entiers).

a) Un entier pair.

b) Un entier impair.

c) Un multiple de 7.

d) Deux entiers pairs quelconques.

e) L'entier pair qui suit $2k$.

f) L'entier impair qui précède $2k+1$.

g) Trois entiers consécutifs, le premier étant n.

h) Le carré d'un entier impair, développé.

Exercice 2 – Pair ou impair ? ★

k et p sont des entiers. Écris l'expression sous la forme $2K$ ou $2K+1$ avec K entier, puis conclus.

a) $4k+6$

b) $6k+5$

c) $2k+2p$

d) $10k-3$

e) $8k^2+4k+1$

f) $(2k+1)+(2k+3)$

g) $3k+1$

h) $2\,(k+1)^2-1$

Exercice 3 – Faire apparaître un multiple ★

n est un entier. Montre que l'expression est un multiple de l'entier indiqué.

a) $15n - 10$: multiple de 5

b) $12n + 18$: multiple de 6

c) $-8n + 20$: multiple de 4

d) $14n^2 + 21n$: multiple de 7

e) $35 + 21n$: multiple de 7

f) $(n+2)^2 - n^2$: multiple de 4

g) $(n+3)^2 - (n-3)^2$: multiple de 12

h) $n(n+5) - n(n-1)$: multiple de 6

Exercice 4 – La somme de deux multiples ★★

a et b sont deux multiples de 7.

1. Écris a et b avec des lettres.
2. Calcule $a + b$, factorise par 7 et conclus.
3. Démontre de même que $a - b$ est un multiple de 7.

Exercice 5 – Le produit de deux entiers consécutifs ★★

n est un entier. On veut démontrer que $n(n+1)$ est pair.

1. Cas où n est pair : on écrit $n = 2k$. Écris $n(n+1)$ sous la forme $2K$.
2. Cas où n est impair : on écrit $n = 2k + 1$. Écris $n(n+1)$ sous la forme $2K$.
3. Conclus.

Exercice 6 – Le carré d'un entier ★★

n est un entier.

1. On suppose n impair : $n = 2k + 1$. Développe n^2 et montre qu'il est impair.
2. On suppose n pair : $n = 2k$. Montre que n^2 est pair.
3. On sait que n^2 est pair. Que peut-on dire de n ? Justifie avec la question 1.

Exercice 7 – Des entiers consécutifs ★★

n est un entier.

1. Démontre que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
2. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ?

Exercice 8 – Vrai ou faux ? ★★★

Démontre l'affirmation si elle est vraie (k, p et n entiers), donne un contre-exemple si elle est fausse.

a) La somme de deux entiers impairs est paire.

b) Le produit de deux entiers impairs est impair.

c) La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 6.

d) Pour tout entier n, $n^2 + 1$ est impair.

e) Pour tout entier n, $n^2 + n + 1$ est impair.

f) Le produit de deux entiers consécutifs est un multiple de 4.

Exercice 9 – Impairs et carrés ★★★

n est un entier.

1. Démontre que $(n+1)^2 - n^2$ est impair.
2. Écris 15, puis 101, comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
3. Démontre que, si n est impair, $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) « $a = 2k$ et $b = 2k$ sont pairs, donc $a + b = 4k$ est un multiple de 4. »

b) « J'ai testé $n = 1, 2, 3$: $n^2 - n + 11$ est toujours premier. »

c) « $3n + 6 = 3(n + 2)$, donc c'est un multiple de 6. »

d) « $4k + 2 = 2(2k + 1)$, donc c'est impair. »

e) « -6 n'est pas un multiple de 3, car il est négatif. »

f) « 0 n'est ni pair ni impair. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Un entier impair s'écrit, avec k entier :
   A $k + 1$ **B** $2k$ **C** $2k + 1$ **D** $2(k + 1)$
2. $(2k + 1)^2$ est égal à :
   A $4k^2 + 4k + 1$ **B** $4k^2 + 1$ **C** $2k^2 + 4k + 1$ **D** $4k^2 + 2k + 1$
3. La somme de deux entiers impairs est :
   A toujours impaire **B** paire ou impaire selon les cas **C** toujours un multiple de 4
   D toujours paire
4. Pour tout entier n, $12n + 8$ est :
   A un multiple de 8 **B** un multiple de 4 **C** impair **D** un multiple de 12
5. Pour prouver qu'une affirmation « pour tout entier n » est fausse :
   A il faut tester trois valeurs **B** il faut écrire $n = 2k$ **C** c'est impossible
   D un contre-exemple suffit
6. La somme de trois entiers consécutifs n, $n + 1$, $n + 2$ vaut :
   A $3(n + 1)$ **B** $3n + 2$ **C** $3n$ **D** $n + 3$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).