Corrigé – Démontrer en arithmétique : pairs, impairs, multiples

Mathématiques – Seconde

Arithmétique · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Traduire avec des lettres ★

Écris avec des lettres (k et p désignent des entiers).

a) $2k$, avec k entier.

b) $2k+1$, avec k entier.

c) $7k$, avec k entier (il peut être négatif ou nul).

d) $2k$ et $2p$: *deux lettres*, sinon les deux nombres seraient égaux.

e) $2k+2$: on ajoute 2 pour passer au pair suivant.

f) $2k-1$: on enlève 2 pour passer à l'impair précédent.

g) n, $n+1$ et $n+2$: on ajoute 1 à chaque fois.

h) On développe avec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$(2k+1)^2$
$= (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2$
$= 4k^2 + 4k + 1$

Exercice 2 – Pair ou impair ? ★

k et p sont des entiers. Écris l'expression sous la forme $2K$ ou $2K+1$ avec K entier, puis conclus.

a) $4k+6$
$= 2 \times 2k + 2 \times 3$
$= 2\,(2k+3)$
$K = 2k+3$ est un entier, donc $4k+6$ est **pair**.

b) $6k+5$
$= 6k + 4 + 1$
$= 2 \times 3k + 2 \times 2 + 1$
$= 2\,(3k+2) + 1$
$K = 3k+2$ est un entier, donc $6k+5$ est **impair**.

c) $2k+2p$
$= 2 \times k + 2 \times p$
$= 2\,(k+p)$
$K = k+p$ est un entier, donc $2k+2p$ est **pair**.

d) $10k-3$
$= 10k-4+1$
$= 2\times 5k-2\times 2+1$
$= 2\left(5k-2\right)+1$
$K=5k-2$ est un entier, donc $10k-3$ est **impair**.

e) $8k^2+4k+1$
$= 2\times 4k^2+2\times 2k+1$
$= 2\left(4k^2+2k\right)+1$
$K=4k^2+2k$ est un entier, donc $8k^2+4k+1$ est **impair**.

f) $(2k+1)+(2k+3)$
$= 4k+4$
$= 2\left(2k+2\right)$
$K=2k+2$ est un entier, donc $(2k+1)+(2k+3)$ est **pair**.

g) *On ne peut pas conclure :* cela dépend de k.
Pour $k=0$: 1, impair ; pour $k=1$: 4, pair.

h) $2\left(k+1\right)^2-1$
$= 2\left(k^2+2k+1\right)-1$
$= 2k^2+4k+2-1$
$= 2k^2+4k+1$
$= 2\left(k^2+2k\right)+1$
$K=k^2+2k$ est un entier, donc $2\left(k+1\right)^2-1$ est **impair**.

Exercice 3 – Faire apparaître un multiple ★

n est un entier. Montre que l'expression est un multiple de l'entier indiqué.

a) $15n-10$
$= 5\times 3n-5\times 2$
$= 5\left(3n-2\right)$
$K=3n-2$ est un entier, donc $15n-10$ est un multiple de 5.

b) $12n+18$
$= 6\times 2n+6\times 3$
$= 6\left(2n+3\right)$
$K=2n+3$ est un entier, donc $12n+18$ est un multiple de 6.

c) $-8n+20$
$= 4\times(-2n)+4\times 5$
$= 4\left(-2n+5\right)$
$K=-2n+5$ est un entier, donc $-8n+20$ est un multiple de 4.

d) $14n^2+21n$
$= 7\times 2n^2+7\times 3n$
$= 7\left(2n^2+3n\right)$
$K=2n^2+3n$ est un entier, donc $14n^2+21n$ est un multiple de 7.

e) $35+21n$
$= 7\times 5+7\times 3n$
$= 7\left(5+3n\right)$
$K=5+3n$ est un entier, donc $35+21n$ est un multiple de 7.

f) $\left(n+2\right)^2-n^2$
$= n^2+4n+4-n^2$
$= 4n+4$
$= 4\left(n+1\right)$
$K=n+1$ est un entier, donc $\left(n+2\right)^2-n^2$ est un multiple de 4.

g) $\left(n+3\right)^2-\left(n-3\right)^2$
$= \left(n^2+6n+9\right)-\left(n^2-6n+9\right)$
$= n^2+6n+9-n^2+6n-9$
$= 12n$
$K=n$ est un entier, donc $\left(n+3\right)^2-\left(n-3\right)^2$ est un multiple de 12.

h) $n\left(n+5\right)-n\left(n-1\right)$
$= n^2+5n-\left(n^2-n\right)$
$= n^2+5n-n^2+n$
$= 6n$
$K=n$ est un entier, donc $n\left(n+5\right)-n\left(n-1\right)$ est un multiple de 6.

Exercice 4 – La somme de deux multiples ★★

1. $a=7k$ et $b=7p$, avec k et p entiers (deux lettres : a et b ne sont pas forcément égaux).

2. $a+b=7k+7p=7(k+p)$: on factorise par 7.
   $K=k+p$ est un entier (somme de deux entiers).
   Donc $a+b=7K$ est un multiple de 7.

3. $a-b=7k-7p=7(k-p)$.
   $k-p$ est un entier (différence de deux entiers).
   Donc $a-b$ est un multiple de 7.

Exercice 5 – Le produit de deux entiers consécutifs ★★

1. $n+1=2k+1$, donc $n(n+1)=2k(2k+1)=2\big[k(2k+1)\big]$.
   $K=k(2k+1)$ est un entier, donc $n(n+1)=2K$ est pair.

2. $n+1=2k+2=2(k+1)$.
   Donc $n(n+1)=(2k+1)\times 2(k+1)=2\big[(2k+1)(k+1)\big]$.
   $K=(2k+1)(k+1)$ est un entier, donc $n(n+1)=2K$ est pair.

3. Un entier est soit pair, soit impair : on a traité tous les cas.
   Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair.
   Donc $n(n+1)$ est pair pour tout entier n.

Exercice 6 – Le carré d'un entier ★★

1. $n^2 = (2k+1)^2$
   $= 4k^2 + 4k + 1$
   $= 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$
   On a mis 2 en facteur dans $4k^2 + 4k$.
   $K = 2k^2 + 2k$ est un entier, donc $n^2 = 2K + 1$ est impair.

2. $n^2 = (2k)^2$
   $= 4k^2$
   $= 2\left(2k^2\right)$
   $K = 2k^2$ est un entier, donc $n^2 = 2K$ est pair.

3. Si n était impair, n^2 serait impair (question 1).
   Or n^2 est pair : n ne peut donc pas être impair.
   Donc n est pair.

Exercice 7 – Des entiers consécutifs ★★

1. Trois entiers consécutifs s'écrivent n, $n+1$, $n+2$.$n + (n+1) + (n+2)$
   $= 3n + 3$
   $= 3\left(n + 1\right)$
   $K = n + 1$ est un entier, donc la somme $3K$ est un multiple de 3.

2. Non.
   Contre-exemple : $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, et $6 = 4 \times 1 + 2$ n'est pas un multiple de 4.
   En général, la somme vaut $4n + 6 = 4(n+1) + 2$: il reste toujours 2.

Exercice 8 – Vrai ou faux ? ★★★

Démontre l'affirmation si elle est vraie (k, p et n entiers), donne un contre-exemple si elle est fausse.

a) **Vrai.** Deux impairs : $2k+1$ et $2p+1$ (deux lettres).$(2k+1) + (2p+1)$
$= 2k + 2p + 2$
$= 2\left(k + p + 1\right)$
$K = k + p + 1$ est un entier, donc la somme est paire.

b) **Vrai.** Deux impairs : $2k+1$ et $2p+1$.$(2k+1)\left(2p+1\right)$
$= 4kp + 2k + 2p + 1$
$= 2\left(2kp + k + p\right) + 1$
$K = 2kp + k + p$ est un entier, donc le produit est impair.

c) **Faux.** Contre-exemple : 3 et 6 sont des multiples de 3, mais $3 + 6 = 9$ n'est pas un multiple de 6.

d) **Faux.** Contre-exemple : pour $n = 1$, $n^2 + 1 = 1 + 1 = 2$, qui est pair.

e) **Vrai.** On factorise $n^2 + n$ par n : $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$.
Or $n(n+1)$ est pair (produit de deux entiers consécutifs) : $n(n+1) = 2K$ avec K entier.
Donc $n^2 + n + 1 = 2K + 1$ est impair.

f) **Faux.** Contre-exemple : $1 \times 2 = 2$ n'est pas un multiple de 4.

Exercice 9 – Impairs et carrés ★★★

1. $(n+1)^2 - n^2$
   $= n^2 + 2n + 1 - n^2$
   $= 2n + 1$
   n est un entier, donc $2n+1$ est impair.

2. On cherche n tel que $2n+1 = 15$: $15 = 2 \times 7 + 1$, donc $n = 7$ et $15 = 8^2 - 7^2$.
   Vérification : $64 - 49 = 15$.
   De même, $101 = 2 \times 50 + 1$, donc $n = 50$ et $101 = 51^2 - 50^2$.
   Vérification : $2\,601 - 2\,500 = 101$.

3. n est impair : $n = 2k+1$ avec k entier.
   $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1$
   $= 4k^2 + 4k + 1 - 1$
   $= 4k^2 + 4k$
   $= 4k\,(k+1)$
   Or $k(k+1)$ est pair (produit de deux entiers consécutifs) : $k(k+1) = 2K$ avec K entier.
   Donc $n^2 - 1 = 4 \times 2K = 8K$: multiple de 8.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *La même lettre rend a et b égaux.*
On écrit $a = 2k$ et $b = 2p$: $a + b = 2k + 2p = 2(k+p)$, donc $a+b$ est pair, sans plus.
Exemple : $2 + 4 = 6$ est pair, mais pas multiple de 4.

b) *Des exemples ne prouvent rien.*
Contre-exemple : pour $n = 11$, $n^2 - n + 11 = 121 - 11 + 11 = 121$.
Or $121 = 11 \times 11$: ce n'est pas un nombre premier.

c) *On a montré « multiple de 3 » seulement.*
Contre-exemple : pour $n = 3$, $3n + 6 = 15 = 6 \times 2 + 3$, qui n'est pas un multiple de 6.

d) *La forme $2K$ veut dire pair.*
$4k + 2 = 2K$ avec $K = 2k + 1$: il est **pair**.

e) *k est un entier relatif.*
$-6 = 3 \times (-2)$: c'est un multiple de 3.

f) $0 = 2 \times 0$.
0 s'écrit $2k$ avec $k = 0$ entier : 0 est pair (et multiple de tout entier).

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un entier impair s'écrit, avec k entier :

Réponse C : $2k + 1$
$2k$ est pair, donc $2k + 1$ est impair. $k + 1$ peut être pair ou impair.

2. $(2k+1)^2$ est égal à :

Réponse A : $4k^2+4k+1$
$(2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2$.

3. La somme de deux entiers impairs est :

Réponse D : toujours paire
$(2k+1)+(2p+1)=2(k+p+1)$. Pas toujours multiple de 4 : $1+1=2$.

4. Pour tout entier n, $12n+8$ est :

Réponse B : un multiple de 4
$12n+8=4(3n+2)$. Pour $n=1$: 20, ni multiple de 8 ni de 12.

5. Pour prouver qu'une affirmation « pour tout entier n » est fausse :

Réponse D : un contre-exemple suffit
Un seul cas où l'affirmation est fausse suffit à la réfuter.

6. La somme de trois entiers consécutifs n, $n+1$, $n+2$ vaut :

Réponse A : $3(n+1)$
$n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).